出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.55-68、2004年3月

音階の作り方にみる数学

～ギリシア時代の道具、MESOLABIO を用いて～

筑波大学大学院修士課程教育研究科
蓮沼秀昭

章構成

要約

本研究では数学を人の営みと捉える視点から、音楽史における音階の形成の歴史を題材に、その形成に用いられる相似についての教材を作成し、音楽史を数学の授業に取り入れることの有用性を調べるために、中学第 3 学年 2 クラスを対象に授業実験を行った。また、その際に用いられる歴史的な道具 Mesolabio を授業で実際に扱うことで、その道具の効果を調べた。その結果、生徒達の数学観の変容が見られた。

キーワード：ピタゴラス音階　比例中項　平均律　相似　数学史　ツァルリーノ

１．はじめに

平成 13 年度小中学校教育課程実施状況調査報告書(2001)によると、中学生の勉強に対する意識調査では、数学の勉強は、受験に関係なくても大切だという質問に対して、そう思う、どちらかといえばそう思うという回答を選んだ生徒の割合は、３学年を通して６割を超えているが、学年が進むにつれその割合は約１割減少している。また、通塾等についての状況では、数学においては学年が進むにしたがって上昇する傾向にあり、中学第３学年では７割近くの生徒が通熟しており、塾で教わっている内容としては学校でわからなかった内容という答えが多かった。教師に対するアンケートでは、発展的な課題を取り入れた授業を行っていますかという質問に対し、行っていると答えた教師は約１割、どちらかといえば行っている方だと答えた教師は約３割であった。

学習指導要領では「自ら学び自ら考える力」の育成や「数学的活動」の充実を図るといったことが掲げられている。しかしこのような状況ではなかなか数学的活動の楽しさや数学の有用性を生徒に伝えることは難しいと考えられる。

これらのことから、数学のよさを生徒に伝え数学を学ぶ意欲を高める授業が必要になる。そこで本研究では、数学の良さ、数学を学ぶ意味を生徒に伝えたいという考えの下に、「他者の認めた良さを味わうためには、他者の立場になって考えてみる必要がある。」(礒田・土田 2001、p.8,9)つまり、数学を生み出す活動は人によって営まれるため、数学のよさを生徒に伝えるためには生徒が当時の人々の営みを追体験する必要がある。ということ、また、「共感と教訓を導く原典解釈機会を取り入れるならば、解釈学的営みを通じて、生徒は自らその数学内容とそれを生み出した人間とのかかわりを

知る活動に取り組むことになる。」(礒田 2002,p.8)といった視点から授業に音階という身近なものの原典を用いる。

音楽史を扱った先行研究として佐藤(2001)が挙げられる。佐藤は研究の意図として、他教科との関連からの数学の文化的視野の覚醒を挙げている。本研究と先行研究における共通点として、Mesolabio を使った平均律を扱うということがある。先行研究との相違点としては、先行研究では高校 2 年 5 名を対象としたが、本研究では対象を中学第 3 学年２クラスに設定した。このため、先行研究において達成された文化的視野の覚醒が、より現実の教室に近い状況で達成できるか否かを明らかにする。

また本研究では平均律の構成の際に Mesolabio という道具を実際に使うことを活動として取り入れた。先行研究では図を用いることや、Cabri GeometryII を用いて動きを解説することにとどめてあったため、礒田(2003,p.249)の、「道具を実際に利用してみることで、人は、その道具の開発者・利用者がなぜそれを用いたのか、彼らが実際どのように考えたのかを知るきっかけを得ることができる。」また、「貴重な遺物（道具）は、丁寧に扱われなければならないため、触れることはできない。経験の大切な部分、つまり道具を使ってみてはじめてわかる見たり触ったりという感覚によるフィードバックが教師にも生徒にも難しい。教室においてこれらのコピーを扱うことでも、触れるということは役に立つ。」(History in Mathematics Education.2000,p.343)といった視点から、実際に道具を用いることで、この道具が当時の人々の営みを追体験することにおける手助けになるか否かを明らかにする。

２．研究目的・授業目的・研究方法

研究目的：　音楽史の中で数学が活かされてきた事実を、一次文献の解釈を通して追体験をすることにより、生徒の数学観の変容が見られるかを考察する。またエラトステネスの道具を使って考えることで、数学を人の営みとして理解できるかを明らかにする。

研究方法：　音階を題材とした相似に関するテキストを開発し、それを用いて授業実践を行う。そのため、以下の課題を設定した。そして、授業前後のアンケート、ビデオによる授業記録に基づき考察する。

課題 1：数学史を用いた授業を通して、生徒たちは数学を人の営みとして捉え、数学の必要性を感じられるか。

課題 2：実際に道具を用いて考えることが課題 1 の達成の手助けになるか。

３．音楽史の教材化

本研究では、「ユークリッド原論」及びツァルリーノ（1517-1590）の「SOPPLIMENTI MUSICAL」、「ARCHIMEDES OPERA OMNIA EDIDIT I.L.HEIBERGIII」を原典として用いた。

