出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.69-82、2004年3月

ピタゴラス音律にみられる数学を題材とした授業研究

―モノコードの追体験を通して―

筑波大学大学院修士課程教育研究科
白川　嘉子

章構成

1. はじめに
2. 研究目的・研究方法
3. ピタゴラス音律の教材化
4. 教材の数学的解説
5. ピタゴラス音律を題材とした授業概要
6. 議論
7. おわりに

要約

本研究では、他教科とのつながりという視点からピタゴラス音律を取り上げ、その音階の成り立ちを知ることによる数学観の変容を考察する。歴史の中で実際に用いられた道具を教材化することにより、古代ギリシアにおける数学を追体験し、音楽史の中における数学を知ることを通じて、生徒の数学に対する興味・関心を高めることができた。さらに、ピタゴラス音律を取り上げたこの授業を通して、生徒は数学を身近に感じることができることも示された。

キーワード：ピタゴラス音階、追体験、音楽史、線分比、三角関数

1．はじめに

高等学校学習指導要領解説(1999)[1]では、「数学基礎」の目標において「数学と人間とのかかわりや、社会生活において数学が果たしている役割について理解させ、数学に対する興味・関心を高めるとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し数学を活用する態度を育てる」とあり、三角関数の目標として「三角関数のグラフやその周期性について理解させる」とある。筆者はこの目標から「興味・関心」に注目し、さらに他教科とのつながりを知ることにより数学を身近に感じることはできないかと考えた。また、礒田(2001)[2]の「文化的視野の覚醒は、個々人の認知の次元では数学観とその変容に通じる見方として説明できる」という立場から、古代ギリシア数学と音楽のつながりを通じて数学を追体験することを通して、自らが持つ数学観の変容を促すことを目指した。

音楽を通して数学観の変容を促す授業については、佐藤(2002)[3]が、「生徒は数学が日常生活と密接に関連していることを捉えられ数学観が変容するか」、「またそこから数学を学ぶ価値を見出すことができるか否か」の 2 点に注目し、音楽史を利用した数学史教材を原典解釈・追体験することを通じて、身近な事象と数学の結びつきを体験することにより数学観が変容した生徒は、数学を学ぶ価値も見言い出すことができることを報告している。また、Michel Rodriguez(2000)[4]は「数学的な話題と他の話題との絡み合い」の中で、定木とコンパス

での作図や、比の定理などのギリシア数学の文化の活動についての概要として、(a) 発生した波の周波数と振動する減の長さの間の反比例関係の提示、(b) 共振感覚の概念、(c) 主なピタゴラスの音階、最初の 11 の比のアルゴリズムと計算、(d) “ピタゴラスの音階は定木とコンパスで作図可能か”を挙げている(p270)。

本研究では、Michel Rodriguez(2000)の上記の概要を元に、他教科とのつながりという視点からピタゴラス音律を取り上げ、歴史的道具を用いた授業を行った。それにより、道具を用いて古代ギリシアにおける数学を追体験することで、数学に対する興味・関心を高めることができるか、音楽史の中で数学がどのように用いられていたかを知ることで、数学を身近に感じることができるかについて考察する。

2．研究目的・研究方法

(1) 研究目的

本研究では、他教科とのつながりという視点からピタゴラス音律を取り上げ、歴史的道具を用いた授業を行った。それにより、道具を用いてその時代を追体験することで、数学に対する興味・関心を高めることができるか、音楽史の中で数学がどのように用いられていたかを知ることで、数学を身近に感じることができるかについて考察する。

課題 1：生徒自身の手で作図を行い、道具を用いることで、数学に対する新しい考え方が見出されるか。

課題 2：他の教科および歴史の追体験を通して、数学に対する興味・関心を持つことができるか。

課題 3：三角関数を身近に感じることができるか。

(2) 研究方法

数学史、道具を用いて授業を行い、授業の事前・事後に行ったアンケート、各授業での生徒の感想、授業を撮影したビデオをもとに考察する。

3．ピタゴラス音律の教材化

古代バビロニアやエジプトにおいて、音程と比率との関係は耳によって理解され、楽器の調律の中に生かされていたが、音程と比率との関係を明確に体系づけたり、法則を発見しようとするまでには至っていなかった。ピタゴラスは、協和する音程の背後にある秩序を解明しようと試み、モノコードを用いて音の実験を行った[5]。モノコードは音律を規定するために音程の計測を目的とした楽器である。授業ではピタゴラスの実験を作図を通して幾何学的に確認し、次に当時のモノコードを再現し(図 1)、実際に音程を耳で確認することでピタゴラス音律の音階を数学と音楽の双方から学習することを試みた。さらに音は形のないものなので

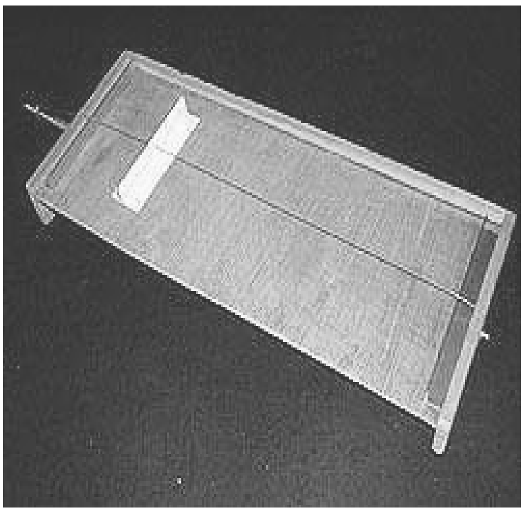


図 1　モノコード(一弦琴)

