道具に見る数学と文化（第24回）

音楽が数学だった時代

礒田正美・岩崎　浩

デカルト「音楽提要」(1618)

音楽の目的は快くすること，そしてわれわれのうちにさまざまな情念を起こすことである。―中略―1．あらゆる感覚は，なんらかの快を受けることができる。2．この快のためには，対象と当該感覚のあいだに，釣合いが必要である。―中略―3．対象は，たいした困難もなく，またたいして混乱せずに感覚に到来するようなものでなければならない。したがって，たとえばアストロラーベ（写真：パリ国立技術博物館）のマーテルのようなひどく複雑な図形は，たとえそれが規則的であろうとも，同じアストロラーベの中の網が通常そうであるような，もっと均等な線から構成される他の図形ほど視覚を楽しませないだろう。―中略―5．対象全体の諸部分は，それら相互のあいだにある比（の値）が大きいほど，相互の相違が小さいとわれわれは言う。6．この比は算術的であるべきであり，幾何学的であってはならない。その理由は，―後略（以後，比を伴う音階理論が続く）。（平松希伊子訳：白水社）

これが17世紀の音楽理論である。連載第８回では，15－16世紀の画家たちが生み出した透視図法理論・絵画理論は幾何学的理論として構成されていたこと，その幾何学化の契機（方法）には，窓越しに風景を写し取る道具（後のカメラオブスキュラ：暗箱，今日のカメラ）が存在したことを指摘した。我々数学教師さえ利用する一点透視図法というような呼

称は，実は数学理論を堕胎した上で残った美術科の構図理論であることを指摘した。音楽もまた同様である。今回は今日の音楽以前の音楽理論を取り上げる。

1．音律理論としての音楽

音楽と聞けば楽譜を連想するのは，数学教師以外が数学と聞いて代数計算を連想するようなものであろうか。代数も，楽譜も近代に定式化された思考の表現様式である。古代ギリシャでは数学は砂場で図形をかいて行われ，太古より音楽は弦を爪弾き，太鼓をたたき，歌を歌って行われた。そして，古代ギリシャ以来，そしてデカルトの時代にも，音楽理論といえば，音階を構成する比の理論であった。音楽を楽しむ前提には楽器があり，楽器を作るには音階が必要であり，音階を作ろうとすれば弦長の理論としての比の理論が必要になるからである。

周知のように，一定の強度で張った弦を強く弾けば音は大きくなり，そっと弾けば小さくなる。出る音の高さ（振動数）は同じである：それ自体，不思議。そして，弦長を短くすれば音は高くなり，長くすれば低くなる。１オクターブうえの音とは振動数で２倍の高さの音であり，２倍の高さを得るには，所与の弦長を１/２倍すればよい。２オクターブうえの弦長は，さらに１/２倍して $(1/2)^2=1/4$ となる：２オクターブうえとは音の高さ（振動数）では４倍である（→指数関数）。

オクターブだけでは楽器は得られない。弦長１と弦長１/２の間を適切に分割して音階を作ればこそ妥当な楽器になる。どのような分割が適切であるのか。今日の洋楽ではピアノの鍵盤が12階あるように，８音階は12階からなる（図１）。今日の洋楽の基盤となる12平均律は，鍵盤をどこから弾き

