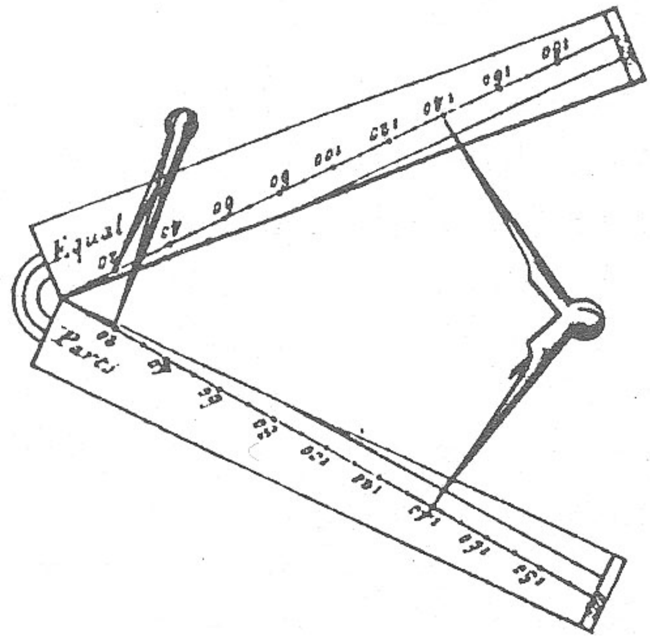
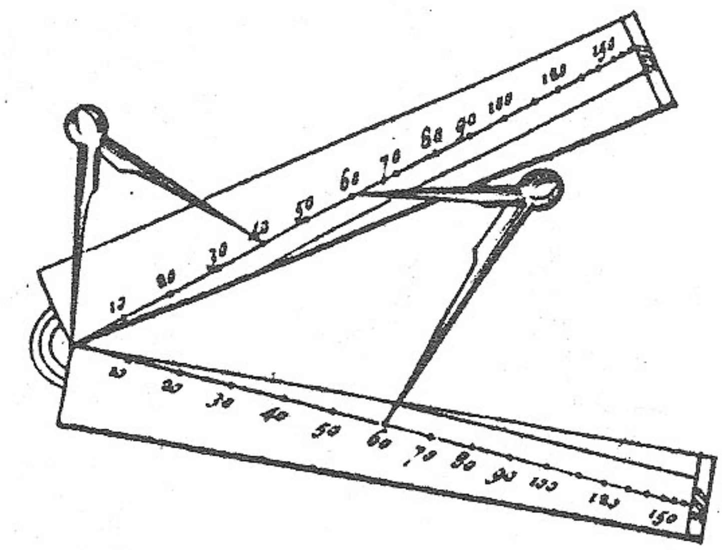
授業資料

ガリレオに挑戦！（２日目）





授業者：諏佐　洋一
（筑波大学大学院修士課程教育研究科１年）

２年　　組　　番
氏名

０．　昨日の内容

- ガリレオの「比例コンパス」は目盛りの取り方が工夫されていた。
- 測量に使うときには、目盛りが 100 $\tan\alpha$ として取られている四分円を用いることによって、簡単な計算で山の高さを測ることができた。

