3 時間目

年　組　番　氏名

授業資料

デカルトの幾何学～新しい方法～

DISCOURS

DE LA METHODE

Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.

PLUS

LA DIOPTRIQVE.

LES METEORES.

ET

LA GEOMETRIE.

Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE

De l'Imprimerie de IAN MAIRE.

CIↃ IↃ C XXXVII.

Avec Privilege.

授業者：新木　伸次
（筑波大学大学院修士課程教育研究科 1 年）

2 時間目では、メソラボス・コンパスを作図するということをしました。では、このような新しく幾何学の対象として受け入れられる道具の描く曲線は、どのようなものでしょうか。作図したものをもとにして、考えてみましょう。

さて、このようにして角 XYZ を開く間に、点 B は線 AB を描くが、これは円である。他の定木が交差する他の点 D、F、H は他の線 AD、AF、AH を描く。あとに来る線ほど最初の線に比べて複雑であり、最初の線自体は円より複雑である。しかし、<u>この最初の線の描き方を、円の場合、少なくとも円錐曲線の場合と同様に明晰判明に考えるのをさまたげるものは何もないはずである。</u>また、第 2、第 3、そのほか描きうるかぎりの線を第 1 の線と同様に考え、したがって、それらすべてを同様に受け入れて、<u>幾何学の研究に使うのをさまたげるものもない</u>はずである。