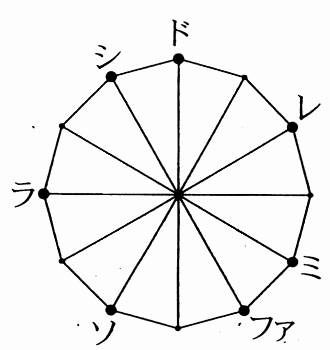


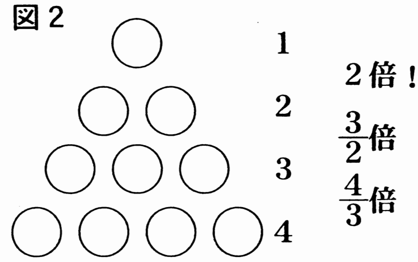
図１　音階名は今日流

始めても，図1の飛ばし方で引けば転調したドレミファソ…が弾けるし，異なる楽器間での合奏もできる。ギターで，カポタストを付けて，それまでと同じ場所を同じように弾けば，転調はするが演奏内容が変わらない。それも12平均律がそのような意味で適切な分割(音律)であるからである。しかし，最初から今日の平均律があったわけではなく，民族や楽器に応じた，そして時代に応じた音律が作られた(＝音楽)。ここでは，その適切な分割法としてピタゴラス音律と12平均律を示す。

2．ピタゴラス音律とモノコード（一弦琴）

連載20回では，ピタゴラス学派の図形数を話題にした。そこでは，今日の数列に相当する考えが，幾何的に表現された。ピタゴラス音律は完全三角形で構成される(図2)。最初の音を1として，ド$_1$をとる。次に2としてオクターブうえ，弦長で1/2倍のド$_2$をとる(→1/2の逆数で振動数は2倍！)。3として，ド$_1$とド$_2$の間に弦長2/3倍，音階名でソをとる（→2/3の逆数で3/2倍，すなわち振動数で1.5倍，1と2の真ん中：図3，①)。オクターブの中間にあたるこのソは純正5度と呼ばれる。4として，音階名でファは弦長3/4

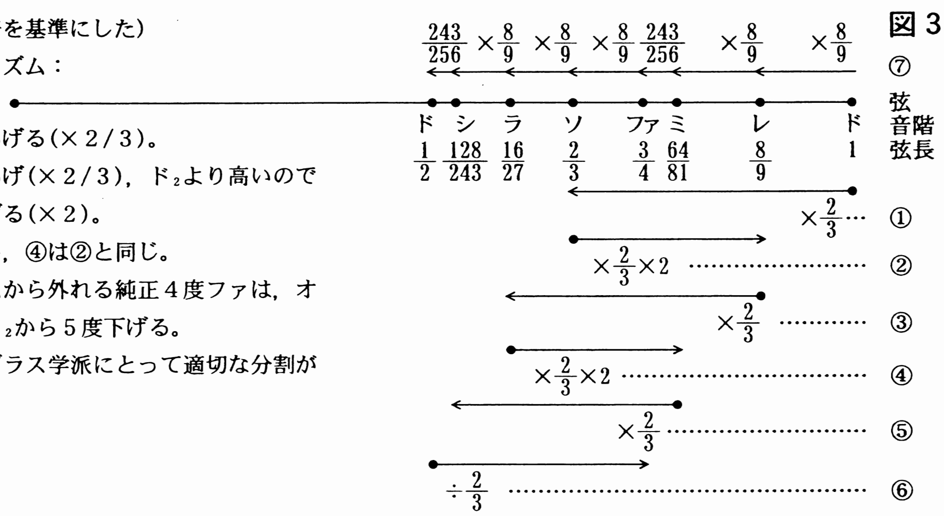
図2



完全三角形　10は健康原理

純正5度(3/2倍を基準にした)
音階構成アルゴリズム：

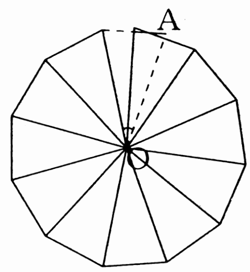
① ドから5度あげる(×2/3)。
② ソから5度あげ(×2/3)，ド$_2$より高いのでオクターブ下げる(×2)。
③，⑤は①と同じ，④は②と同じ。
⑥ アルゴリズムから外れる純正4度ファは，オクターブ高いド$_2$から5度下げる。
その結果，ピタゴラス学派にとって適切な分割が得られた(⑦)。