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.69-82、2004年3月

視覚的に捉えることができるように波として表し、その波が三角関数で表すことができ、和音(2 つの音)の波が単音の波の和で表されていることをGrapes(図 2)、wave paseri(図 3)を用いて確かめた。

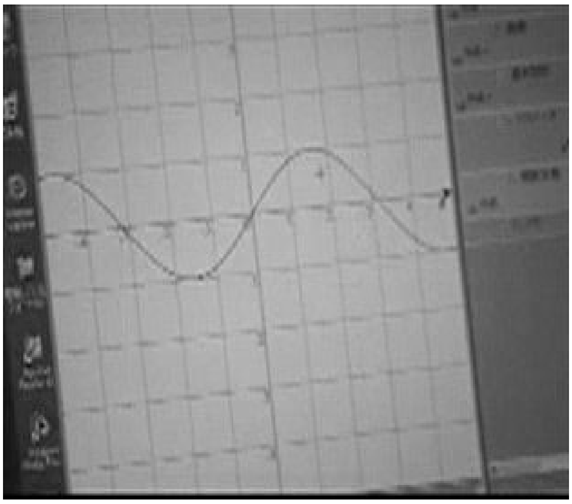


図 2　$y=\sin\theta$ のグラフ

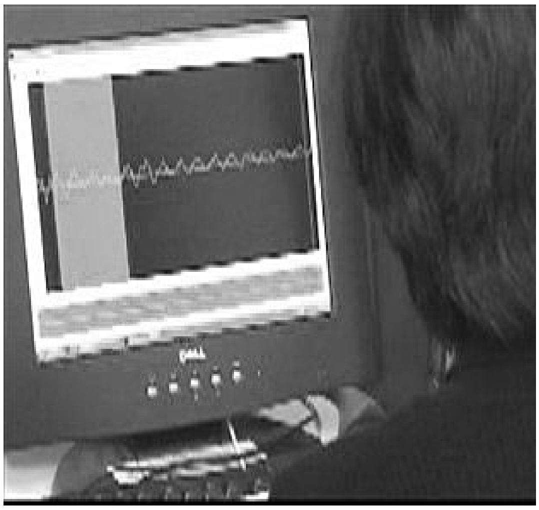


図 3　弦を弾いた時の波

ピタゴラスの実験とは、基本音の弦の長さを 1 とし、その 2/3 倍をとり、その点を純正五度とした。次は原点から 2/3 の点までを 1 として考え、さらに 2/3 倍の点を取り、その点が 1/2 の点より左側に取れたときには、弦の 1/2 から 1 の間に音階が成り立つよう 2 倍にして点を取った。この作業を繰り返し行うことにより 12 個の音が得られる。この作業において弦の長さ 1 の基本音をドとし、その音から 7 番目までの作業で得られる音を音階上に並べ、ファ#（シャープ）をファと置き換えられたものがピタゴラス音律[①]の音階[②]である。

4．教材の数学的解説

音階を作図します。この作図は定木とコンパスのみで行います。

＜作図方法＞

1. 線分を引き、長さを 1 とする。そして、この長さでなる音を基本音とする。
2. この線分の垂直二等分線を引く。
3. 長さ 1 の線分より上側に、線分とのなす角が鋭角となるような直線を描きその直線から同じ長さの線分を 3 本取る。(図 4)

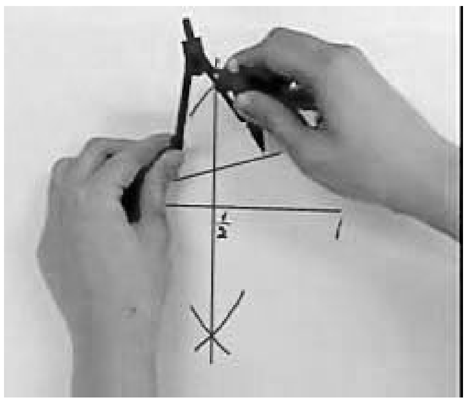
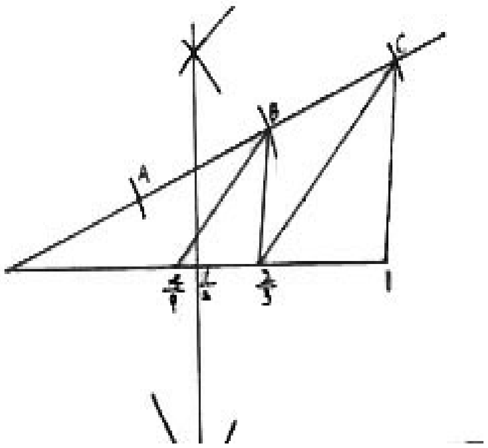


図 4　直線を線分 3 本に等分

① 音律：① 音の調子。② 音の高さ。③ 音階の体系。純正律・平均律など。
② 音階：音楽に用いる個々の高さを順に並べたもの。普通は主音とそのオクターヴとの間に一定の秩序により配列する。（広辞苑　第四版　岩波書店より）



4. 点 C と 1 を結ぶ。
5. 線分 C1 と平行で点 B を通るような線分を引きく。この線分と長さ 1 の線分との交点は 1 に対して 2/3 の長さとなる。
6. 今度は、長さ 2/3 を基準として点 C と 2/3 をむすび、点 B を通るように平行移動すると左図のようになる。

