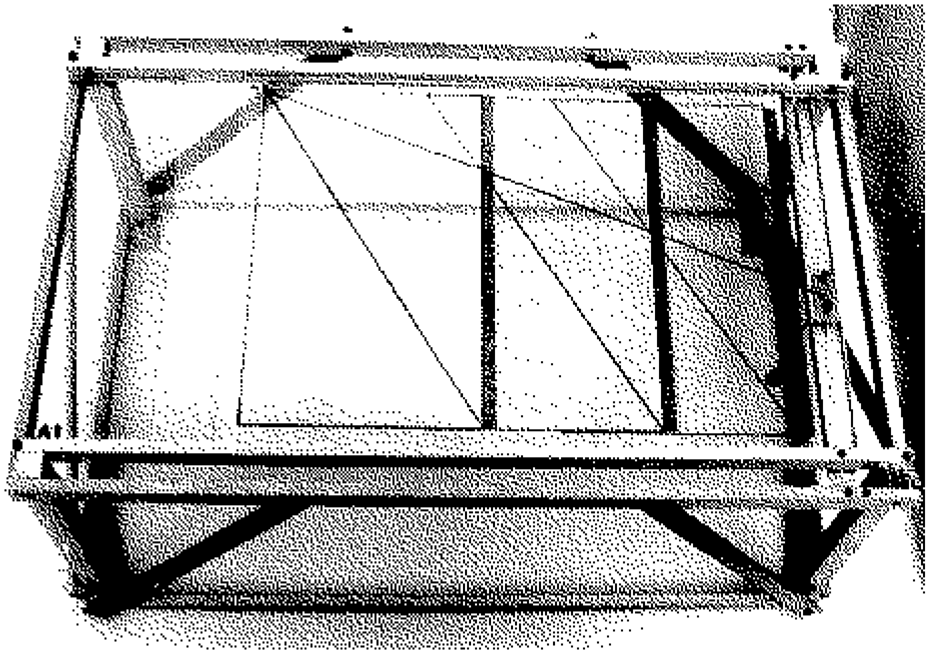
音階の中の数学

３時間目：比例中項を求めよう！！



氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

授業者：筑波大学修士課程１年　教育研究科数学教育コース

蓮沼秀昭

２時間目の復習

時代とともに音楽が多様化するにつれピュタゴラス音律では対応しきれなくなり、新しい音律として“ 平均律 ”が誕生した。

・平均率

オクターヴ間の１１の音階のそれぞれの弦の長さの比を、a〜k とすると、

2 : a =a : b = b : c= c : d = d : e = e : f = f : g

= g : h = h : l = l : j = j : k = k : 1

のようにとった音階である。

・比例中項

ある定数 a , b に対して

a：x ＝ x：b

における量 x のことである。

連続した比例中項

$$a : x = x : y = y : b$$

例）

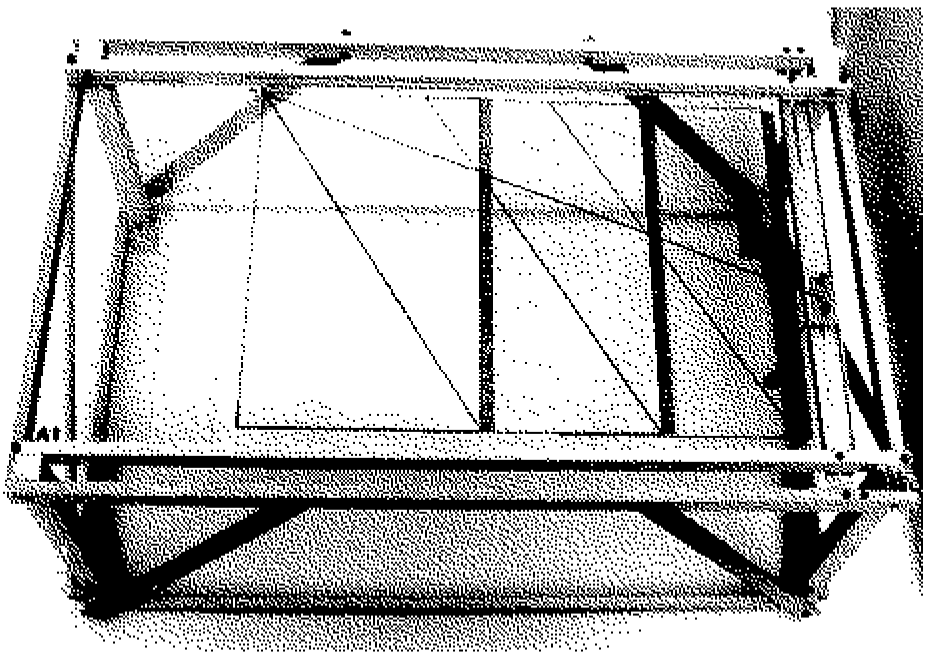
$$2 : x = x : y = y : 16$$

人物紹介（ツァルリーノ）

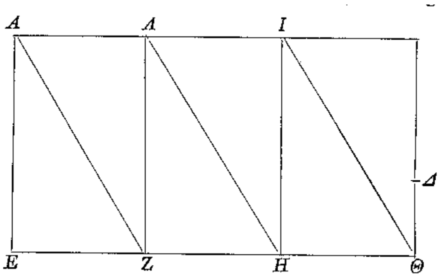
ツァルリーノ(1517～1590)は、メソラボン（mesolabio）という道具を用いて、平均律の音階を求めようとした。

メソラボン

メソラボンは、エラトステネスの考えた道具で、連続した比例中項を求めるために作られた。



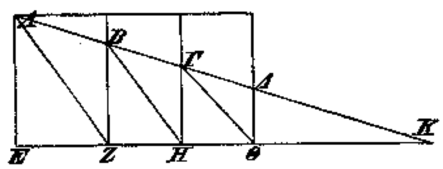
δεδόσθωσαν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, αἱ ΑΕ, ΔΘ, καὶ κείσθω ἐπί τινος εὐθείας τῆς ΕΘ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΕ, καὶ ἐπὶ τῆς ΕΘ τρία συνεστάτω παραλληλόγραμμα ἐφεξῆς τὰ ΑΖ, ΖΙ, ΙΘ, καὶ ἤχθωσαν διάμετροι ἐν αὐτοῖς αἱ ΑΖ, ΛΗ, ΙΘ· ἔσονται δὴ αὗται παράλληλοι. μένοντος δὴ τοῦ μέσου παραλληλογράμμου τοῦ ΖΙ συνωσθήτω τὸ μὲν ΑΖ ἐπάνω τοῦ μέσου, τὸ δὲ ΙΘ ὑποκάτω, καθάπερ ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος, ἕως οὗ γένηται τὰ Α, Β, Γ, Δ κατ' εὐθεῖαν, καὶ διήχθω διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ σημείων εὐθεῖα καὶ συμπιπτέτω τῇ ΕΘ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Κ· ἔσται δή, ὡς ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, ἐν μὲν ταῖς ΑΕ, ΖΒ παραλλήλοις ἡ ΕΚ πρὸς ΚΖ, ἐν δὲ ταῖς ΑΖ, ΒΗ παραλλήλοις ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ. ὡς ἄρα ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΖ καὶ ἡ ΚΖ πρὸς ΚΗ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΓ, ἐν μὲν ταῖς ΒΖ, ΓΗ παραλλήλοις ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ, ἐν δὲ ταῖς ΒΗ, ΓΘ παραλλήλοις ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ, ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς ΚΓ, ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ καὶ ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ. ἀλλ' ὡς ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΚ πρὸς ΚΖ, ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ καὶ ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ. ἀλλ' ὡς ἡ ΕΚ πρὸς ΚΖ, ἡ ΑΕ πρὸς ΒΖ, ὡς δὲ ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ, ἡ ΒΖ πρὸς ΓΗ, ὡς δὲ ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ, ἡ ΓΗ πρὸς ΔΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς ΒΖ, ἡ ΒΖ πρὸς ΓΗ καὶ ἡ ΓΗ πρὸς ΔΘ. ηὕρηνται ἄρα τῶν ΑΕ, ΔΘ δύο μέσαι ἥ τε ΒΖ καὶ ἡ ΓΗ.



τάτους, ὧν ὁ μὲν μέσος ἐνήρμοσται, οἱ δὲ δύο ἐπωστοί εἰσιν ἐν χολέδραις, τοῖς δὲ μεγέθεσιν καὶ ταῖς συμμετρίαις ὡς ἕκαστοι ἑαυτοὺς πείθουσιν· τὰ μὲν γὰρ τῆς ἀποδείξεως ὡσαύτως συντελεῖται· πρὸς δὲ τὸ ἀκριβέστερον λαμβάνεσθαι τὰς γραμμὰς φιλοτεχνητέον, ἵνα ἐν τῷ συνάγεσθαι τοὺς πινακίσκους παράλληλα διαμένῃ πάντα καὶ ἄσχαστα καὶ ὁμαλῶς συναπτόμενα ἀλλήλοις.

ἐν δὲ τῷ ἀναθήματι τὸ μὲν ὀργανικὸν χαλκοῦν ἐστιν καὶ καθήρμοσται ὑπ' αὐτὴν τὴν στεφάνην τῆς στήλης προσμεμολυβδοχοημένον, ὑπ' αὐτοῦ δὲ ἡ ἀπόδειξις συντομώτερον φραζομένη καὶ τὸ σχῆμα, μετ' αὐτὸ δὲ ἐπίγραμμα. ὑπογεγράφθω οὖν σοι καὶ ταῦτα, ἵνα ἔχῃς καὶ ὡς ἐν τῷ ἀναθήματι. τῶν δὲ δύο σχημάτων τὸ δεύτερον γέγραπται ἐν τῇ στήλῃ.