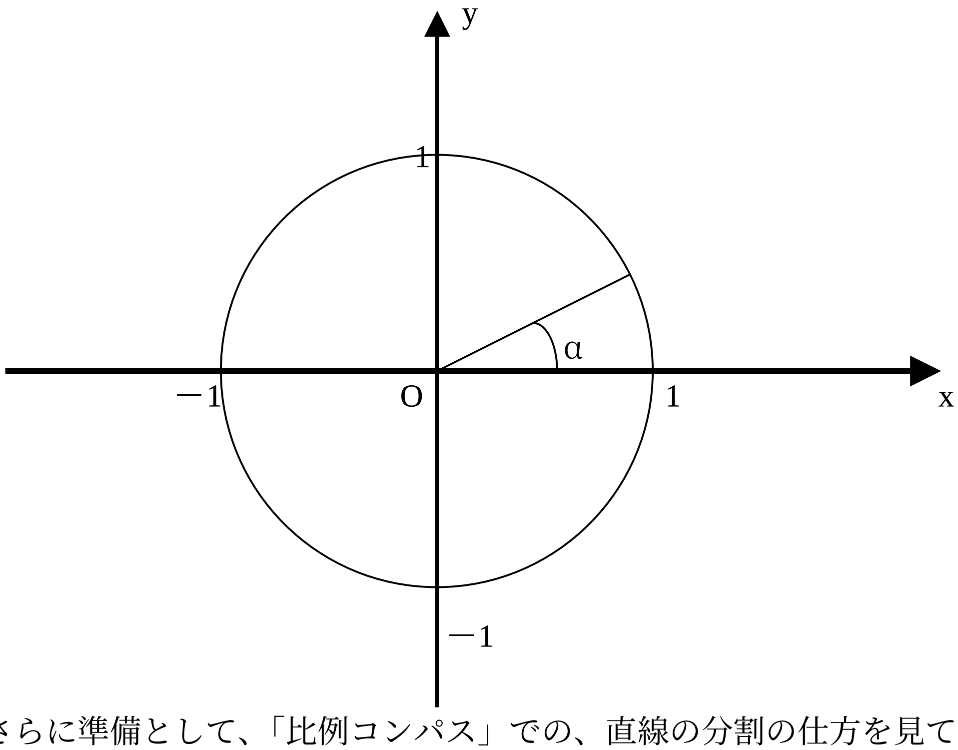
今日の目標

ガリレオの<u>「比例コンパス」</u>を使って、

自分たちで測量に使われる目盛りを作成してみよう

１．四分円の目盛りを作ろう

単位円において考えるとき、$\tan\alpha$（$0° \leq \alpha \leq 90°$）は図でどのように表せただろうか？



さらに準備として、「比例コンパス」での、直線の分割の仕方を見てみよう！

２．　直線の分割

ガリレオの「比例コンパス」の説明書には、はじめに直線の分割の仕方が書かれている。

DIVISION OF A LINE

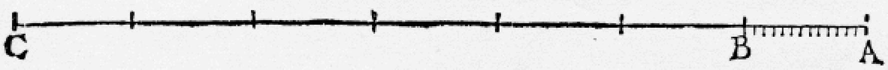
FIRST OPERATION

Coming to the detailed explanation of the operations of this new Geometric and Military Compass, we shall begin first with the face on which there are marked four pairs of lines with their divisions and scales; among those we shall first speak of the innermost, called the Arithmetic Lines from their division in arithmetical progression; that is, by equal additions which proceed out to the number 250. We shall gather various uses for these Lines; and first:

（中略）

When the given line is of medium size, so that it does not exceed the opening of the Instrument, we take its whole length with an ordinary compass[4] and apply this distance crosswise, opening the Instrument, to some number [and its counterpart on the other arm] on these Arithmetic Lines such that above it, on these same Lines, there is a smaller number contained by the selected number as many times as there are parts into which the given line is to be divided. Then the crosswise distance taken between the points bearing this smaller number will doubtless divide the given line into the required parts.

（中略）



Now, when the given line is very short and it is to be divided into many parts, as for example the line AB below which is to be divided into 13 parts, we may proceed by [adapting] this second rule.

Let the line AB be extended faintly out to C, and let there be marked along this [extension BC] some other lines, as many as you please, each equal to AB; in the present example let there be six of them, so that AC is six times greater than AB.[5] It is evident that of the parts of which AB contains 13, all AC will contain 91, wherefore taking all AC with a compass we shall apply this crosswise, opening the Instrument, to points 91–91. Next, narrowing the compass a bit to [fit across] points 90–90, we carry that distance from point C in the direction of A. Marking the point near A, this will give us the 91st part of all CA, which is the 13th part of BA. Then, narrowing the compass bit by bit to 89, 88, 87, etc., we transfer those distances from C towards A, finding and marking the other little parts of the given line AB.

＜和訳＞

直線の分割

操作１

この新たな幾何学的で軍事的なコンパスの使用の詳しい説明をするのに、最初に分割と目盛りがともなった 4 つの直線の組がマークされている面で考える。最初にこれらの直線のうち、一番内側のものについて話をする。それらは等差数列になるように分割されている、つまり 250 まで等しい増加量で進むということから、算術線と言われる。

（中略）

与えられた線が中間の大きさで、器具の開く範囲を超えないとき、普通のコンパスでその全体の長さをとり、器具を開いて、算術線上のある数[と反対側の腕に対応する]にこの距離を横に対応させる。そして、与えられた線の分割される部分の数と同じ倍数の選ばれた数を割り切る、より小さな数がある。この小さい数を結ぶ点の間でとられた距離が間違いなく与えられた直線を、必要とする部分に分割するだろう。