7. 右上の図で 4/9 の点は 1/2 の点よりも左側にきてしまい、基本音の 1 オクターヴ高い音よりもさらに高い音となる。そこで、右図のように 4/9 の長さを二倍した点を 1/2 の点より右側に取る。

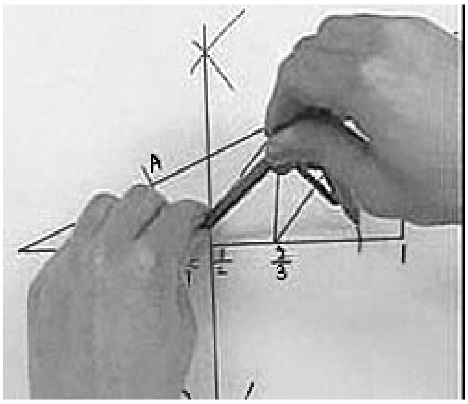
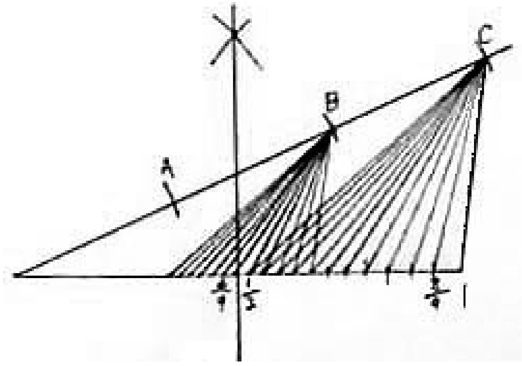


図 5　4/9 の 2 倍の長さをとる



8. 上の作図を繰り返すと左図のようになる。

5．ピタゴラス音律を題材とした授業概要

(1) 授業環境

日時：平成 15 年 12 月 2 日、3 日、5 日、8 日、9 日（計 30 分×4 回、60 分×1 回）
対象：筑波大学付属高等学校 2 学年（6 名）
準備：コンピュータ（Windows）、Microsoft Power Point、Grapes、wave paseri、三弦琴、モノコード(一弦琴)、ギター、鉄琴、コンパス、定木、事前・事後アンケート、授業テキスト

(2) 授業展開

＜1 時間目＞

目標：三弦琴を用いてオクターヴと純正五度を知る。

　まず、音律を発見したとされるピタゴラスについての人物紹介から授業を始めた。そして、三弦琴を用いて、駒の置いていない弦をそのまま弾いた時、弦の 1/2 の位置に駒を置いて弾いた時、弦の 2/3 の位置に駒を置いて弾いた時を聞き比べた。生徒は弦の様々な位置を弾いてみたり、弾き方を変えてみたり、駒を動かしてみたりしながら、音

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.69-82、2004年3月

を聞き比べていた(図 6)。S2 は、1/3 と 2/3 の音を聞き比べていた(図 7：印の部分)。

【対話】

T：そのまま弾いた時と、1/2 のところに駒を置いた時と、2/3 のところに駒を置いた時とで、どういうふうに聞こえましたか？

S1：きっとそのまま弾いた時はドに聞こえて、というかドかどうかは確信が持てないんですけど、間違いなく②(弦の 1/2 の位置に駒を置いて弾いた音)は①(駒を置かない状態の弦を弾いた時の音)の 1 オクターヴ上ってことは確か。

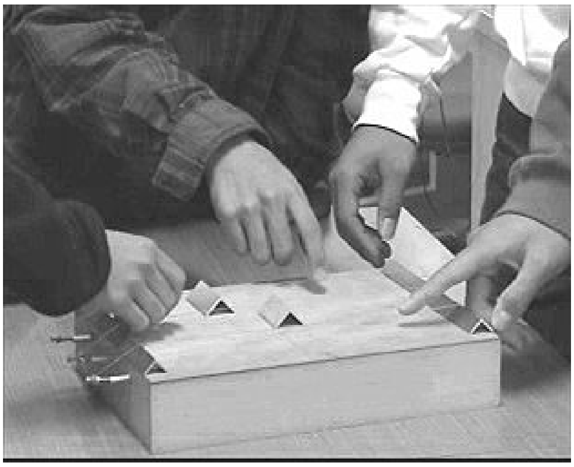


図6　駒を動かしながら音を聞き比べていた

T：それから？

S1：で、2/3 になると、もし仮に①がドだとするならきっと③番はソに聞こえたんだろうと思いました。

T：なるほど。他に何か違う意見はあるかな？

S2：2/3 と 1/3 が 1 オクターヴ違う。

T：2/3 の 1 オクターヴ上が 1/3 ってこと？

S2：うん。

図7　S2 は 1/2 と 2/3 の音を聞き比べていた

S1,S2 との対話から弦の長さが基本音の 1/2 倍の時には基本音の 1 オクターヴ上の音となり、2/3 倍の時には純正五度となることを確認し、定義した。

また、鉄琴やギターを用いてオクターヴの性質を確かめた。オクターヴには｢低い音と低い音の 1 オクターヴ上の音が同じ音に聞こえる｣という性質があり、｢同じ音｣がよく分かるように鉄琴を用いた。筆者がオクターヴの和音（低いドと高いド）と低いドと低いドの和音とドとレの和音、さらにドとミの和音で｢同じ音｣と｢違う音｣について確認した。このとき、S3 はドとソの和音と(低い)ドと(高い)ドの和音を弾き、聞き比べてみたが、なかなか｢同じ音｣について納得ができずにいた。そこで、筆者が 1 オクターヴの和音の音階を弾いて、聞き比べてもらった。しかし、他の生徒はうなずいたが、S3 はまだ納得できない表情であった。そこで、一度席についてもらい 1 オクターヴの和音がドとレの和音やドとミの和音と比べて同じに聞こえたかどうかを発表してもらった。

