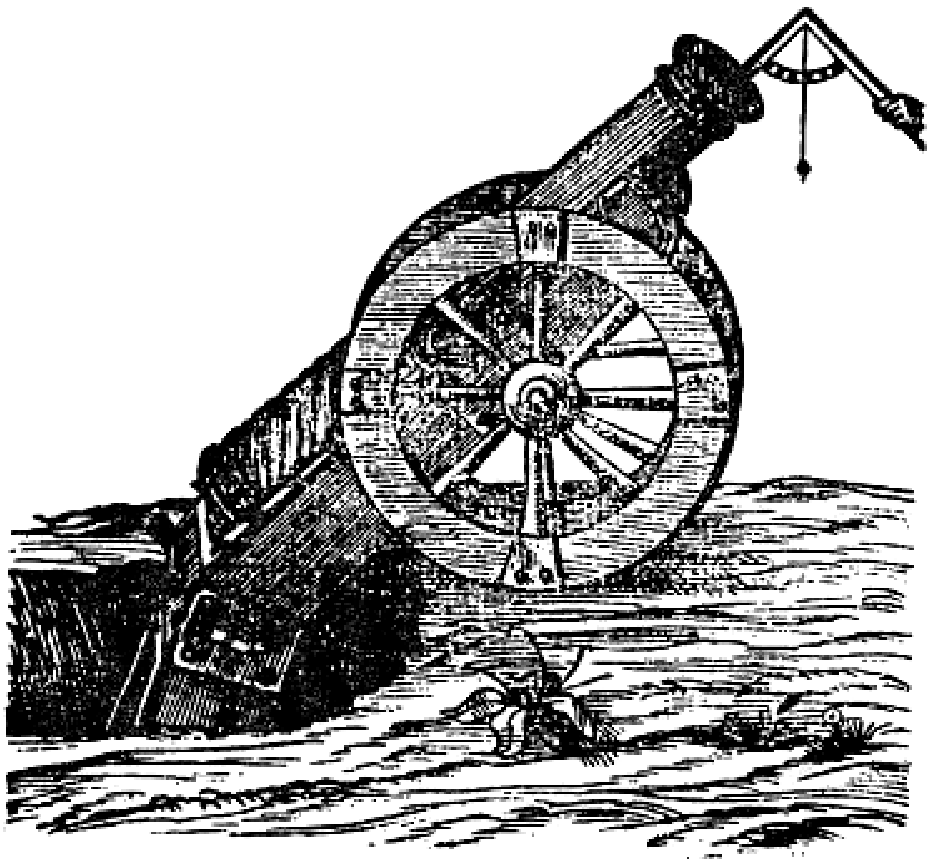
授業資料

ガリレオに挑戦！（３日目）



授業者：諏佐　洋一
（筑波大学大学院修士課程教育研究科１年）

２年　　組　　番
氏名

ガリレオの「比例コンパス」に描かれている　その他の目盛りを見てみよう

１．　幾何学線

１．１　幾何学線とは

OF THE GEOMETRIC LINES

WHICH FOLLOW NEXT, AND THE USES thereof. And first how by means of these we can increase or decrease in any ratio all areas of figures.

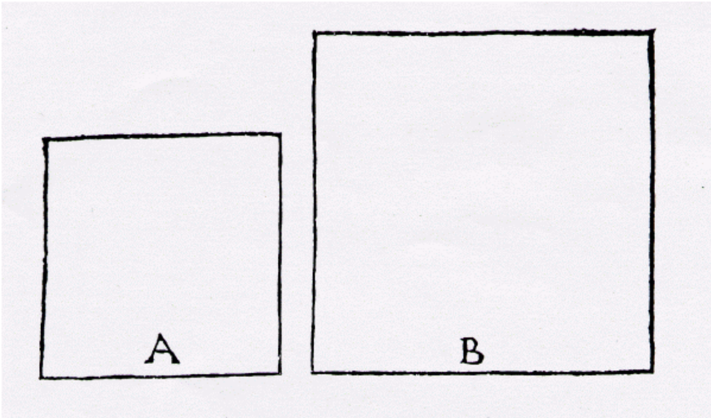
Operation VIII.