【デカルト『幾何学』,「デカルト著作集[1]」白水社（2001)】

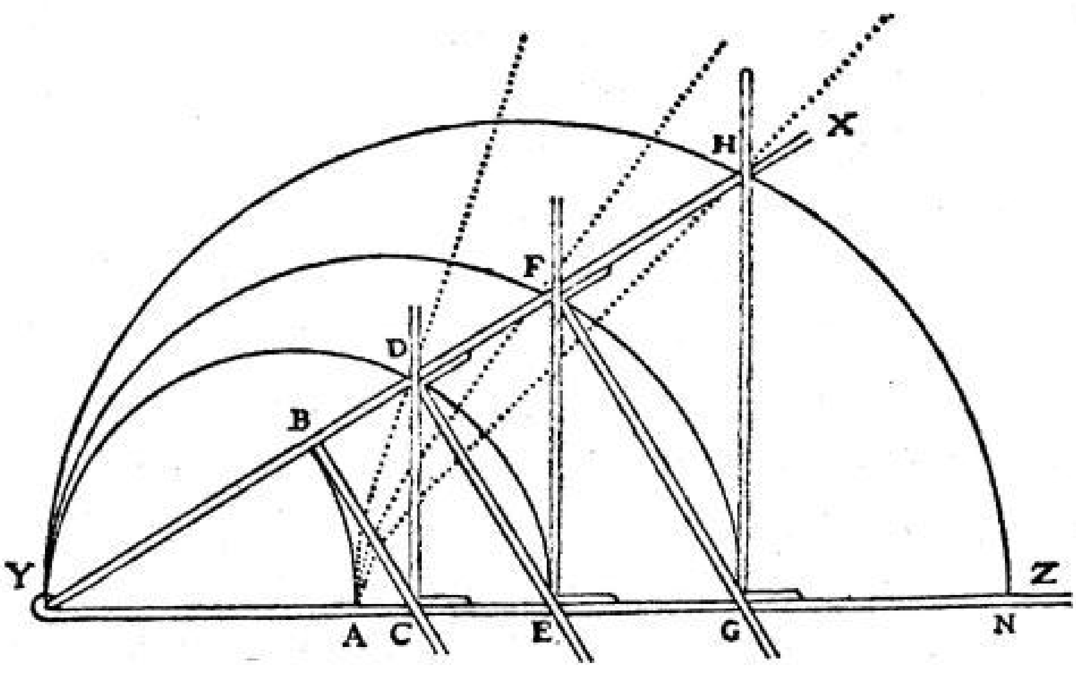
（下線部加筆；授業者）

「あとに来る線ほど最初の線に比べて複雑」とは、どのようなことを言っているのかを予想して書いてください。また、動かしてみて気付いた性質も書いてみましょう。

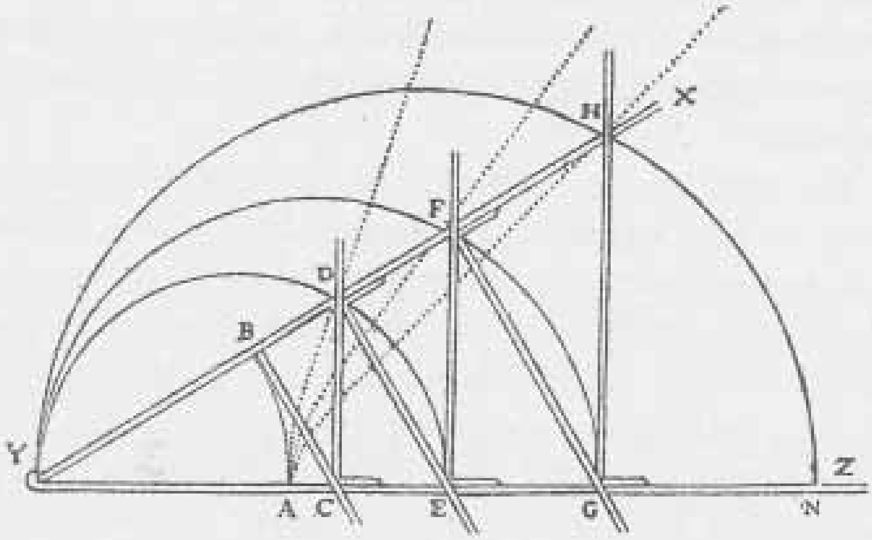
このメソラボス･コンパスには、他にどのような性質があるのでしょうか。
『幾何学』第 3 巻には、次のような一節があります。

［多くの比例中項を見いだすことに関する例］
たとえば、欲するだけ多数の比例中項を見いだすためには、上に説明した器具 XYZ によって描かれる曲線を用いる以上に容易であり、またより明瞭に証明しうる方法があるとは思われない。なぜならば、YA と YE の間に 2 個の比例中項を見いだそうとするならば、YE を直径とする円を描くだけでよい。この円は曲線 AD を点 D において切るから、YD が求める比例中項のひとつである。その証明は、この器具を線 AD にあてがうだけで一目瞭然である。YA またはそれに等しい YB 対 YC は、YC 対 YD であり、さらに YD 対 YE だからである。
同様に、YA と YG の間に 4 個の比例中項を見いだそうとし、または YA と YN の間に 6 個の比例中項を見いだそうとするならば、AF を点 F において切る円 YFG を描き、または AH を点 H において切る円 YHN を描くだけでよい。前者は求める 4 個の比例中項のひとつである直線 YF を決定し、後者は 6 個の比例中項のひとつである YH を決定する。他の場合も同様である。

【デカルト『幾何学』,「デカルト著作集[1]」白水社（2001)】



demonſtration ſoit plus euidente, que d'y employer les lignes courbes qui ſe deſcriuent par l'inſtrument XYZ cy deſſus expliqué. Car, voulant trouuer deux moyennes proportionelles entre YA & YE, il ne faut que deſcrire vn cercle dont le diametre ſoit YE : & pource que ce cercle couppe la courbe AD au point



D, YD eſt l'vne des moyennes proportionelles cherchées. Dont la demonſtration ſe voit a l'œil, par la ſeule application de cet inſtrument ſur la ligne YD : car, comme YA, ou YB qui lui eſt eſgale, eſt a YC, ainſi YC eſt a YD, & YD a YE.

Tout de meſme, pour trouuer quatre moyennes proportionelles entre YA & YG, ou pour en trouuer ſix entre YA & YN, il ne faut que tracer le cercle YFG, qui, couppant AF au point F, determine la ligne droite YF, qui eſt l'vne de ces quatre proportionelles ; ou YHN, qui, couppant AH au point H, determine YH, l'vne des ſix : & ainſi des autres.