【対話】

S3：同じように聞こえたんだけど、(低い)ドと(高い)ド、(低い)レと(高い)レとだんだんいった方が分かりやすかったので、それとドとレ(の和音)、レとミ(の和音)、ミとファ(の和音)みたいな音と比べたら、もっと違いが分かるんじゃないかなと思った。

T：弾いてみる？

S3：（1 オクターヴの和音の音階と二度の和音(ドとレ、
レとミ)を弾いてみる）(図 8、図 9)
あっ、大変よく分かりました。

「同じ音」について疑問や意見が出始めた。


図 8　オクターブの音階


図 9　二度の和音の音階

S4：低い音と高い音というのは同じじゃないんですか？私は「低い音と高い音が同じ音に聞こえる」と聞くと、同じ種類の音(ドとドのような音)を思い浮かべます。

T：なるほど。その点についてどう思う？

S1：同時に弾いた時に聞こえ方が単音で弾いた時と変わってないからきっと同じ種類の音なんだろうと思います。（鉄琴で弾きながら説明をする）単音で(低い)ドや(高い)ドを弾いた時と同時に弾いた時と、聞こえ方というか響き方がまったく同じくらいの音に聞こえる。

S3：ああ。

S1：例えばドとレだったら、(弾いてみて)これだと音が邪魔しあっている感じがしちゃうんで。ドとミの和音はきれいに聞こえてもやっぱり違う音が混じってるように聞こえる。同じ種類の音だってことは確かだといえるんじゃないかなと思いました。

S3：聞いて同じ音だってことは分かるんだけど、やっぱり単音として聞いたら違う音だし、じゃあ何がそれに共通してて、じゃあ何が違うんだろうって。

ここで、時間により議論が終わってしまったが、最後の S3 の疑問から、S1 の「同じ種類の音」という意見に一度は納得したものの、やはり感覚的には基本音とその 1 オクターヴ上の音が「同じ音」であるということを認識できるが、理論的に考えると納得しにくいことが窺えた。

授業の最後に、ギターを用いて本当に 1/2 倍が 1 オクターブの音になっているのかを確かめた。

＜2 時間目＞

目標：和音について知り、音と弦の比の関係について確認する。さらに、ピタゴラス音律の音階を作図する手順を知る。

古代ギリシャの音律について、ピタゴラスが音の実験を行う時、モノコード(一弦琴)を使用し、さらにピタゴラス音律の音階が純正五度(2/3)の音程を連続的に積み重ねてい

出典：中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.69-82、2004年3月

くことによってできることを紹介した。次に和音について紹介し、生徒は鉄琴を用いて確認した。

【対話】

S1：(鉄琴の撥を三本持ち、ドミソの和音を弾いた(図 10))これで？

S2：それは・・・ここ(ドミ)が三つでここ(ミソ)が三つ・・・

S1：三度(ドミ)、三度(ミソ)

S2：長三(ドミ)、短三(ミソ)？

S1：長三(ドミ)、短三(ミソ)。

S2：こっち(ミソ)も長三？

S6：長三

S1：ミファの間に(黒鍵が)ないから短三だよ。

S6：あ、そうか。

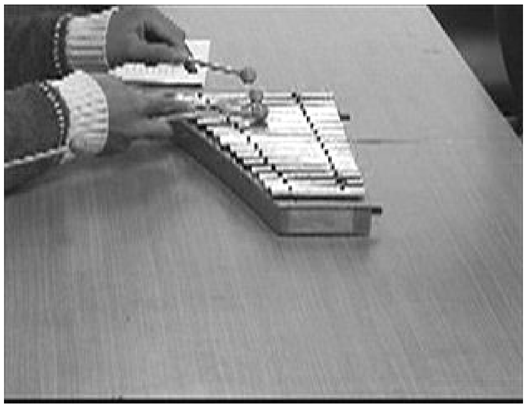


図 10　ドミソの和音

鉄琴を用いたことにより、和音の各音(オクターヴ、純正五度、長短三度等)の様子が確認できたので、今度は次のような質問をした。

【対話】

T：弦て、オクターヴは 1/2 だよね。で、ドとソだったら 2/3 になるんだよね？本当になってる？

S5：開放弦のドがない。

S1：こうすればいいんじゃないの？ドでしょ(ドを押さえる)。これの 2/3。どこだろう。(指で測って感覚的に)きっとここら辺。

S5：測ってみるか(鉄琴の撥で測ろうとする)。無理だね。

S6：(ドの位置を押さえる)

S5：(撥を 3 本使って測る)

S3：知的だ。でもなんかいい感じかもしれない。

S5：ちょうどいいじゃん。ここだ。

S1：おっ！

S5：(撥で測った位置を弾いてみるとソの音になっている)