（中略）

今、与えられた線分がとても短いとき、そして例えば線分 AB を 13 個の部分に分割するような多くの部分に分けるとき、2 つ目のルールで続行する。

線分 AB を直線に沿って C まで伸ばし、それぞれの部分が AB と等しくなるようにマークする；今それらの 6 個分、即ち AC は AB より 6 倍分長いとする（AC は AB の 7 倍）。AB は 13 個の部分を含んでいるのは明らかで、全 AC は 91 個の部分を含んでいる。それゆえ、コンパスで全 AC をとって、器具を開き、91 - 91 の点で横に対応させる。次に、90 - 90 の点に対して少しコンパスを閉めて、C から A の方に距離を動かす。A の近くの点でマークされ，これが全 CA の 91 番目、即ち BA の 13 個目の部分である。そして、89、88、87…とコンパスを少し閉じ、我々は与えられた直線 AB の小さな部分を見つけ、マークしながら、C から A の方向への距離を移していく。

※ compass（目盛りのないコンパス）と Instrument（比例コンパス）の違いに注意する。

この直線の分割を使って、四分円の目盛りを描いてみよう！

(ワークシート)

３．　算術線のその他の使い方

①　三数法

THE RULE-OF-THREE SOLVED BY MEANS OF A Compass and these same Arithmetic Lines.

Operation IV.

The present Lines are used not only for resolution of various linear problems, but also for some arithmetical rules, among which we place this one corresponding to what Euclid teaches us: Given three numbers, to find the fourth proportional. This is the Golden Rule, called rule-of-three by practitioners who find the fourth number proportional to the three given. To demonstrate the whole thing by an example, we say for clearer understanding:

If 80 gives us 120, what will 100 give us? Here you have three numbers given in this order: 80 120 100. To find the fourth number which is sought, take lengthwise on the Instrument the second of the given numbers, which is 120, and apply this crosswise to the first, which is 80; then take crosswise the third number, which is 100, and measure that lengthwise along the scale. What you will find—that is, 150—will be the fourth number sought. Notice that the

②　換金

RULE FOR MONETARY EXCHANGE.

Operation VI.

By means of these same Arithmetic Lines we can change every kind of currency into any other, in a very easy and speedy way. This is done by first setting the Instrument, taking lengthwise the price in the money we want to exchange, and fitting this crosswise to the price in the money into which exchange is to be made. We shall illustrate this by an example so that every-

①　三数法　<和訳>

コンパスと算術線によって解かれる三数法
操作４

　今の直線は、いろいろな直線の問題を解くためだけでなく、これをユークリッドが我々に教えていることに相当するものとする算術的規則のために使われる；3 つの数が与えられたとき、4 つ目の比例項を見つけること。これは黄金律であり、与えられた 3 つの数に対して、4 つ目の比例項を見つけることを行う人には三数法と呼ばれた。例によって実証するのに、はっきり理解できる例を述べる：

　80 が 120 を与えるとすると、100 はいくつ与えるだろうか。ここで、80、120、100 がこの順で 3 つの数が与えられている。求める 4 番目の数を見つけるために、２番目の与えられた数（120）を器具上で縦にとり、これを最初（80）に対して横に対応させる。そして、３番目の数（100）を横にとり、目盛りにそって縦の長さを測る。あなたが見つけたもの（150）が求める 4 番目の数である。

②　換金　<和訳>

換金のルール
操作６

　これらの等差的直線によって、簡単でスピーディーな方法でどんな種類の通貨も他の通貨に換えることができる。これは最初に交換したいお金での価格を縦にとって、これを交換で作られるお金での価格を横に合わせて、器具をセットすることによってなされる。

問題　比例コンパスを用いて、換金をしてみよう。

　17 世紀のころ、ヴェネツィアではお金の単位として ducat が使われ、フィレンツェでは scudo（複数形 scudi）が使われていた。また、イタリア全土で一般に広く流通していた銀貨は sold（複数形 soldi）で、1ducat=160soldi、1scudo=124soldi である。このとき、186 ducats は何 scudo に換金できるか？

答　＿＿＿＿＿＿＿ scudo

４． 幾何学線

OF THE GEOMETRIC LINES

WHICH FOLLOW NEXT, AND THE USES thereof. And first how by means of these we can increase or decrease in any ratio all areas of figures.

Operation VIII.

The lines that next follow the Arithmetic (explained above) are called the Geometric Lines from their being divided in geometrical progression out to 50. From these we gather various uses; and first, they serve us for finding the side of a plane figure that has a given ratio to another [similar] that is given. For

（中略）

HOW WITH THE SAME LINES WE CAN FIND THE ratio of two similar plane figures.

Operation IX.