Mais, pource que la ligne courbe AD eſt du ſecond

YA と YG の間の 4 個の比例中項、YA と YN の間の 6 個の比例中項を見つけてみよう。また、直角に結びついている定木の数を増やしたとき、2 つの線分の間に見つけられる比例中項の数はどのようになるでしょうか。

［すべて曲線をいくつかの類に分け、そのすべての点が直線の点にたいしてもつ関係を知る方法］

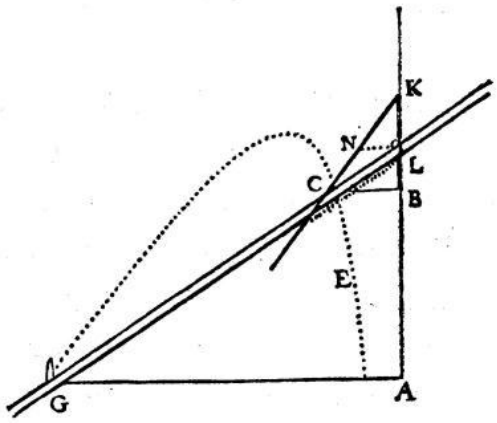
次々と複雑さを増して限りなく進む曲線を描きまた考える手段は、ほかにもいくつか示すことができる。しかし、自然のなかにあるすべての曲線を包括し、それらを順序正しくいくつかの類に分けるためには、次のように述べるのが最もよいと私は考えるのである。幾何学的と名づけうる線、すなわち、何らかの的確で精密な計測を受けうる線のすべての点は、必ず、ひとつの直線のすべての点に対してある関係をもち、この関係は線のすべての点に関して同一の方程式によって表わされうる。そして、この方程式が 2 個の未定量による矩形あるいは同一の未定量による正方形にまでしかのぼらないとき、曲線は第 1 の最も単純な類に属し、そこに含まれるものは円と放物線と双曲線と楕円しかない。しかし、方程式が 2 個の未定量――というのは、ここでは 1 点と他の点との関係を説明するのに 2 個の未定量が必要だからであるが――の双方または一方の第 3 ないし第 4 次元までのぼるときは、曲線は第 2 類に属する。方程式が第 5 ないし第 6 次元までのぼるときは、線は第 3 類に属し、以下同様にどこまでも進む。

【デカルト『幾何学』,「デカルト著作集[1]」白水社（2001）】

この分類の仕方は、どのようなことを意味しているのでしょうか。
デカルトの示した例を考えてみよう。

メモ

たとえば、定木 GL と直線に囲まれた平面 CNKL――その辺 KN は C の方に際限なく伸びている――との交わりによって、線 EC が描かれたと想像し、その線は第何類に属するかを知りたいとしよう。ここに CNKL は下にある平面のうえを直線的に、というのは、その直径 KL がどちらにも伸びた線 BA の何らかの場所に常に重なっているように動かされ、定木 GL を点 G のまわりに回転させるとする。定木は常に点 L を通るように CNKL に結びつけられているためである。私は AB のような直線を選び、曲線 EC のすべての点をその様々な点に関係づける。この線 AB 上に A のような 1 点を選び、そこから計算を始める。これらの双方を選ぶと私が言うのは、もともとこれらは好きなようにとってよいものだからである。というのも、方程式をより短く、より扱いやすいものにするためには大いに選択の余地があるけれども、どのようなとり方をしても、線を常に同じ類のものとしてあらわしうるからであり、その証明は容易である。



【デカルト『幾何学』,「デカルト著作集[1]」白水社（2001)】

どのような曲線かを Cabri Geometry Ⅱを使って考えてみよう。

デカルトはこの道具によって描かれる線を、未知の量 CB、BA を $CB = y$、$BA = x$ とおくことによって描かれる線を方程式にして示しています。実際に線を x、y を使って表す方法を考えていきましょう。