全員：お～

S5：この先(撥の丸い部分)を抜かした部分がちょうどいい。

S1：なんて原始的なんだ。

生徒は自ら工夫をして調べ、弦の長さが基本音 1 の長さに対して純正五度の位置にある音の弦の長さは 2/3 であることをギターを用いて確認した。

授業の最後に、ピタゴラス音律の音階の作図を行った。まずはピタゴラス音律の音階は基本音の弦の長さ 1 に対してその 2/3 倍の点を取り、さらに取った 2/3 の長さの 2/3 倍の点を取るということを説明し、1/2 の点より左側に点が取れてしまったときは 2

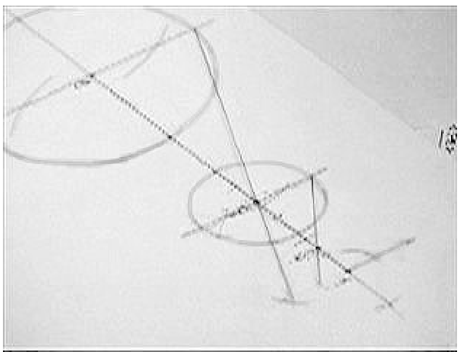


図 11　生徒の作図

倍することによって 1/2 の点の右側に点を取ることを説明した。作図方法は定木とコンパスを用いるということだけを話し、生徒に考えてもらった(図 11)。その後、作図方法を解説し課題とした。また、この作業を繰り返していくと結局どうなるかを予想してもらった。

＜3 時間目＞

目標：弦の長さと振動数の関係について知り、さらに 1 番単純な波として三角関数が挙げられることを知る。

2 時間目の課題としてだしていたピタゴラス音律の音階の作図(図 12)を、筆者がモノコードの弾き方を説明した後、3 人ずつに分かれ、生徒各自の作図が実際に音階になっているかを確かめた。次の対話は音階を弾いてみたときの生徒の率直な気持ちであると考えられる。

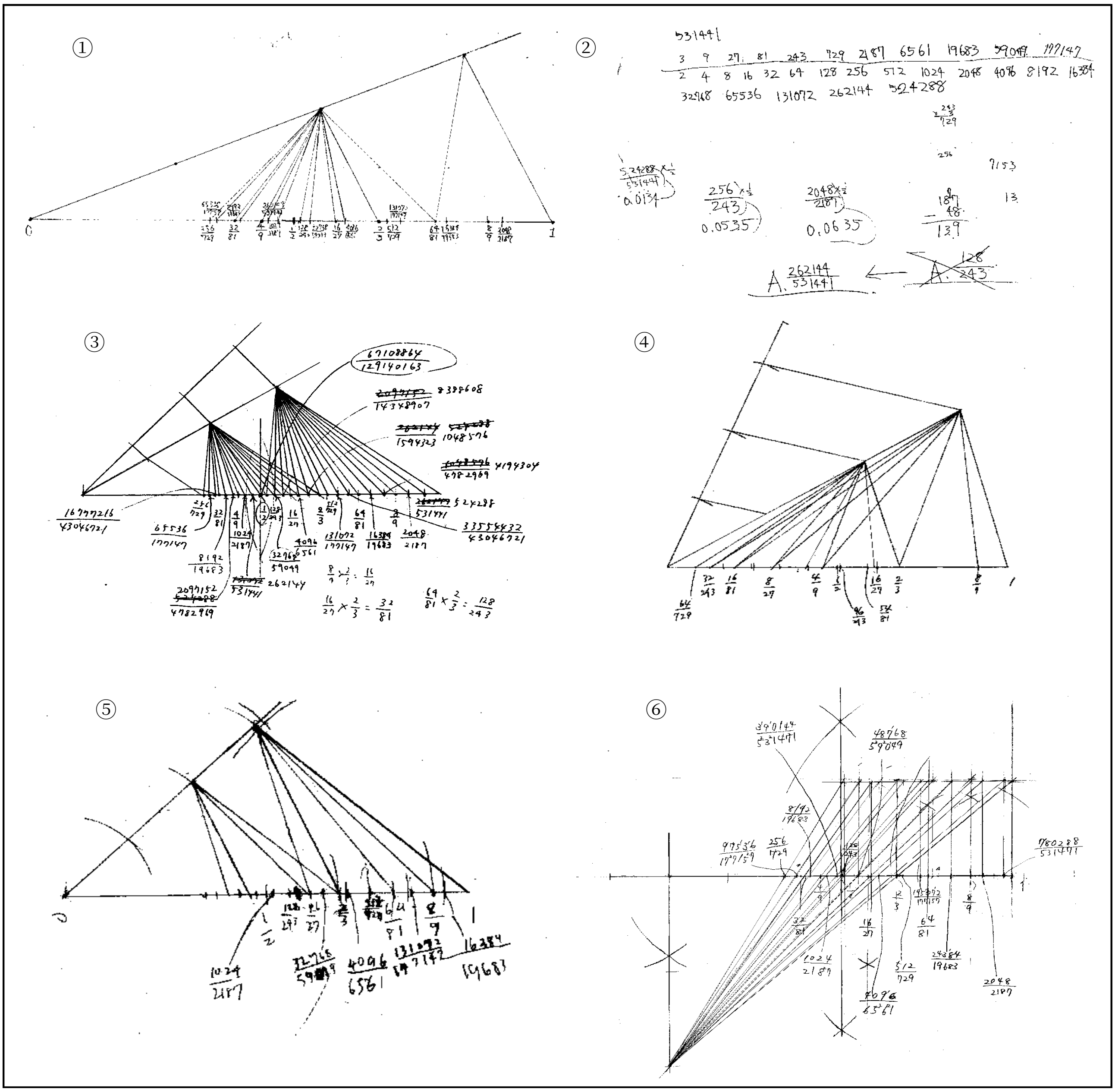


図 12　生徒 6 人による作図及び計算

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.69-82、2004年3月

【対話】

S2：じゃあ、ずらそう私は。

S4：(弾く) (図 13)