音楽史においては、様々な音階が存在する。そのなかで有名なものとしては純正律、ピタゴラス音律、平均律などがある。このうち最も古いものは純正律で、この音階は

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.55-68、2004年3月

異なる 2 音が美しく協和する条件を見つけ出し、それらを集めて音階にしたものである。そしてピタゴラスはこの純正律の中で最も単純で最も美しい 2 つの協和音の関係を用いて音階を作った。これが後のピタゴラス音律と呼ばれるものである。さらにこのピタゴラス音律もピタゴラス学派や他の音楽家たちによって部分的に純正律を取り入れたりと改良されていった。これらの音階の特徴としては転調不可能性というものがあり、それぞれの調にはそれぞれの調固有の意味や趣きがあるとされていた。実際ある調で歌われていた曲を移調や転調をすると、雰囲気が変わってしまう。16 世紀になると音楽の形態も変わっていき、鍵盤楽器も現れた。この鍵盤楽器は 1 つの音に対し 1 本の弦を使用しており、調を変えて演奏する際、毎回すべての弦を調律しなおさなければならなかった。それまでは声楽や鍵盤楽器にくらべて弦の少ないリュートなどの弦楽器を主に使用していたので調律の問題はそれほどなかったが、この鍵盤楽器と転調を含む曲の出現により、転調の可能な新しい音階、平均律が生まれた。

今回の授業では、これらの話を踏まえ「ピタゴラス音階」と「平均律」について教材としてとりあげた。

ピタゴラス音階の構成の際には直線の 3 分の 2 等分が必要となるため、ユークリッド原論第 6 巻命題 9 を用いた。まず、今回の授業で最も重要なことは、和音がどのような音になるか（つまり美しい和音か濁った和音かということ）ということは 2 弦琴でいうところの、弦の比で決まるということである。これをもとに、音階形成を考えていく。

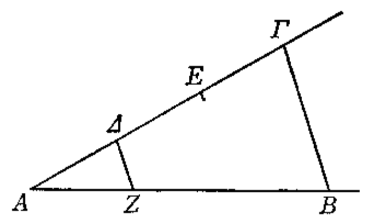
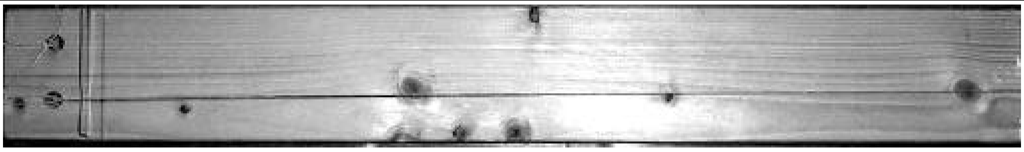


図 1　ユークリッド原論第 6 巻命題 9


写真①　1 弦琴

ピタゴラス音階は 1 弦琴の弦を 2/3 の分割をすることによって音階を求めていく方法である。具体的には、まず、D で分割する。

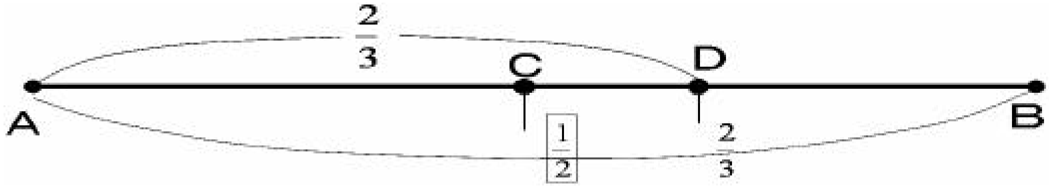


図 2

次に AD を 2/3 に分割する。

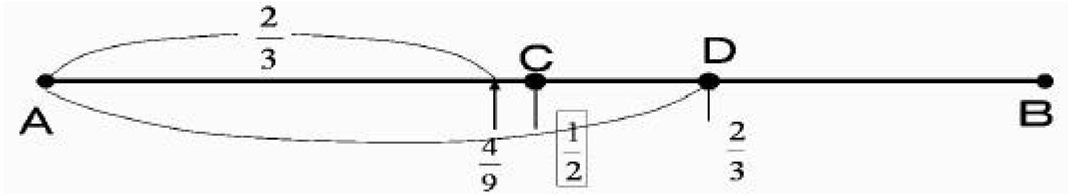


図 3

音階を右側に作るため、2 倍する。

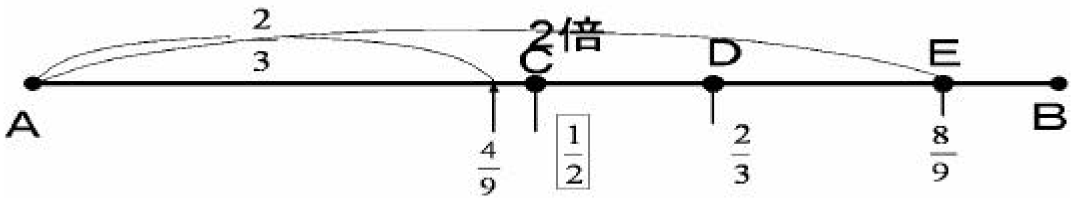


図 4

この操作を繰り返して次のような音階を得る。

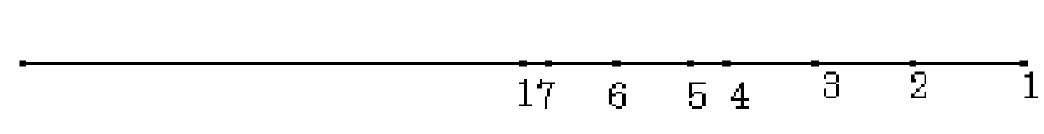
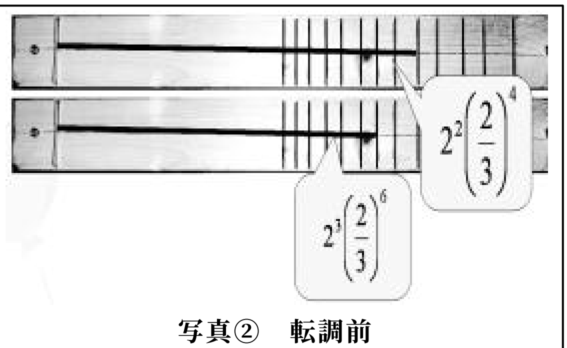