Δύο τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. δεδόσθωσαν αἱ ΑΕ, ΔΘ. συνάγω δὴ τοὺς ἐν τῷ ὀργάνῳ πίνακας, ἕως ἂν κατ' εὐθεῖαν γένηται τὰ Α, Β, Γ, Δ σημεῖα. νοείσθω δή, ὡς ἔχει ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, ἐν μὲν ταῖς ΑΕ, ΒΖ παραλλήλοις ἡ ΕΚ πρὸς ΚΖ, ἐν δὲ ταῖς ΑΖ, ΒΗ ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ· ὡς ἄρα ἡ ΕΚ



πρὸς ΚΖ, ἡ ΚΖ πρὸς ΚΗ. ὡς δὲ αὗται πρὸς ἀλλήλας, ἥ τε ΑΕ πρὸς ΒΖ καὶ ἡ ΒΖ πρὸς ΓΗ. ὡσαύτως δὲ δείξομεν, ὅτι καί, ὡς ἡ ΖΒ πρὸς ΓΗ, ἡ ΓΗ πρὸς ΔΘ·

δεδόσθωσαν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, αἱ ΑΕ, ΔΘ, καὶ

解説

　その装置は、長方形の枠からなっており、その枠に沿って、枠の幅に等しい高さの 3 つの平行四辺形がすべるようになってる。これらの平行四辺形は、常に、そのそこが直線を描くように動き、また互いに重なってすべるようになっている。

平行四辺形と三角形との位置は最初の図に示す。

　次の図は、第一の三角形以外のすべての三角形をその原位置から、互いに重なり合った位置AMF、M'NG、N'QHまで滑らせた結果を示す。

　第二の図において、ＡＥとＤＨとを与えられた 2 直線とする。

　N'ＱＨを三角形N'ＱＨの位置とし、その位置においてＱＨはＤを通るものとする。三角形M'ＮＧを三角形MＮＧの位置とし、ＭＦ、M'ＧおよびＮＧ、N'Ｈがそれぞれ交わる点Ｂ、ＣがＡ、Ｄをもつ 1 直線内にあるようにする。