S2：すごくない、これ。

S6：すごいきれい。

S2：ここ(弦の長さが 1 の部分)とここ(弦の長さが 1/2 部分)が 1 オクターヴ？

S6：ミからミまで。

S4：（1 の位置と 1/2 の位置を弾くと基本音と基本音の 1 オクターヴ上の音になっている）

S2：えー、すっごーい。

S6：ここ(2/3 の位置)がシになってるの？

S2：すごいきれいにできたね。

S6：ミファソラシ。五度だよ。

S4：(弾いてみるとシ聞こえる)

S2,S4,S6：すごーい。

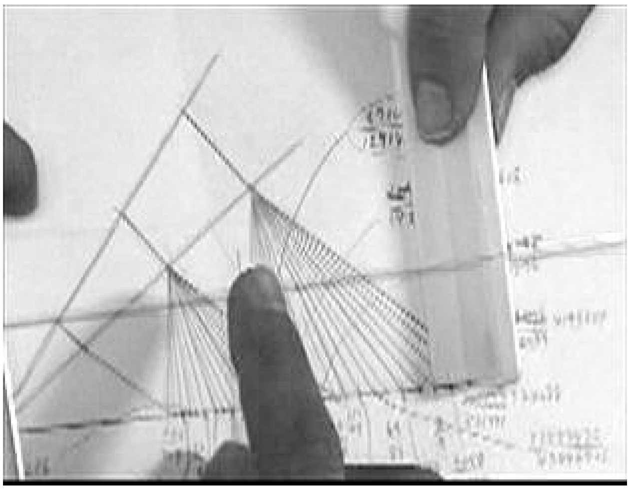


図 13　生徒自身が作図した音階を弾く

また、作図の際、最初に基本音に対するオクターヴの 1/2 の位置をとっているのだが、作図を進めていくと最後のオクターヴの位置でずれが生じる。このずれを「ピタゴラス・コンマ」といい、計算によってどの程度ずれているのかを求めた。

内容は一転して、弦の長さと振動数の関係について授業を行った。音は波の一部であり、音の波形にも振動数があることを定義し、その関係について求めた。ここで、1 番単純な周期を持つ波として「三角関数」を思い出す、ということから、$f(\theta) = a\sin\theta$ の式を挙げた。a に値を代入すれば、振幅の変化は得られるが、角度 θ はどんな速さで変化するのか表すことができないので、角速度 ω を求め、時間 t に関する式に変形した。しかし、波は x-y 平面座標において原点 0 から始まっているとは限らない。そこで、0 以外から始まる波を考え、$f(\theta) = a\cos\theta$ を挙げた。この式も sin の場合と同様に、時間 t に関する式に変形できる。

＜4 時間目＞

目標：波が三角関数の和で表すことができるということを知る。

波を数式で表す前に、周期と振動数と角速度の関係を求めた。そして、3 時間目に変形した関数を考慮すると、a に各波の振幅が代入でき、かつ ω には各波の角速度を代入することができることがわかる。また、波は単純な波と単純な波をたし合わせてできると考えることができることから、

$$f(t) = a_1 \sin \omega_1 t + a_2 \sin \omega_2 t + a_3 \sin \omega_3 t + \cdots + a_n \sin \omega_n t$$

という式を得た。また複雑な波について簡単な例を挙げた(図 14)。振動数が基本振動数の整数倍となっており、角速度も整数倍となることから、

$$f(t) = a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2\omega t + a_3 \sin 3\omega t$$

$$+ \cdot\cdot\cdot + a_n \sin n\omega t$$

という式を得た。cos についても同様にして、式を得ることができる。sin と cos の 2 式をたし合わせると

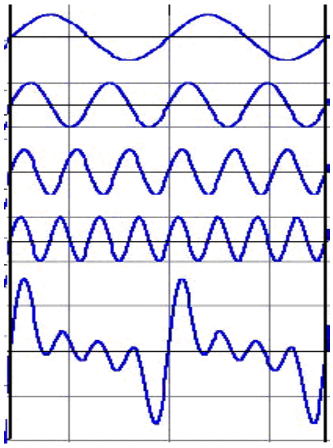


図 14　波の和

$$h(t) = a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t + b_2 \cos \omega t + a_3 \sin \omega_3 t + b_3 \cos \omega t$$

$$+ \cdot\cdot\cdot + a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t$$

と式を得る。さらに、波が常に時間軸を振幅の中央としているわけではないので、波が軸から上のほうや下の方にある場合も考え、上の式に定数 a_0 を加えて、

$$h'(t) = a_0 + a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t + b_2 \cos \omega t + a_3 \sin \omega_3 t + b_3 \cos \omega t + \cdot\cdot\cdot$$

$$+ a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t$$

が得られ、これにより、「複雑な波から単純な波への分解」や「単純な波から複雑な波への形成」を数式で表すことが可能となった。

＜5 時間目＞

目標：実際に三角関数のグラフと弦を弾いた音を見比べ、音の波形が三角関数の和で表されていることを確認する。

まず、Grapes を用いて $y = \sin\theta$ のグラフを作図してもらった(図 15)。そして $y = \sin\theta$ を基本音の波の数式としたき純正五度はどのような式になり、さらに 2 式の和はどのようになるか、それぞれのグラフも作図してもらった(図 16)。