図 5

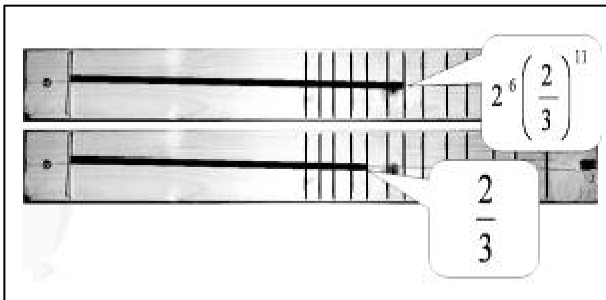
また、現在は平均律という音階が使われている理由を歴史的な背景と数学的なピタゴラス音階の不都合を交えて解説する。

ピタゴラス音階の不都合とは、その音階のまま転調すると和音がおかしくなってしまうことがあるということで、これを生徒と一緒に数学的に調べていった。具体的には、2 弦琴における転調前の弦長の比と転調後の弦長の比が異なってしまうということである。

ピタゴラス音階で作った 1 弦琴



写真②　転調前



写真③　転調後

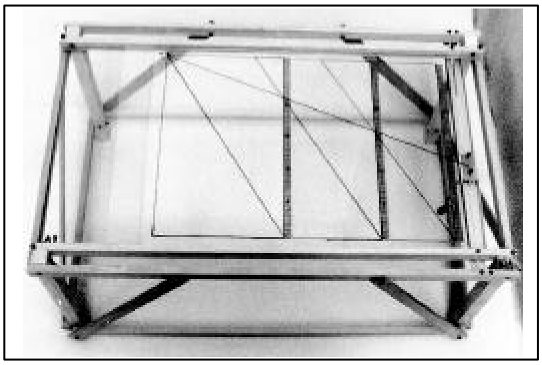
出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.55-68、2004年3月

このため、転調しても比が一定になるような音階が必要となった。つまり

$$2 : a = a : b = b : c = c : d = d : e = e : f = f : g = g : h = h : I = I : j = j : k = k : 1$$

のように弦の長さをとる必要がある。この考え方が平均律である。

平均律においては、12 個の比例中項を求めることが必要になるため、授業にエラトステネスの道具「Mesorabio」を使った活動を取り入れた。



Mesolabio は立体の倍積問題の回答を求めるためにエラトステネスが作った道具で、3 枚のスライドする透明な板と紐で作られている。

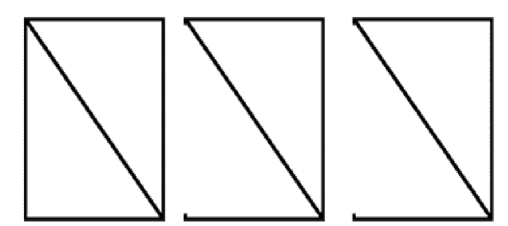
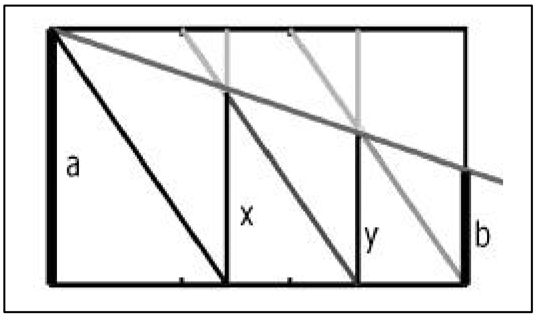


図 6

これらの透明な 3 枚の板には左のような同じ大きさの四角形と対角線が書かれていて、それらをうえの写真のように四角形の右側の辺とその隣の四角形の対角線との交点が、それぞれ一直線上になるように並べると、次の図のように a:x = x:y = y:b となり、2 つの比例中項 x,y が求まる。この道具をツァルリーノが発展させて用いた。そして、12 個の比例中項を求めるためにツァルリーノの「SOPPLIMENTI MUSICAL」の図を用いて、その図の証明を行う。



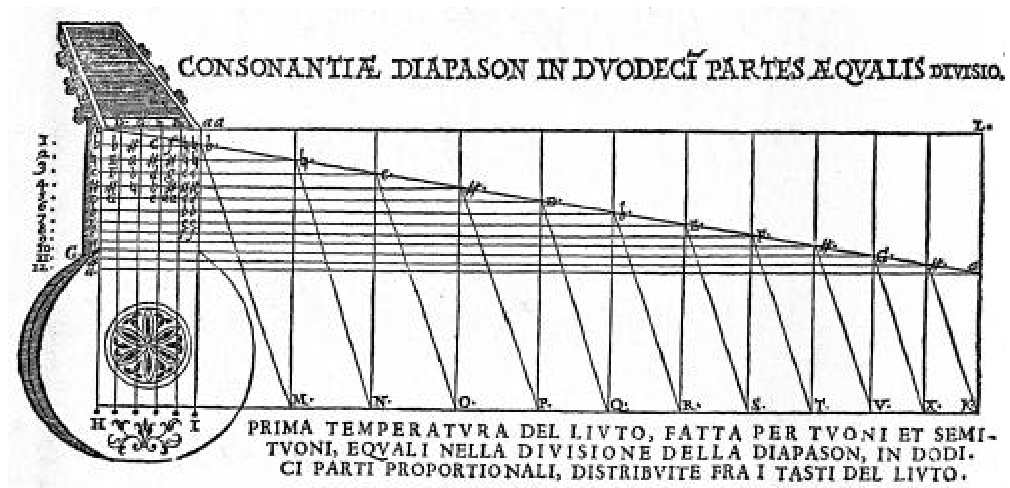
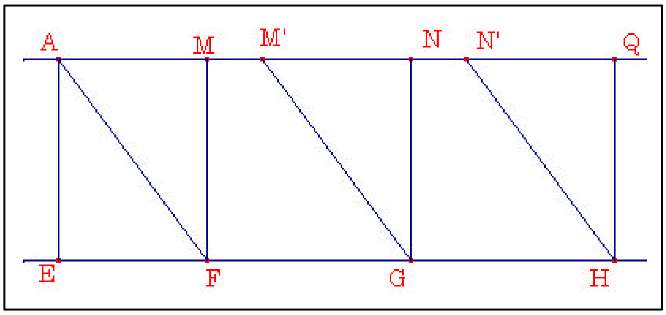


