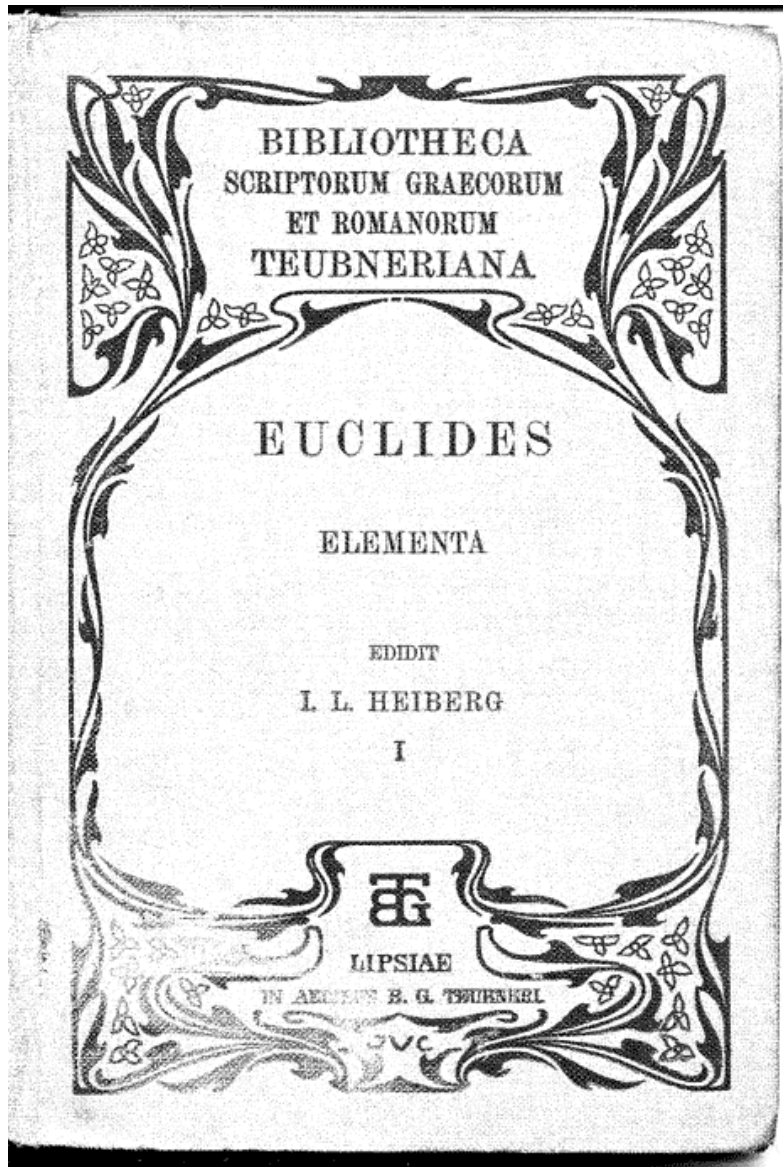


音階の中の数学

2時間目：平均律を作ろう！！



氏名 _____

授業者：筑波大学修士課程 1年 教育研究科数学教育コース

蓮沼秀昭

1 時間目の復習

- ・ オクターヴ

弦の $1/2$ の分割点の音

- ・ 協和音

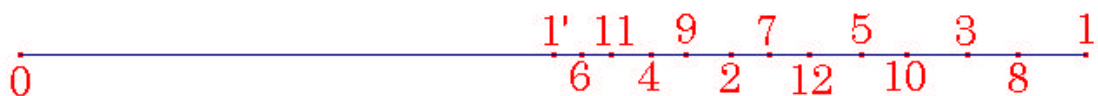
2本の弦楽器（1弦琴）から同時に出る音で、美しい響きを奏でる音

主に、同じ張り具合の2本の弦においては、その弦の長さの比によって協和するかしないかが決定される。

特に美しい音の比は、 $1/2$ （オクターヴ） と $2/3$ であった。

- ・ ピュタゴラス音律

弦の $2/3$ の分割を重ねることにより、オクターヴを12の音階に分割した。



ピュタゴラス音律の不都合

時代が進むにつれ、ピュタゴラス音律は多くの音楽家によって少しずつ修正を加えられ、より協和し、美しい和音になるような音律に変化していった。

しかし、16世紀になり鍵盤楽器の出現や、音楽の複雑化により、今までの音階では対処しきれなくなった。つまり、協和しない和音が現れてきたのである。

具体的には、“転調”や“移調”をした後に不協和な和音が現れることがあげられる。

なぜでしょうか？

メモ

そして、解決策として、、、

平均律

ピュタゴラス音律をもとに全ての音階を平均的に取ったもの。つまり、全ての隣り合う音同士のを、全て一定に12の音階に取った音律。

平均律は、オクターヴ間の12の音階のそれぞれの弦の長さの比を、 $a \sim k$ とすると、

$$\begin{aligned} 2 : a = a : b = b : c = c : d = d : e = e : f = f : g \\ = g : h = h : i = i : j = j : k = k : 1 \end{aligned}$$

のようにとった音階である。

比例中項

問題

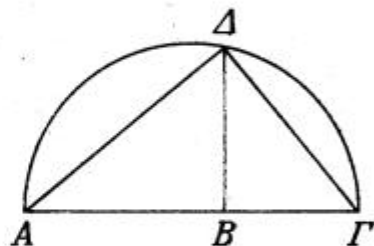
2 と 8 の比例中項を求めよ。

ギリシア時代の比例中項の求め方

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ AB , $BΓ$. δεῖ δὴ τῶν AB , $BΓ$ μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς $AΓ$ ἡμικύκλιον τὸ $AΔΓ$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ B σημείου τῆς $AΓ$ εὐθείας πρὸς ὀρθὰς ἡ $BΔ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $AΔ$, $ΔΓ$.

Ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ $AΔΓ$, ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ $AΔΓ$ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἤκται ἡ $ΔB$, ἡ $ΔB$ ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν AB , $BΓ$ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.



Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν AB , $BΓ$ μέση ἀνάλογον προσεύρηται ἡ $ΔB$. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

(ユークリッド原論 命題 13)

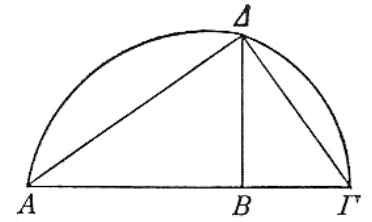
日本語訳

13

与えられた2線分の比例中項を見いだすこと。

与えられた2線分を AB , $B\Gamma$ とせよ。このとき AB , $B\Gamma$ の比例中項を見いださねばならぬ。

それらが一直線をなすようにおかれ, $A\Gamma$ 上に半円 $A\Delta\Gamma$ が描かれ, 点 B から線分 $A\Gamma$ に直角に $B\Delta$ がひかれ, $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ が結ばれたとせよ。



角 $A\Delta\Gamma$ は半円内の角であるから, 直角である。そして直角三角形 $A\Delta\Gamma$ において直角から底辺に垂線 ΔB が下されたから, ΔB は底辺の2部分 AB , $B\Gamma$ の比例中項である。

よって与えられた2線分 AB , $B\Gamma$ の比例中項 ΔB が見いだされた。これが作図すべきものであった。