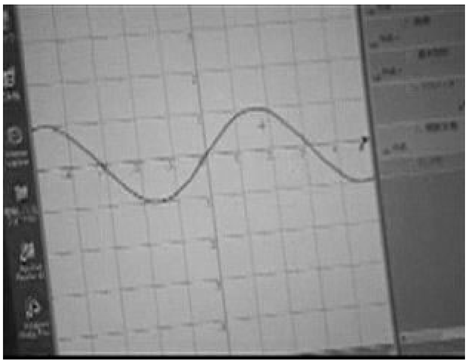


図 15　$y = \sin\theta$ のグラフ

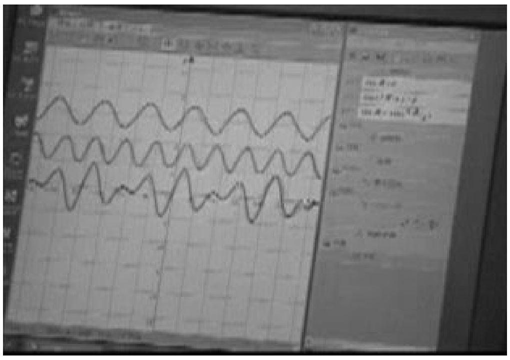


図 16　$y = \sin\theta$、$y = \sin\frac{2}{3}\theta$、2 式の和のグラフ

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.69-82、2004年3月

次に、自然の波としてドとソの和音を三弦琴を用いて弾き、その和音を Wave Paseri で取り込み(図 17)、波形を見た。基本音の音をとり、純正五度の音の波をとり、基本音と純正五度の和音の波をとるという順で行い、Grapes のグラフと見比べた。そして、見比べたときの波の様子を記述してもらったところ、Grapes の和のグラフと Wave Paseri の和音の波形が「似ている」という意見があった。

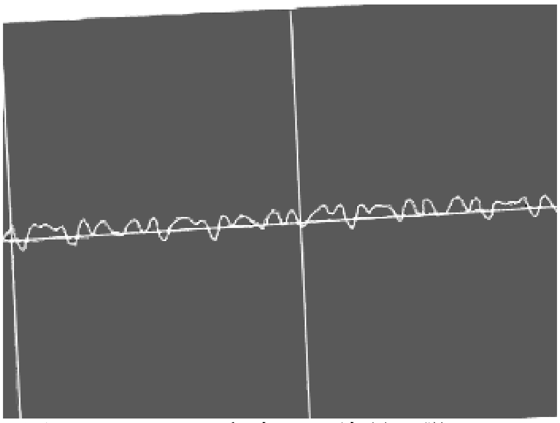


図17　ドとソの和音を三弦琴で弾いたときの波形（Wave Paseri）

6．考察

(1) 課題 1 に対する考察

課題 1：生徒自身の手で作図を行い、道具を用いることで、数学に対する新しい考え方が見出されるか。

授業に対する生徒の感想は以下のようである。

＜事後アンケートより＞
①「ピタゴラス音律があるというのは、知っていたけれど、それの体系は初めて知りました。自分たちで作っていくことで、印象に残ってよかったです。」
②「自分たちでもちゃんと計算していけば作れるんだあ！というのに驚きました。」
③「毎回新しいことを知ることができて、とても楽しい授業でした。」
④「ピタゴラスと音楽に何か関係がある、ということを知っていたのですが、こんなに深く関わっていたとは思いもしませんでした。」
⑤「いつも何気なく聞いている音にも、私たちが習っている数学が関わっているということが分かったから楽しかった。」

上記のことから、音楽と数学のつながりを普段はあまり考えないためか、生徒自身の手で作図を行い、道具を用いることで、数学に対する新しい考え方見出されたことが分かる。また、アンケートに「今回のような授業は今まで受けたことがなかったのですが、このような授業が普通にあってほしいなあ、と思いました」という生徒の感想があり、道具を用いることによって、生徒自身が自ら活動し、考える機会があるので、それによって授業の印象が残りやすいと考えられる。

(2) 課題 2 に対する考察

課題 2：他の教科および歴史の追体験を通して、数学に対する興味・関心を持つことができるか。

＜事後アンケートより＞
⑥「色々な数学があってアプローチの方法も様々でそこに面白味を感じた。」
⑦「フーリエ級数について知りたい。」

上記以外に、授業では時間により触れることができなかった Vivaldi の『四季、春』

についての考察をやりたかったという感想もあった。さらに身の回りにあるものから数学的性質を見つけようと思うかどうかについてのアンケートでは、「どちらでもない」から「賛成」へと変化が見られた。これらのことから、音楽および歴史の追体験を通すことにより、様々な角度からみた数学を知ることができ、数学に対する興味・関心を持つことができたと考えられる。

(3) 課題 3 に対する考察

課題 3：三角関数を身近に感じることができるか。

＜授業の感想より＞

○ Grapes の三角関数のグラフと Wave Paseri の和音の波形とを見比べてどうでしたか？

⑧「似ていた」、「とてもよく似ていました」

＜アンケートより＞

○ 授業前と授業後で数学に対する気持ちは変わりましたか？

⑨ 前から（数学は）好きだったが、数学を身近に感じるようになった。」

○ 三角関数を身近に感じますか？

	＜事前＞	＜事後＞
大賛成・・・・・・・・・	0 名	2 名
賛成・・・・・・・・・・	3 名	1 名
どちらでもない・・・・	2 名	1 名
反対・・・・・・・・・・	1 名	0 名
大反対・・・・・・・・・	0 名	0 名
無回答・・・・・・・・・	0 名	2 名