図 8　ツァルリーノ　SOPPLIMENTI MUSICAL　p.209

4．Mesolabio の数学的な解説



Mesolabio は 3 枚の板をスライドさせ、2 つの比例中項を求めることができる。図 9 における⊿NM'G と⊿N'QH をスライドさせる。

このとき、図 10 において MF と M'G との交点 B と、NG と N'H との交点 C とする。そして、点 D を QH 上に任意に取り、A,B,C,D が一直線上に並ぶように四角形の位置を調整すると、このとき

AE：BF＝BF：CG＝CG：DH

となり、2 つの比例中項 BF と CG が求まる。

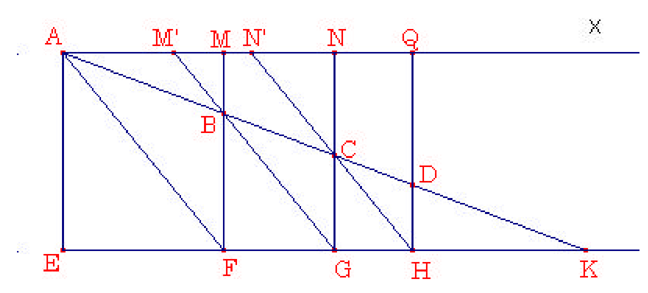


図 10

証明

AE：BF＝BF：CG＝CG：DH

を示す。

[1]　まず、AE：BF＝BF：CG　を示す。

∠AEK＝∠BFK＝90°、∠K は共通より、

三角形の 2 角がそれぞれ等しいから、

⊿AEK∽⊿BFK

よって、

AE：BF＝AK：BK　・・・・①

次に、AF//BG より、　∠AFK ＝ ∠BGK

また、∠K は共通より、

⊿AFK∽⊿BGK

よって、

AK：BK=FK：GK　　　　　・・・・②

最後に、⊿BFK∽⊿CGK を示す。(①を参考に)

よって、

FK：GK＝BF：CG・・・・③

よって、①～③より、

AE：BF=AK：BK=FK：GK=BF：CG

まとめると、

AE：BF=BF：CG

[2]　BF：CG=CG：DH も同様に示せる。　／■

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.55-68、2004年3月

5．授業概要

（1）授業環境

対象：茨城県内私立中学校　第3学年2クラス（Aクラス45人、Dクラス45人）
相似は学習済

実践日時：H16.12月15～18日のうち各クラス3時間（45分授業）

（2）授業目標

音楽史を用いることで、そこに相似、平行線と比についての性質を見出し,またそれらの性質を使うことによって、音階が作られる仕組みを理解できるようにする。そして、相似、平行線と比についての性質の理解を深める。

（3）授業展開

3時間の授業では、ピタゴラス音階と平均律の構成の際に相似（数学）が密接に関わっているということを強調するように心がけた。流れとしては、1時間目にピタゴラス音階、2時間目に平均律の準備として比例中項の概念、そして3時間目にMesolabioを用いた平均律の構成となる。また、クラス全体を対象としているため、なるべく音楽の知識は多用せずに数学の授業であることを意識できるような授業展開を心がけた。

1時間目：ピタゴラス音階とギリシアの数学

はじめに音と弦の関係を実際に弦楽器を用いることで解説し、2弦琴（2本の弦の条件は同じとする）を用いてその弦の比が整数比になるときに美しい和音（協和音）になることを実際に音を聞かせながら解説した。

写真⑤　2弦琴

そして、ピタゴラスがその比をどのように用いて音階を作ったかを解説する。

ピタゴラスが音階を作る際に弦の2／3の分割をするため、ギリシア時代では、長さを図るのではなく作図によって長さを求めていたということを強調し、ユークリッド原論第6巻命題9の作図法を生徒の活動として取り入れた。
しかし、ほとんどの生徒がなかなか作図できず、はじめは長さを測って3等分する生徒も数人いた。しばらく待って、ヒントとして図のような補助線を引き「どこかで見たことない？」という質問をした。すると、生徒から「中点・・・」、・・・・　「中点連結定理！！」という声が上がり、そのヒントで半分近くの生徒が3等分の方法を思いつい