The lines that next follow the Arithmetic (explained above) are called the Geometric Lines from their being divided in geometrical progression out to 50. From these we gather various uses; and first, they serve us for finding the side of a plane figure that has a given ratio to another [similar] that is given. For

HOW WITH THE SAME LINES WE CAN FIND THE ratio of two similar plane figures.

Operation IX.

Let there be given, for example, two squares, A and B, or indeed any two other figures of which those two lines A and B designate homologous sides. We want to find what ratio there is between the areas. Take line B with a compass and, opening the Instrument, fit this to any pair of points of the Geometric Lines, say to points 20–20. Then, not altering the Instrument, take line A with the compass and see what number this fits when applied to the Geometric lines; finding it to fit, say, at number 10, you may say that the ratio of the two areas is that which 20 has to 10; that is, double. And if the length of this line does not fit exactly at any of the graduations, we must repeat the operation and, trying other points than 20–20, get both lines exactly fitted at some [marked] points, when consequently we shall know the ratio of the two given figures, that being always the same as that of the two numbers of the two points at which the said lines fit for the same opening of the Instrument. And given the area of one of two maps you will find the area of the other in this same way, as for example: The map with line B being 30 *campi*, how large is map A? Fit line B crosswise to points 30–30 and then see to what number line A fits crosswise; that many *campi* you shall say are contained in the map with line A.



幾何学線とその使い方
操作８

（上で説明した）算術線の次にくる線は 50 までの幾何学的な数列※で分割されていることから幾何学線と言われる。

（中略）

同じ直線（幾何学線）で我々はどのように 2 つの似た
平面図形の比をみつけることができるか。
操作９

例えば、A、B の 2 つの正方形、もしくは実際、それらの 2 つの線分 A、B が相応する辺を示す 2 つの図形で与えられるとしよう。その面積の比がいくつであるか見つけたい。コンパスで線分 B をとり、器具を開いて、幾何学線の点の組（20‐20）で合わせる。そして、器具を動かさずに、コンパスで線分 A をとり、幾何学線に当てはまるときに対応する数がいくつかわかる；10 とわかったとき、2 つの面積の比は 10 に対して 20 を持つ；すなわち 2 倍であると言える。さらに、この線分がどの目盛りにも正確に合わないときは、20‐20 でないところで操作を繰り返さなければならなく、両方の線分も同じ（マークの）点で正確に合わせなければならない。　　　　（後略）

この幾何学線の目盛りはどのようにとられているのだろうか？

※　geometrical progression は等比数列とも訳されるが、ここでは等比数列ではない

１．２　幾何学線を使ってみよう（平方根の開方）

●平方根の開平

SQUARE ROOT EXTRACTION WITH THE HELP of these same lines.

Operation XII.

In the present chapter three different ways of proceeding in the extraction of square root will be explained: one for numbers of medium size, one for large numbers, and the third for small numbers, meaning by "numbers of medium size" those in the region of 5,000, by "large" those around 50,000, and by "small" those around 100. We shall begin with medium-sized numbers first.

To find and extract the square root of a given medium number, then, the Instrument must first be set. This is done by fitting crosswise to 16–16 on the Geometric Lines, the distance of 40 graduations taken lengthwise along the Arithmetic Lines. Then take away from the given number its last two digits, which denote the units and tens, the number thus left being taken crosswise on the Geometric Lines and measured lengthwise along the Arithmetic; what is found will be the square root of the given number. For example, you wish to find the square root of 4,630. Take away the last two digits (the 30) and 46 remains; therefore take 46 crosswise on the Geometric Lines and measure this lengthwise along the Arithmetic. There you will find it to contain 68 graduations, which is the approximate square root sought.

Two things are, however, to be noted in using this rule. The first is that when the last pair of digits (taken away) exceeds 50, you should add a unit to the number that remains. Thus if, for instance, you want to take the root of 4,192, then since 92 exceeds 50 you should use 42 instead of the 41 that remained; for the rest, follow the above rule.