倍であり，純正４度と呼ばれる（＝１/２÷２/３より，ド$_2$を５度下げたことに相当：図３，⑥)。

図３①～④に示したような５度あげる，弦長を２/３倍する操作をド$_1$からはじめて12回繰り返すと0.535…となり，弦長１/２のド$_2$にもどらない(図４)。すなわち，図１で一周した結果がドからドにもどらない。そこでド$_2$より５度下げる⑥がどうしても必要になる。結果としてピタゴラス音律では，⑦のように直後の音階へは，８/９倍，８/９倍，243/256倍というパターンが現れる。

図４



今日の音律12平均律では，半音を２回あげれば全音になるが，仮に243/256を半音とみて平方しても，８/９にはならない。

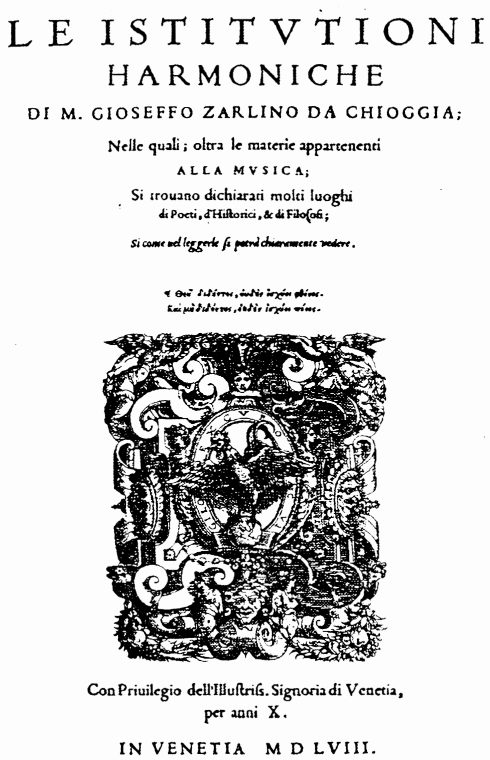
３．12平均律と量産ピアノ

さて，１と２の算術平均が３/２であり，等差であることから明らかなように，冒頭で引用した音楽提要の中(下線部)でデカルトが支持したのは，比の構成が単純なピタゴラス音律であり，支持しなかったのは，どこから弾き始めても同じドレミファを生む12平均律である。

どこから弾き始めてもドレミファが弾けるようにするには，図１で，半音上げる行為が常に等しくなるようにする，すなわち弦長では定数倍である。図１でド$_1$を12回定数倍繰り返して２倍の音の高さド$_2$になるのであるから，$X^{12}=2$の解が求める定数となる。その解$X=2^{\frac{1}{12}}$を得るために利用された器械が，連載23回で紹介した立方体の倍積問題$X^3=2$の解を与える器械メソラボス（幾何平均を再帰的に与える）である。16世紀イタリアのザルリーノは，メソラボス(図５)を拡張して図６のような直後の半音階へ常に弦長で$2^{\frac{1}{12}}$倍となる音律を構想した。

12平均律が公認され普及したのは，多楽器編成と量産ピアノによる和音が求められる19世紀である。定木とコンパスを超えた機械作図を認め，

対象に依存しない普遍数学を，代数を基盤に構想し，自ら設計した新メソラボス(高次方程式解答器)を主著「幾何学」に記した理性の人デカルトでさえ12平均律を支持しなかった。情念(音楽)と理性(数学)の不一致は，彼の時代の音楽がピタゴラス音律によっていたことの証だろう。



LE ISTITVTIONI
HARMONICHE
DI M. GIOSEFFO ZARLINO DA CHIOGGIA;
Nelle quali; oltra le materie appartenenti
ALLA MVSICA;
Si trouano dichiarati molti luoghi
di Poeti, d'Historici, & di Filosofi;
Si come nel leggerle si potrà chiaramente vedere.

Con Priuilegio dell'Illustriss. Signoria di Venetia,
per anni X.

IN VENETIA M D LVIII.