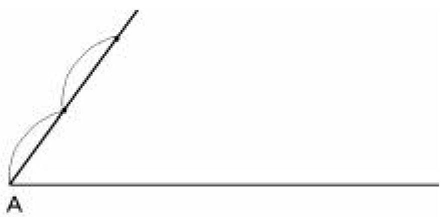
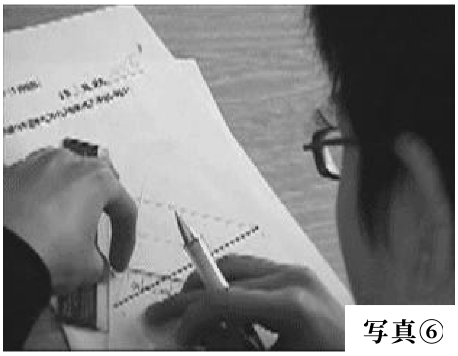


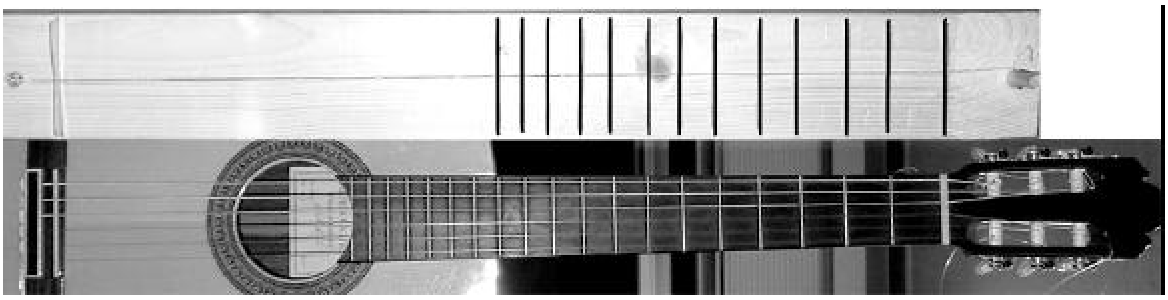
図11　ヒント

た。

その後、実際に弦の 2／3 分割を繰り返すことで、ピタゴラス音階を生徒たちに作図してもらい、1 弦琴にあらかじめその方法で作った 12 音階の印しをつけておいたものを見せ、そのピタゴラス音階の音を聞いてもらった。音を聞いた生徒の反応は、「普通だ」という反応であった。さらにその印しが現在の音階、つまりギターのフレットと比べて非常に近いことを見せ、1 時間目の授業を終えた。



写真⑥



写真⑦　1 弦琴と現在のギターの比較

2 時間目：ピタゴラス音階の不都合とそれに変わる音階、平均律

前回作ったピタゴラス音階は転調ができないため、ピタゴラス音階が転調のできる現在一般的に使われている平均律に代わっていったことを歴史的な背景を織り交ぜながら以下のように数学的に解説した。

和音が美しくなるためにはその 2 本の弦の比が重要であった。 美しい和音を転調した際に、転調後の和音の 2 本の弦の比が保たれれば、転調してもうつくしい和音のままなので転調することができる。 しかし、ピタゴラス音階は必ずしもそうなるとは限らず、おかしな和音ができてしまうことがあるため転調できない。

実際に生徒たちに比がおかしくなる和音の比を計算してもらい確認した。

次に、どんなに転調しても比が一定になるように、ピタゴラス音階のように 1 オクターヴを次のように 12 の音階にわけることを解説。

$$2 : a = a : b = b : c = c : d = d : e = e : f = f : g$$
$$= g : h = h : I = I : j = j : k = k : \mathbf{1}$$

比例中項 a~k を求めるために、まず具体的な比例中項 **2：x = x：1** を求めてもらい、最後に **a：x = x：b** をユークリッド原論第 6 巻命題 13 の証明を活動として行った。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.55-68、2004年3月

3 時間目

前回の続きとして、2 つの比例中項 1：x=x：y=y：8 を現在の方法（代数的に）生徒に求めてもらい、次にギリシア時代の数学として a : x = x : y = y : b の x,y を求めるために、エラトステネスの道具 Mesolabio を紹介した。使い方を簡単に説明して、小さく作った Mesolabio を生徒に 2 人 1 組になってもらい、実際に両端の長さを決めて比例中項 1：x=x：y=y：8 を求めてもらった。（写真⑦）

すると、計算した値と同じになりそうなので、「おぉーすげー、なったなった」「なんで？」という声が上がった。

そこで、なぜ比例中項になるかを証明してもらった。

最後に、11 個の比例中項もツァルリーノの考えた Mesolabio の四角形を増やす方法で求めることができるということを解説し、授業を終わった。

ワークシート（２時間目）

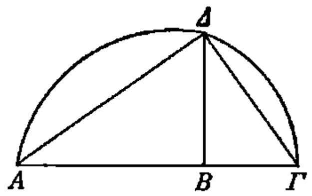
組　　番

２、比例中項の証明

与えられた２線分の比例中項を見いだすこと。

与えられた２線分を *AB*, *BΓ* とせよ。このとき *AB*, *BΓ* の比例中項を見いださねばならぬ。

それらが一直線をなすようにおかれ，*AΓ* 上に半円 *AΔΓ* が描かれ，点 *B* から線分 *AΓ* に直角に *BΔ* がひかれ，*AΔ*, *ΔΓ* が結ばれたとせよ。