The other caution to be noted is that when what remains after removing the last two digits is itself greater than 50, then since the Geometric Lines do not go beyond 50 you must take the half, or some other [aliquot] part of the remaining number, and using this distance you must geometrically double or multiply the number [obtained] according to the part taken;[10] the final distance, thus multiplied, when measured lengthwise along the Arithmetic Lines, will give you the root you sought. For example we want the root of

同じ線（幾何学線）によって平方根の開方
操作１２

この章では、平方根の開方の手続きの３つの異なる方法が説明されている：数が中間の大きさのとき（約 5000）、大きいとき（5000 より大きい）、小さいとき（100 ぐらい）。中間の大きさから始める。

与えられた中間の数の平方根を開方するのに、器具は最初に固定されるべきである。これは幾何学線の 16－16 に、算術線に沿った長さでとった 40 の距離を合わせることによってなされる。そして、与えられた数からその最後の２つの数（1 の位と 10 の位）を取り去り、幾何学線上に残された数の横の長さをとり、算術線に沿って長さを測る；見つけたものが与えられた数の平方根であろう。

（中略）

しかし、このルールにおいて２つのことを注意する。１つは、（取り除かれる）最後の数が 50 を越えるとき、残された数字に 1 を加えなければならない。例えば、4192 の平方根を取りたいならば、92 は 50 を超えているから、残されたものは 41 の代わりに 42 を使うべきである；残りは上のルールに従う。

もう一つの注意は最後の２つの数を取り除いた後の残されたもの自身が 50 より大きいとき、幾何学線は 50 を越えないので、残された数の半分や、他の [約数]で取るべきであり、この距離を使って、幾何学的に 2 倍や、取った部分に対する数を幾何学的にかけなければならない※；算術線に沿って長さを測ったとき、かけられた最後の距離は求める平方根となるだろう。

問題　比例コンパスを使って、次の値を近似せよ

①　$\sqrt{4630}$

答＿＿＿＿＿＿＿

②　$\sqrt{3365}$

答＿＿＿＿＿＿＿

③　$\sqrt{8446}$

答＿＿＿＿＿＿＿

このほかに幾何学線を使って、軍隊の整列の問題、比例中項の問題（$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$; a , b は既知の x を求める）を解くことができる。

※　幾何学的 2 倍は $\sqrt{2}$ 倍することで、幾何学的に n 倍するというのは $\sqrt{n}$ 倍することである。

１．３　幾何学線のその他の使い方

幾何学線は、面積や平方根を求める際に使われるだけでなく、与えられた軍隊を縦横決まった比に並べるときの、1 列の人数を求めたり（等積変換)、比例中項を求めたり（$\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$; (a , b は既知) の x を求めること）するときに使われる。

２．　立体線

対応する数の立方根が目盛りとして取られている。
立体の体積比に関わる問題や、立方根を求める際に使用される。

３．　多角形線

半径が与えられている円に内接する正多角形の 1 辺の長さを求めることができる。円の半径と内接正六角形の 1 辺が同じであることを利用して、求める。

４．　金属線

金、鉛、銀、銅、鉄、すず、大理石、石の重量比が目盛りに取られている。重さが同じで、異種の金属球の直径を求める砲弾の問題に使われる。この線と、２の立体線を利用して、あらゆる内径の大砲とあらゆる物質の砲弾に対して、どれだけの量の火薬を充填すべきかという「充填量決定問題」を解決した。「軍事的コンパス」ガリレオはもともとはこれを解決するために比例コンパスを作った。

５．　方形線

平面図形の面積を変えずに、他の平面図形に変換する際に使用される。

６．　築城線

３の多角形線の逆で与えられた長さが 1 辺となるような正多角形に外接する円の半径を求める。

７．　スクアドラ

16 世紀の前半にイタリアの数学者タルタリア（Tartaglia）が発明している。（3 日目表紙参照)。これは「点」という単位で呼ばれる 12 個の部分に等分割さ

れた目盛りがあり、測量のときと同じように糸につり下げられた測鉛で仰角を測っていた。水平攻撃は「零点砲撃」と呼ばれ、仰角 45 ° の砲撃は「6 点砲撃」と呼ばれるようになった。

8．　まとめ

以上、見てきたようにガリレオの「比例コンパス」は、一つの器具で、計算や開平、測量などさまざまなことができる道具である。この理由は、目盛りの取り方に工夫があったからで、そこには数学的な要素がたくさん組み込まれている。この当時、いろいろなタイプの関数尺が発明されていたが、どれもガリレオのものには及ばなかった。