2003 年 12 月 5 日（金）

授業研究 3 日目

～古代の音楽～

ピタゴラス音律にみられる数学

筑 波 大 学 附 属 高 等 学 校　　2 年　　組　　番　　　氏 名

授業者：筑波大学大学院教育研究科　白川 嘉子

0. 復習

◎ ピタゴラスは音の実験をモノコード（一弦琴）を使って行った。
◎ ピタゴラス音律とは、

　　純正五度(2/3)の音程を連続的に積み重ねていくことによってできる。

- 和音
  - 協和音
    - 完全協和音
    - 不完全協和音
  - 不協和音

≪完全協和音と不完全協和音の違い≫

・ 完全協和音

　2 つの音がよく調和している和音。

・ 不完全協和音

　完全協和音よりは、調和していない和音。(付録：師匠と弟子の対話)

◎ ピタゴラス音律を作図してみよう。

1. モノコードを弾いてみよう

自分で作図したものを用いて
ピタゴラスが音の実験で用い
たモノコードを使ってみよう。

Q. 音階になっていましたか？また、どのような音階になっていましたか？

ところで・・・・

・ 作図したとき、$\frac{1}{2}$(オクターヴ)に重なっただろうか？

・ (ずれていたならば)ずれは、どの位あるのだろうか？

計算をしてみる。

$$\frac{1}{2} \leq 2^{m} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n} < 1$$

となるように音律を作成する。そこで、ピタゴラスは音律を弦の 12 分割で表したので、

$$\frac{2^{12}}{3^{12}} \times 2^{m}$$

となり、計算すると

$$\frac{2^{12}}{531441} \times 2^{m}$$

となるので、

$$1 > \frac{2^{12}}{531441} \times 2^{m} \geq \frac{1}{2}$$

となるようなmを見つけると、m＝7 で以下のようになる。

$$1 > \frac{524288}{531441} \geq \frac{1}{2}$$

よって、12 分割しても正確には 1 に戻らない。

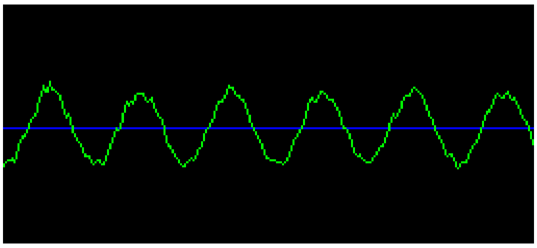
☆このずれを『**ピタゴラス・コンマ**』という。

☆ピタゴラスコンマはソのシャープとレのシャープの間に埋め込むことで解決

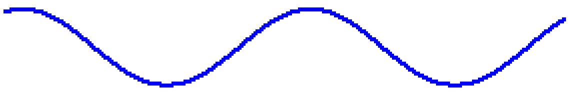
されている。

2. 弦の長さと振動数の関係

＊ 音は**波**の一部である。
＊ 波の一部であるから、音の波形にも**振動数**がある。
＊ 振動数・・・１秒間に振動する回数 単位･･･Hz（ヘルツ）



三弦琴の単音の波形



理想的な音の波形

実は、

*ピタゴラスはできるだけ簡単な整数比で音程を作るべきだと考え、1∶2(オクターヴ)と 2∶3(純正五度)の 2 つの比率をもった音程だけで音階の各音の**振動数**を、決定した。*

では、

◎ 弦の長さと振動数にはどのような関係があるだろうか？

まず、 f :振動数、l :弦の長さ、v :速さ、n :腹の数とし、

$$f_n = \frac{n}{2l_n}v \quad (n=1,2,3\cdots)\ \text{(Hz)}$$

が成り立つ。（ここで、腹とは波の最も大きく振動する幅（振幅の部分）のことである。）また、速さは、$v = \sqrt{\frac{S}{\rho}}$（S＝張力、ρ＝線密度）で表され、今、S とρは一定なので、v は一定である。

① 弦の長さが 1 のとき、振動数は

$$f_1 = \frac{1}{2\times 1}v = \frac{v}{2} \quad \text{（Hz）}$$

② 弦の長さが $\frac{1}{2}$ のとき、$\frac{1}{2}$ の弦の長さを 1 と考えると $n = 1$ であるから振動数は

$$f_2 = \frac{1}{2\times\frac{1}{2}}v = v \quad \text{（Hz）}$$

①、②より

$$f_1 : f_2 = \boxed{\quad : \quad}$$

よって、弦の長さが$\boxed{\quad}$倍になると、振動数は$\boxed{\quad}$倍になることがわかる。

さらに、v は一定であるので、$\frac{v}{2}$ は定数である。したがって、

$$f_n = \frac{v}{2\times l_n} \quad \text{（Hz）}$$

であるから、弦の長さと振動数は $\boxed{\quad}$ の関係になっていることがわかる。

◎ すべての波形は sin と cos で表される。

1 番単純な周期を持つ波といったら、「三角関数」が思い出される。

$$f(\theta) = a\sin\theta \quad \cdots(\ast)$$

a に値を入れれば、振幅は変えられる。しかし、角度 θ がどんな速さで変化するのかは表せない。そこで、角速度(ω)というものを使う。基本は、

$$\boxed{\text{速度} = \text{距離}／\text{時間}}$$

である。これを用いると、

$$\boxed{\text{角速度}(\omega) = \text{角度}(\theta)／\text{時間}(t)}$$

つまり、「1 秒間に回れる角度 = 進んだ角度(距離)÷かかった時間」となる。書き換えると、

$$\theta = \omega t \quad \cdots(※)$$

これを(＊) に代入すると、θの関数が時間の関数に変わって、

$$\boxed{f(t) = a\sin\omega t}$$

となる。これで、どんな振幅、どんな角速度、どんな振動数の波も数式で表せるようになった！！

ところが、よく考えると波には、0 から始まっていないものもあり、sin 波で表せないものがある。

では、0 以外から始まる波は、どうやったら表せるだろうか？

ここで登場するのが cos である。数式で表すと、

$$f(\theta) = a\cos\theta$$

となる。sin のときと同様に(※)を上の式に代入すると、

$$\boxed{f(t) = a\cos\omega t}$$

となる。

≪付録≫

師匠：振動数の比率が単純なほど、２つの音はよく溶け合い、透明感のある響きとなる。昔の人は、この「よく溶け合う響き」を良しとした。いわゆる完全協和音程である。

弟子：４度や５度の音程を好んで使ったのですね。

師匠：ところが時代が進み、対位法（音楽で、独立性の強い複数の旋律を調和させて楽曲を構成する作曲技法）が発達してくると、各パートの独立性が大事になってきた。溶け合ってしまうと、独立性が損なわれるのだ。

弟子：それで、３度や６度の音程を使い始めたのですね。

師匠：４度や５度のように完全には溶け合わないので、これを不完全協和音程というようになった。

弟子：現代人からみれば、３度や６度はよく響いて聞こえるのに、それをなぜ「不完全」と言うのか、ずっと疑問に思っていました。なるほど、そういう歴史的な経緯があるのですね。

師匠：「１つに溶け合って聞こえること」を「響くこと」だと思っていた昔の人たち。「２つの重なりに聞こえること」を「響くこと」だと思っている現代人。この感性の違いをしっかり理解していないと、古楽を聴いてもただ「つまらない」という感想を持ってしまうことになる。