このとき、線分ＢΔが、ＡＢとＢΓの比例中項になっていることを証明せよ。

図 12 ワークシート 2 時間目

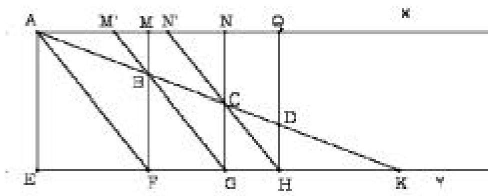
ワークシート（3 時間目）

組　　番

次の図において、

ＡＥ：ＢＦ＝ＢＦ：ＣＧ＝ＣＧ：ＤＨ

を示しなさい。



（1）まず、ＡＥ：ＢＦ＝ＢＦ：ＣＧ　を示す。

∠ＡＥＫ＝∠ＢＦＫ＝９０°、∠Ｋは共通より、

三角形の２角がそれぞれ等しいから、

ΔＡＥＫ∽ $\boxed{\qquad}$

よって、

ＡＥ：ＢＦ＝ $\boxed{\qquad}$ ：ＢＫ　・・・・①

次に、ＡＦ//ＢＧより、$\boxed{\qquad}$ ＝ ∠ＢＧＫ

また、∠Ｋは共通より、

$\boxed{\qquad}$ ∽ $\boxed{\qquad}$

よって、

$\boxed{\qquad}$ ：ＢＫ＝ＦＫ：$\boxed{\qquad}$ ・・・・②

最後に、ΔＢＦＫ∽ΔＣＧＫを示す。（①を参考に）

よって、$\boxed{\qquad}$ ： $\boxed{\qquad}$ ＝ＢＦ：ＣＧ・・・・③

よって、①〜③より、

ＡＥ：ＢＦ＝ＡＫ：ＢＫ＝ＦＫ：ＧＫ＝ＢＦ：ＣＧ

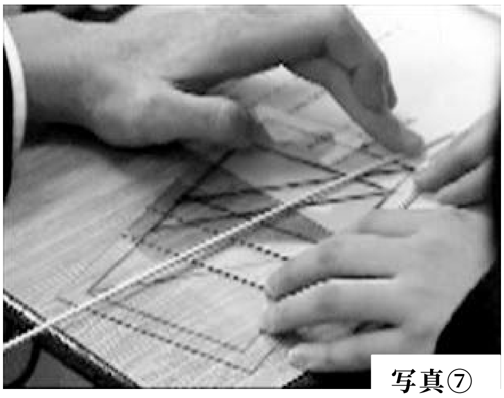
まとめると、　<u>ＡＥ：ＢＦ＝ＢＦ：ＣＧ</u>

（２）ＢＦ：ＣＧ＝ＣＧ：ＤＨも同様に示せる。

（１）（２）より、ＡＥ：ＢＦ＝ＢＦ：ＣＧ＝ＣＧ：ＤＨ
が示せた。

図 13　ワークシート 3 時間目

http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/Forall/project/history/2003/mesolabio/mesolabio_index.htm



写真⑦

生徒用の Mesolabio は、アクリル板３枚に図 14 のような枠をマジックで書いたものと細い棒でつくった。

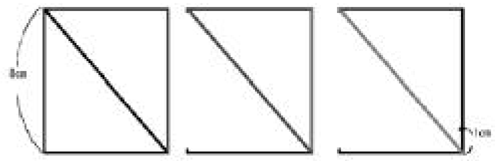


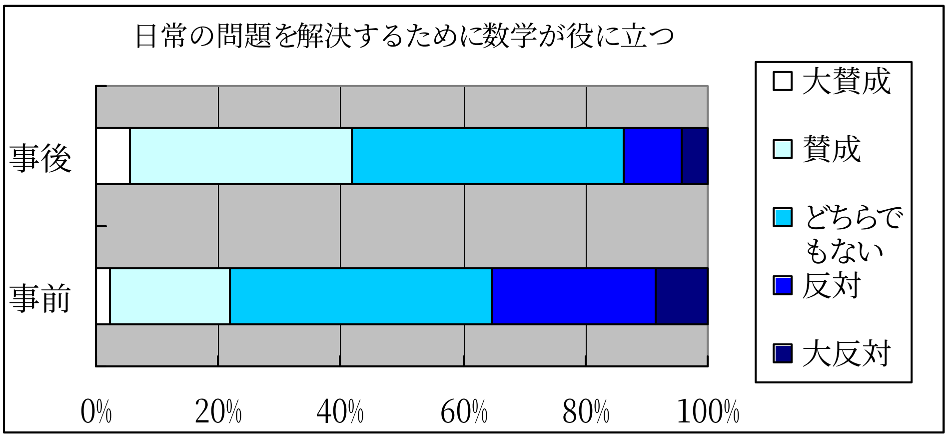
図 14　Mesolabio

４．結果・考察

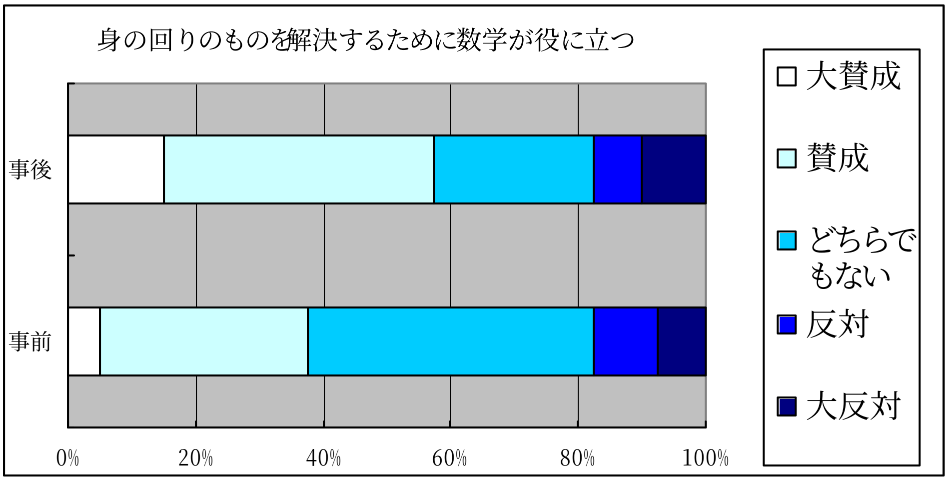
今回の研究の目的は、音楽史の中で数学が活かされてきた事実を、一次文献の解釈を通して追体験をすること、また実際にエラトステネスの道具を使って考えることにより、生徒の数学観の変容が見られるかを明らかにすることであった。