Let there be given, for example, two squares, A and B, or indeed any two other figures of which those two lines A and B designate homologous sides. We want to find what ratio there is between the areas. Take line B with a compass and, opening the Instrument, fit this to any pair of points of the Geometric Lines, say to points 20–20. Then, not altering the Instrument, take line A with the compass and see what number this fits when applied to the Geometric lines; finding it to fit, say, at number 10, you may say that the ratio of the two areas is that which 20 has to 10; that is, double. And if the length

＜和訳＞

幾何学線とその使い方
操作８

（上で説明した）算術線の次にくる線は 50 までの幾何学的な数列※で分割されていることから**幾何学線**と言われる。

（中略）

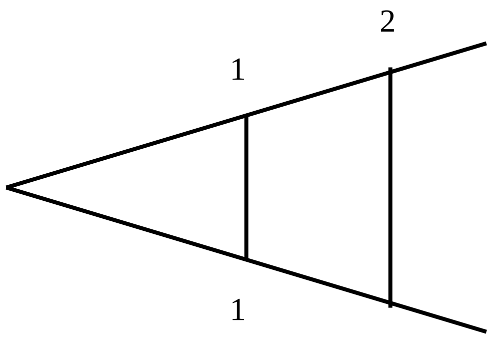
同じ直線（幾何学線）で我々はどのように 2 つの似た平面図形の比をみつけることができるか。

操作９

例えば、A、B の 2 つの正方形、もしくは実際、それらの 2 つの線分 A、B が相応する辺を示す 2 つの図形で与えられるとしよう。その面積の比がいくつであるか見つけたい。コンパスで線分 B をとり、器具を開いて、幾何学線の点の組（20 ‐ 20）で合わせる。そして、器具を動かさずに、コンパスで線分 A をとり、幾何学線に当てはまるときに対応する数がいくつかわかる；10 とわかったとき、2 つの面積の比は 10 に対して 20 を持つ；すなわち 2 倍であると言える。