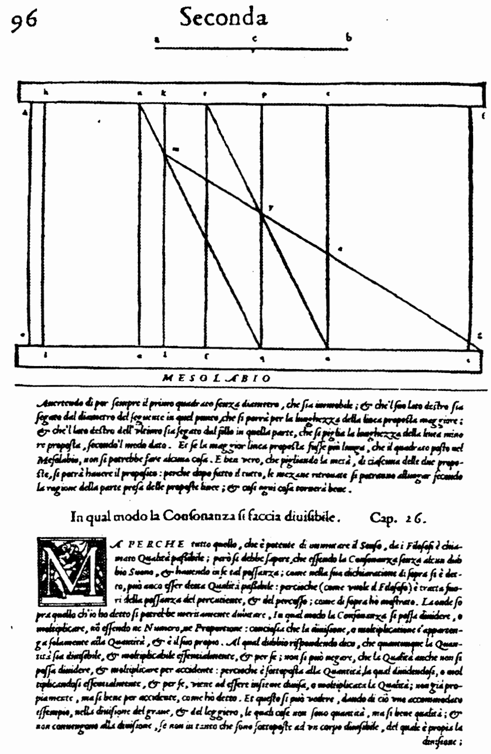


図５　ザルリーノ「ハーモニケ」1568

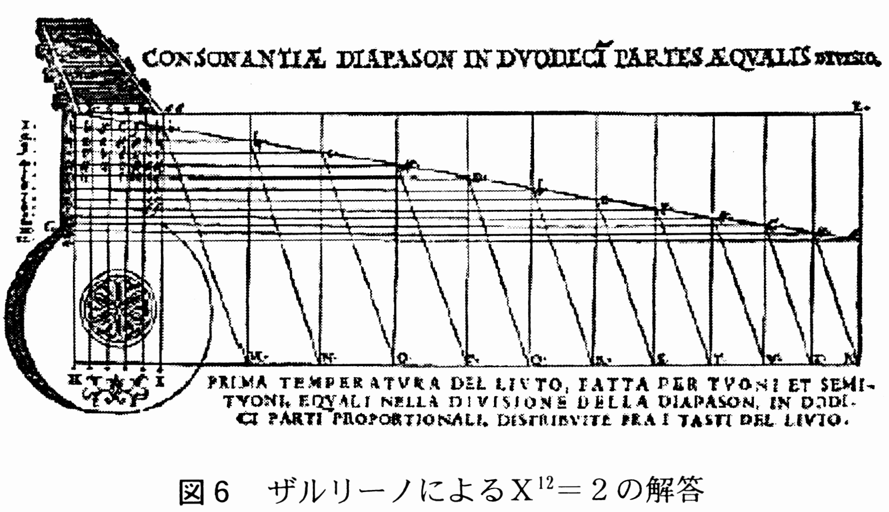


図６　ザルリーノによる$X^{12}=2$の解答

(筑波大学／上越教育大学)

教育科学 **数学教育**

もくじ

2005.5 (No.570)

特集／文字の有用性を感じさせる授業づくり

●文字の有用性を感じさせる指導事例●

●授業で使えるおもしろ話●

連載

●　次号予告・特集＝数学科における発展的な学習指導

―「ずれ」に始まる弁証法的対話―

Ⅰ　提言…礒田正美　Ⅱ　「ずれ」に始まる弁証法的対話授業の構想…笠一生
Ⅲ　弁証法的発展過程を生かした学習指導の実践例
・パズルの謎を探ろう…馬籠秀典
・比例の式のよさを知ろう…野田典彦
・直角をつくる方法を発見しよう…吉永政博
・正方形を作図しよう…高三潴武彦
・凹四角形の外角の和を探ろう…西田正典
・二等辺三角形の規定の仕方について考えよう…橋本吉史
・平均の速度を求めよう…池松靖仁
・新しい数の構造を探ろう　・「Pascal への書簡」の謎を探ろう…笠一生
その他，山口浩一，坂本正彦

表紙イラスト／小野孝一