課題 1：数学史を用いた授業を通して、生徒たちは数学を人の営みとしてとらえ、数学の必要性を感じられるか。

アンケート結果から

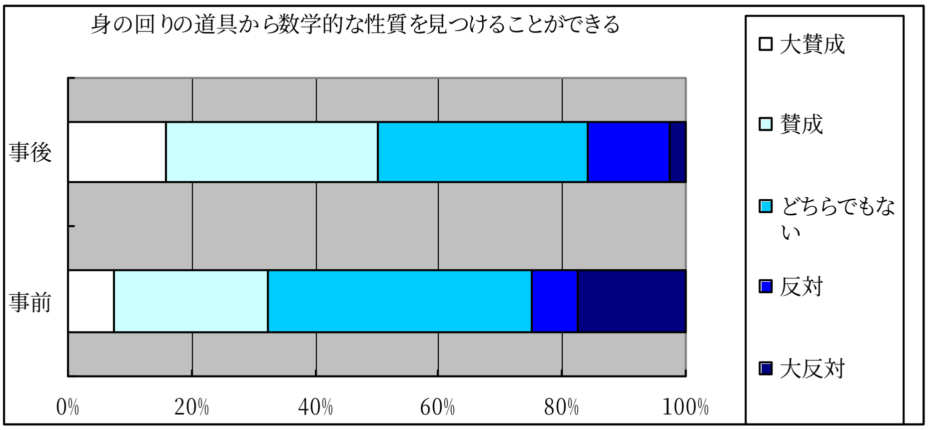


グラフ１



グラフ２

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.55-68、2004年3月



グラフ３

これらについて母平均の差の検定（２標本検定）を行う。

「日常の問題を解決するために数学が役に立つ」

	大賛成	賛成	どちらでもない	反対	大反対
事前（82）	2	16	35	22	7
事後（72）	4	26	32	7	3

※ 大賛成を５、賛成を４、どちらでもないを３、…として、以下では数値化した。

母集団 $N(m_1, s_1^2)$ から 130 個の標本をとり、母集団 $N(m_2, s_2^2)$ から 106 個の標本をとる。両母集団は互いに独立と仮定する。$N(m_1, s_1^2)$ の平均値が $N(m_2, s_2^2)$ よりも上がったことを示したいので、片側検定とする。このとき、帰無仮説は $H_0 : m_1 = m_2$ であり、対立仮説は $H_1 : m_1 < m_2$ である。

それぞれ、

$m_1 = 2.805$ （事前の平均）

$m_2 = 3.292$ （事後の平均）

$s_1^2 = 0.875$ （事前の分散）

$s_2^2 = 0.773$ （事後の分散）

$n = 151$ （自由度）

自由度 151 の t 分布 $t(n)$ に従う。有意水準を $a = 0.05$ と設定する。t 分布表より、t 分布の片側 5 パーセントの点は $t_{0.05}(120) = 1.658 > t_{0.05}(151) > t_{0.05}(240) = 1.651$ である。ここで、計算により、 $t = 3.329$ であった。これにより、 $t < t_{0.05}(151)$ 。よって、帰無仮説は棄却された。

同様にして、残りの 2 つのアンケート結果についても母集団に関して平均値があがっていることが、検定から確認できた。

また、事後アンケートの感想からは次のようなものがあった。

- 今まで計算とかいろいろしてきたけど、何に使うかいまいちよくわかんなかったけど、何でこういう計算するかわかった。
- 今みたいなやり方になるまで、いろいろな考え方があったということがわかった。

- 数学って必要ないって思ってたけど、結構必要だと思った。
- 実はいろいろなところで数学が使われていることがわかった。
- 表面に数学がなくても関係していることがあると思うようになった。
- どんな数学でもモトがあり、昔の人の考えがわかって面白かった。
- 数学が身近に感じた。
- 今までは何かに役に立つことではなかったけど、今回は役に立つことがわかった。

事前アンケートでは、数学を受験のための教科としてみている生徒が 3 割近くいた。しかし事後アンケートの感想、事前事後の変化を見てみると、歴史的にみて何故数学がなされてきたのか、また数学がどういったことに役に立つのかなどの数学の必要性や、事象の見えない部分に数学があるのではないかといった視点を持った生徒もいた。これらのことから生徒たちは数学が日常生活に密接にかかわっていると感じ、数学を人の営みとしてとらえ、また数学の必要性を感じられたのではないかと考えられる。よって生徒の数学観の変容が見られたと考えられる。