上記は、音楽を通すと数学が身近に感じるようになったかのアンケートを行った結果であるが、反対であった 1 名の生徒は賛成に、どちらでもないとしていた生徒のうちの 1 名は大賛成に、賛成としていた生徒のうちの 1 名も大賛成へと大きな変化が見られた。このことから、ピタゴラス音律の音階の作図を行ったり、Grapes や wave paseri を用いて音の波の様子を観察することによって、「似ていた」という印象が残り、数学を身近に感じやすくなったと考えられる。また、他の教科との関係を学ぶことは大切か、というアンケートをも行ったところ、「どちらでもない」から「賛成」へと変化が見られた。

今回の授業研究では、歴史的道具であるモノコードの他に鉄琴、ギター、Grapes、wave paseri を用いたわけだが、課題 1 から課題 3 を通して、道具を生徒が用い、追体験を取り入れた授業を行うことにより、音楽と数学とのつながりを知ることができ、数学観の変容が見られたといえる。また、三角関数が身近に感じることができたということに関しては、教科書の公式を学ぶときより印象に残ったと考えられる。

7．おわりに

本研究では、歴史の中で実際に用いられていた道具を教材とし、さらに他教科とのつながりを取り入れた授業を行うことにより、生徒の数学への興味・関心を高め、三角関数を身近

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.69-82、2004年3月

に感じることができるかを考察した。

その結果、ピタゴラス音律の音階や音(和音)に注目し、モノコードを用いた当時の利用方法の追体験や音を視覚的に捉えやすくするために波として三角関数で表し、さらに Grapes や wave paseri を用いて弦の波、三角関数のグラフを比較することによって、いつも何気なく聞いている音にも習っている数学が関わっていることが分かり、数学を身近に感じるようになったことがアンケートからも確認された。また、授業において波を三角関数で表す際に、フーリエ級数に関する内容となったとき「難しく感じた」という生徒がほとんどであったので、波以降の部分に多く時間をかける必要があったと感じた。

以上のことから、内容にあわせた時間配分を考えた授業を行うことを目標としていく。また、本研究では Boethius のピタゴラスに関する原典『De institutione musica（Friedlein 訳）』の原典解釈をすることができなかったので、原典を用いた授業実践とその教材化を行うことが今後の課題である。

謝辞

研究授業の実施に際して、筑波大学付属高等学校の川崎宣昭先生には、多大なるご協力とご指導をいただきました。ここに厚く御礼申し上げます。

注

本研究は、平成 15 年度科学研究費、特定領域研究(2)課題番号 15020214「数学用機械と JAVA による移動・変換と関数・微積ハンズオン教材の WEB 化研究」（研究代表者礒田正美）において開発された歴史的道具を前提にして、平成 15 年度科学研究費、基盤研究(B)(2)課題番号 14380055「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」（研究代表者礒田正美）の一環として行われた。

[1] 文部省(1999). *高等学校学習指導要領解説　数学編*. 東京：実数出版

[2] 礒田正美(2001). 異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒による一考察ー隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めてー. *筑波数学教育研究*, 20, pp.39-48

[3] 佐藤暁子(2002). 数学史からみた音階形成史の教材開発ー他教科との関連からの数学の文化的視野の覚醒ー. 筑波大学数学教育学研究室, *中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)*, pp.226-237

[4] Michel Rodriguez(2000). Historical support for particular subjects. John Fauvel and Jan van Maanen (eds.). *History in Mathematics Education*, pp.241-290. Kluwer Academic Publishers.

[5] 藤枝守(1998). *響きの考古学*. 音楽之友社

上記以外で授業に際して参考にした文献

[6] Boethius(1966). *Boetii, De institutione arithmetica, De institutione musica*（Friedlein 訳）. Yale University Press

[7] アルパットサボー(1978). *ギリシア数学の始原*（中村幸四郎　中村清　村田全訳）. 玉川大学出版部

[8] T.L.ヒース(1978). *復刻版　ギリシア数学史*（平田寛　大沼正則　菊池俊彦訳）. 共立出版

[9] 中村幸四郎他(1981). *ユークリッド原論*. 第 6 巻，9，pp.125-126．共立出版
[10] F.V.ハント(1984). *音の科学文化史：ピュタゴラスからニュートンまで*（平松幸三訳）．海青社
[11] J･フィリップ他(1988). *天の音楽・地の音楽*（鈴木晶　村上陽一郎　塚本明子訳）．平凡社
[12] 安藤由典(1996). *楽器の音響学*. 音楽之友社
[13] 大蔵康義(1999). *音と音楽の基礎知識*. 国書刊行会
[14] トランスナショナル カレッジ オブ レックス編(2000). *フーリエの冒険*. 東京：言語交流研究所　ヒッポファミリークラブ
[15] ルネ･デカルト(2001). 音楽提要（平松希伊子訳）．*デカルト著作集*，pp.453-575．東京：白水社

参考 CD
[16] Vivaldi. *Le quattro stagioni*. Academy of st. Martin-in-the-fields