　ＡＤを延長として、ＥＹとＫにおいて交わらせよ。

すると、　　ＡＥ：ＢＦ＝ＥＫ：ＦＫ＝ＡＫ：ＫＧ

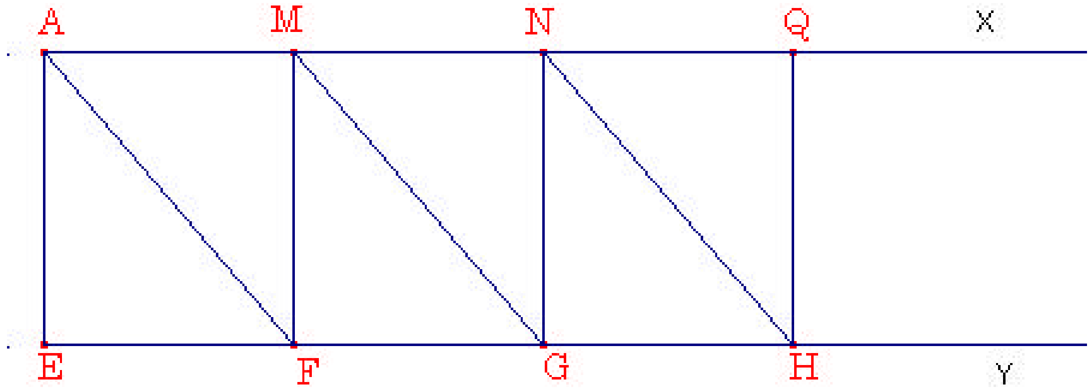
＝ＦＫ：ＫＧ

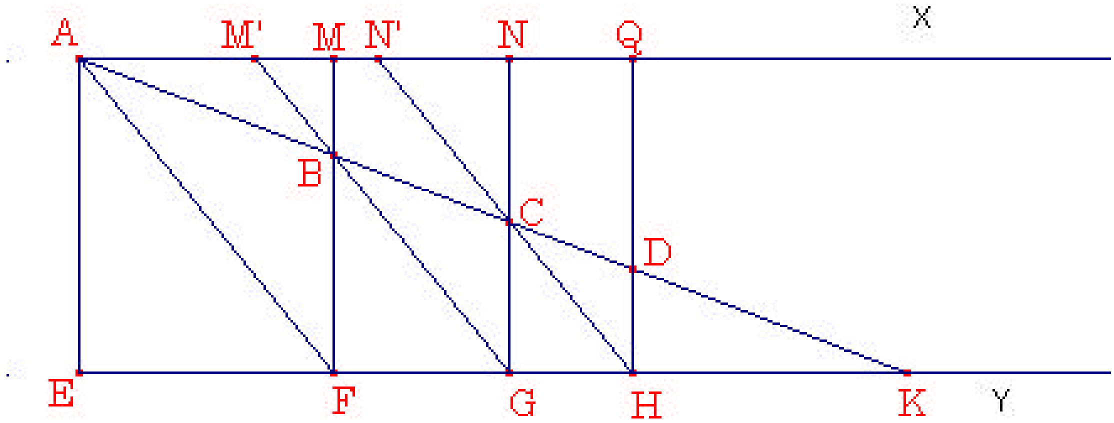
＝ＢＦ：ＣＧ

同じように、　　　ＢＦ：ＣＧ＝ＣＧ：ＤＨ

したがって、ＡＥ，ＢＦ，ＣＧ，ＤＨは、連比をなし、ＢＦ，ＣＧ、は求める比例の中項である。

(参考　ギリシア数学史　Ｔ．Ｌ．ヒース著)

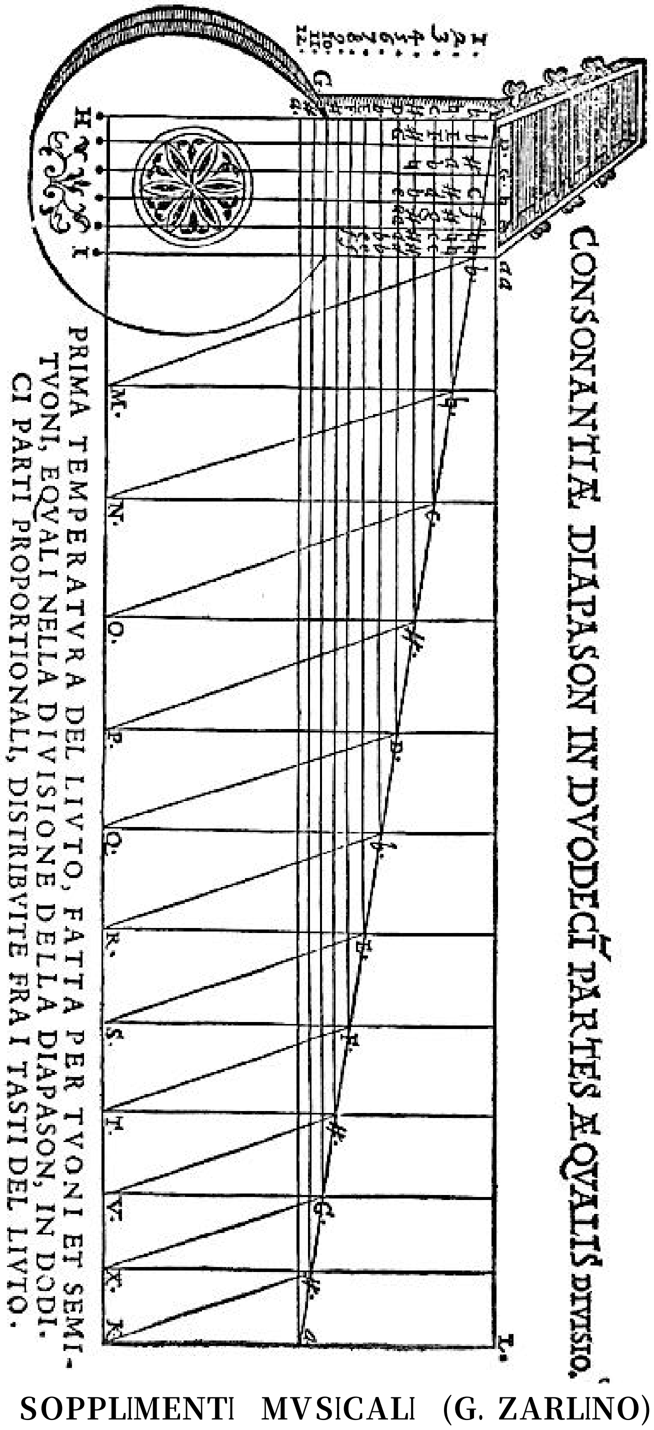

A
M
N
Q
X
E
F
G
H
Y


A
M'
M
N'
N
Q
X
B
C
D
E
F
G
H
K
Y

12 個の比例中項を求める。

メソラボンの 3 枚の板を、12 枚に増やすことで、11 個の

比例中項の長さを求めることができる。



SOPPLIMENTI MVSICALI (G. ZARLINO)