課題 2：実際に道具を用いて考えることが課題 1 の達成の手助けになるか。

事後アンケートの感想では、「MESOLABIO という道具を授業で扱ったが、その道具に対してどのように感じましたか？」という質問に対して、

- 昔の人は紙に書いてできないことを道具化して求めたのはすごいと思う。それを実感するためにはいいと思う。
- 式がなくて図で考えている。

といった回答があった。また授業のビデオから 1 時間目の授業の線分の 3 等分の作図では、定規で長さを測る生徒が多数いたが、3 時間目では Mesolabio を実際に使い長さを求めたことで、生徒たちは当時のように道具を用いることで比例中項の長さを求めるという作業にスムーズに移行できていた。そして、Mesolabio で求めた長さに対して「なんでだ？」という意見もあり、Mesolabio を用いたことで、当時の考え方の追体験が、より容易にできたと考えられる。さらにアンケートの「今回ギリシア時代の数学について勉強しましたが、あなたが今まで行ってきた数学との違いはありましたか？また、それはどのようなことですか？」という質問に対しても、

- 数学の公式がなく、作図等で求めていた。
- 解き方
- いろんな道具を使っていた
- 数字よりも考え方でといていくところ
- 他の科目に関係していた

といった回答があがり、生徒たちがギリシア時代は作図や道具を用いて数学を求めていたということを感じたということが伺える。これらのことから道具を用いることが数学を人の営みとしてとらえるために貢献していると考えられる。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.55-68、2004年3月

５．おわりに

本研究では、「音階はどうやって作られているんだろう？」という問いかけから、音楽史と数学史を用いて見ることにより、さらにMesolabioを道具として用いることで、生徒の数学観に変容が見られた。今回の授業の反省として１１個の比例中項をもとめる際、Mesolabio の２つの比例中項からの発展を生徒自身に考えてもらいたかったが、時間の都合で解説という形になってしまった。ツァルリーノの考えを追体験するためには、この２個の比例中項から１１の比例中項への発展を考えることは必要であり、道具のよさを伝えるには不十分であったかもしれない。音楽についてはアンケート調査にも、苦手、嫌いなどの意見もあった。今回の授業では転調や音と弦楽器の仕組みなど音楽的な内容が含まれており、なるべくわかりやすいように実物を用いたり、転調のわかりやすい音楽を聞かせたりしながら説明をしたが、そのために時間がかかってしまった。先行研究では対象が高校 2 年 5 名であったが、本研究では中学 3 年 2 クラスであり、さらに時間数も先行研究と比べて少なかったため、授業内容としてはクラス全員が授業に参加できようにするためにも生徒の活動を先行研究と比べて減らす必要があり、かなり絞られたものになった。しかし生徒の感想からも、数学を学ぶ価値に対する変容が見られたため、音楽史の一般教室における数学の授業への導入という点においても今回の授業は有用であったと考えられる。そして今後の課題としては道具をメインに持っていけるような授業展開ということが残った。

謝辞）研究授業の実施に際して、私立茗渓学園の岩村直人先生、関根博先生、数学科の先生方には多大なご協力とともに、貴重なご意見・ご指導をいただきました。厚く御礼申し上げます。

注）本研究は、平成 15 年度科学研究費、特定領域研究(2)課題番号 15020214「数学用機械と JAVA による移動・変換と関数・微積ハンズオン教材の WEB 化研究」（研究代表者　礒田正美）において開発された歴史的道具を前提にして、平成 15 年度科学研究費、基盤研究(B)(2)課題番号 14380055「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」（研究代表者礒田正美）の一環として行われた。

引用・参考文献

(1) 礒田正美・土田知之(2001)「異文化体験を通じての数学の文化的視野の覚醒；数学的活動の新たなパースペクティブ」
(2) 礒田正美(2002)「解釈学からみた数学的活動の展開－人間の営みを構想する数学教育へのパースペクティブ－」
(3) 礒田正美(2003)「なぜ道具を数学教育で活用する必要があるのか～道具を使ってこそ学べる数学の教育的価値を明らかにするためのパースペクティブ～」
(4) 佐藤暁子(2001)“ 音階が作られるまでと数学 ”を題材にした教材の開発－他教科と

の関連からの数学の文化的視野の覚醒－　筑波大学数学教育研究室.平成１4 年３月「教育評価の転換と歴史文化志向の数学教育－ADDING IT UP:Helping Children Learn Mathmatics－」

(5) GIOSEFFO ZARLINO(1979)「SOPPLIMENTI MUSICAL」New York : Broude Brothers , (原著出版 1588)

(6) Iohan Ludvig Heiberg(1972)「ARCHIMEDES OPERA OMNIA EDIDIT I.L.HEIBERGⅢ」Stutgardiae : B.G. Teubneri, (原著出版 1915)

(7) ヴァン・デル・ウァンデン　村田全・佐藤勝造訳(1984)「数学の黎明」みすず書房,

(8) GIOSEFFO ZARLINO(1965)「LE ISTITUTIONI HARMONICHE Second Series-Music Literature」Broude Brothers, (原著出版 1558)

(9) 国立教育政策研究所　教育課程研究センター.2001「平成 13 年度小中学校教育課程実施状況調査報告書　中学校数学」株式会社ぎょうせい

(10)文部省「中学校学習指導要領(平成 10 年 12 月)解説－数学－」大阪書籍株式会社

(11) T.L.ヒース著　平田寛+菊池+大沼訳.1998「復刻版　ギリシア数学史」共立出版

(12)筑波大学数学教育研究室.平成１５年３月「中学校・高等学校数学教育課題開発に関する研究(10)『確かな学力』の育成と歴史文化志向の数学教育－個に応じた指導、数学史・道具－」

(13) デカルト(1974)「デカルト著作集４　音楽提要」東京 : 白水社, (原著出版 1618)

(14)John Fauver,Jan van Maanen(Eds)「History in Mathematics Education」the ICMI study,Kluwer Academic Publishers2000