※　geometrical progression は等比数列とも訳されるが、ここでは等比数列ではない

幾何学線によって、ある正方形の面積を与えられた比に分割する、正方形の 1 辺の長さを求めることができる



＜比例コンパス＞

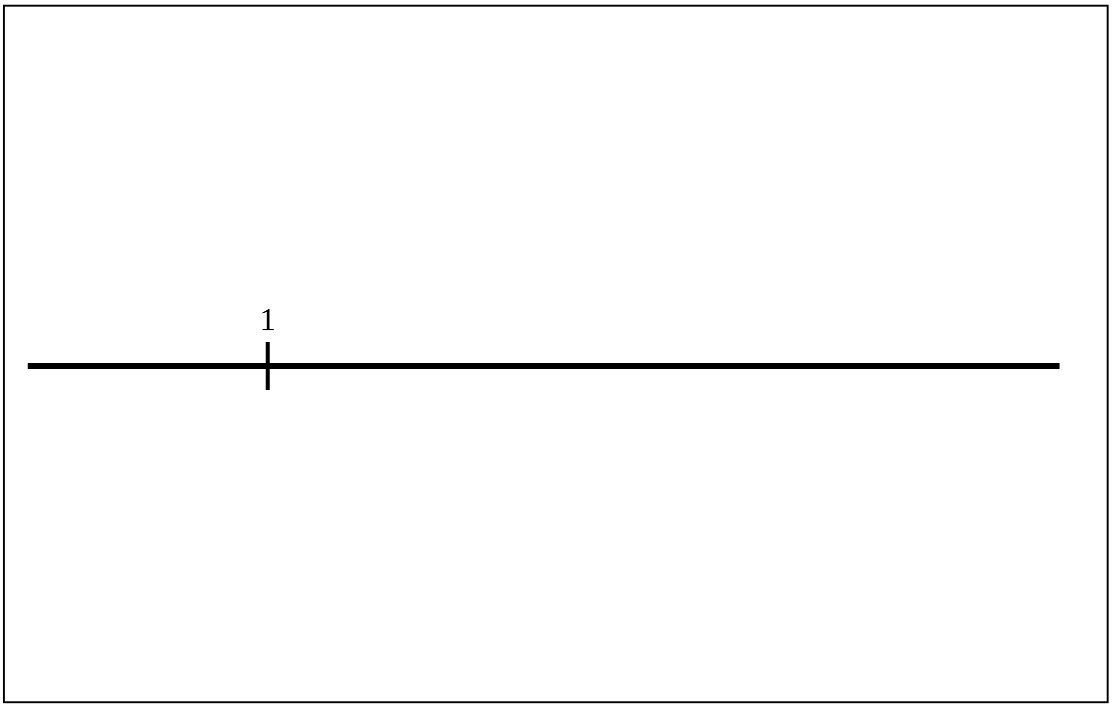
幾何学線はどのように目盛りが取られているのだろうか？

実際の目盛り n に対して、

の長さで取られている。

５．　幾何学線の作図

　目盛りがどう取られているのかわかったところで、四分円同様、どのように目盛りが作図されるか考えてみよう。



明日へ続く

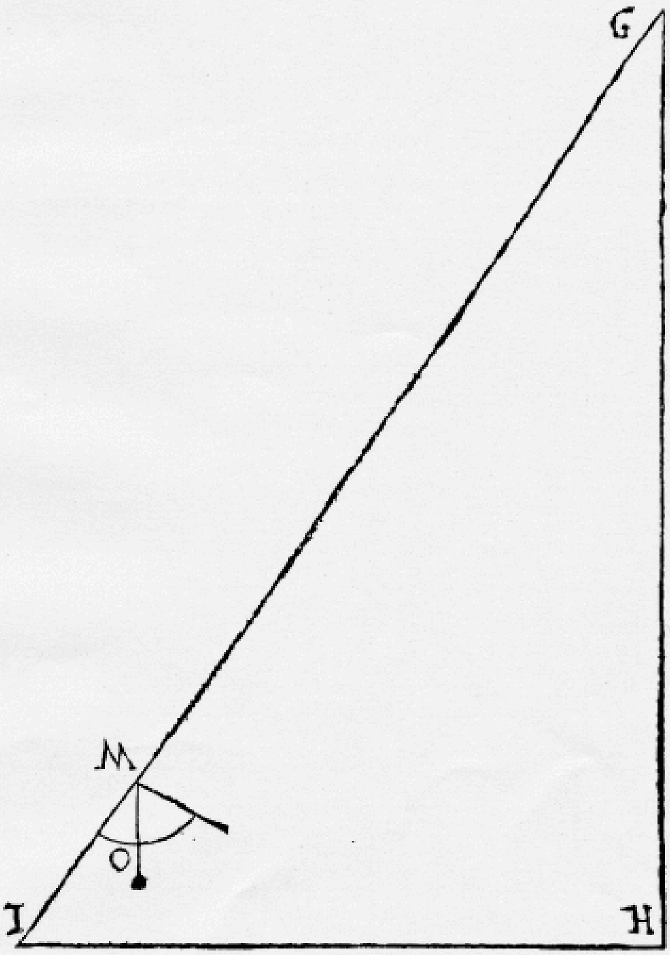
補足

(昨日の補足の解答)

仰角が 45° 以上のときの測量

目盛りを見るとわかるように、45°以上の目盛りは、単に tan α で取られているわけではない。よって、45°以上の時には違った計算法で求めなければならない。どうやって計算されているか見てみよう。

height AB. But if the thread cuts the other 100, as seen in the next diagram in which we want to measure the height GH, our eye being at I and the thread cutting points M and O, then take that number of graduations and divide it into 10,000; the result will be the number of units contained in height GH. For example if the thread cuts point 50 [in the arc near the eye], then divide 50 into 10,000 and get 200, and that many units [of which 100 equal IH] will be contained in height GH.



We have seen that sometimes the thread will cut the 100 away from the side along which we sight, and sometimes it will cut the 100 touching that side; either may happen in many of the ensuing operations. Therefore as a general rule it is always to be remembered that when the thread cuts the first 100, contiguous to the sighting side, one must divide 10,000 by the number cut by the thread, following in the rest of any operation whatever rule is written there; for in the ensuing examples we shall always assume that the thread cuts the second 100 [away from the eye].

＜和訳＞

しかし、次の図形で我々の目が I にあり、糸が点 M と O を通るときに、高さ GH を測りたいとするときに見られるように、糸が別の 100（45°以下での目盛りとは別の目盛り）で切断するならば、目盛りの数字をとり、その数で 10000 を割る；その結果が高さ GH に等しい単位の数になるだろう。例えば、もし、糸が（視点の近くの方での）50 で切断されたら、10000 を 50 で割って、200 を得る。そして、（100 に相当する IH の）単位の数が高さ GH に等しいだろう。

なぜこの計算で高さ GH が測れるのだろう？
これまで学んできた数学で考えてみよう。

∠IMO＝αとする。

$$GH = 100 \times \tan(90° - \alpha)$$

$$= 100 \times \frac{1}{\tan\alpha}$$

分母、分子にそれぞれ100をかけて

$$GH = \frac{10000}{100\tan\alpha}$$

だから、仰角が45度のときは、上の計算で高さが求められるのである。