C から GA に平行な線 CB をひく。CB、BA は未知量であるから、それぞれ、

$$CB = y、\ BA = x$$

とする。

また、L から GA に平行な線 NL をひく。既知の量 GA、KL、NL をそれぞれ、

$$GA = a、\ KL = b、\ NL = c$$

とする。

三角形 KNL∽三角形(　　　)であるから、

$$NL : (\quad) = (\quad) : BK$$

$$c : (\quad) = (\quad) : BK$$

$$\therefore \quad \mathrm{BK} = (\quad)$$

したがって、

$$\mathrm{BL} = \mathrm{BK} - (\qquad)$$
$$= (\qquad\qquad\qquad)$$

$$\mathrm{AL} = (\qquad) + \mathrm{BL}$$
$$= (\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

また、三角形 LCB∽三角形(　　　　)であるから、

$$\mathrm{CB} : (\qquad) = (\qquad) : \mathrm{LA}$$
$$y : (\qquad\quad) = (\qquad\quad) : \mathrm{LA}$$
$$y\mathrm{LA} = (\qquad\qquad\qquad\qquad)$$
$$y(\qquad\qquad\qquad\quad) = (\qquad\qquad\qquad\quad)$$

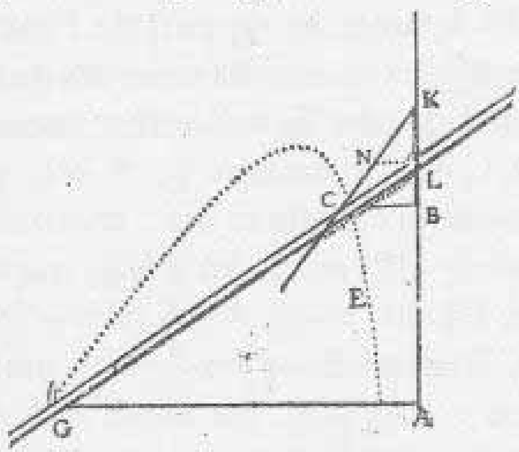
・この曲線は第(　　　　)類である。

・この曲線は(　　　　　　)である。

『幾何学』

la trois ou quatrieſme dimenſion des deux ou de l'vne des deux quantités indeterminées : car il en faut deux pour expliquer icy le rapport d'vn point a vn autre : elle eſt du ſecond. Et que, lorſque l'equation monte iuſques a la 5 ou ſixieſme dimenſion, elle eſt du troiſieſme : & ainſi des autres a l'infini.

Comme, ſi ie veux ſçauoir de quel genre eſt la ligne EC, que i'imagine eſtre deſcrite par l'interſection de la reigle GL & du plan rectiligne CNKL, dont le coſté KN eſt indefiniement prolongé vers C, & qui, eſtant meu ſur le plan de deſſous en ligne droite, c'eſt a dire en telle ſorte que ſon diametre KL ſe trouue touſiours appliqué ſur quelque endroit de la ligne BA prolongée de part & d'autre, fait mouuoir circulairement cete reigle GL autour du point G, a cauſe qu'elle luy eſt tellement iointe qu'elle paſſe touſiours par le point L. Ie choiſis vne ligne droite, comme AB, pour rapporter a ſes diuers poins tous ceux de cete ligne courbe EC, & en cete ligne AB ie choiſis vn point, comme A, pour commencer par luy ce calcul. Ie dis que ie choiſis & l'vn & l'autre, a cauſe qu'il eſt libre de les prendre tels qu'on veult : car, encore qu'il y ait beaucoup de choix pour rendre l'equation plus courte & plus ayſée, toutefois, en quelle façon qu'on les prene, on peut touſiours faire que la



この曲線を描くのに使う器具で、平面 CNKL を限るものが直線 CNK でなく、この双曲線、あるいは第 1 類の他の何らかの曲線であるようにすれば、この線と定木 GL との交わりは、双曲線 EC のかわりに、第 2 類に属する他の曲線を描くであろう。たとえば、CNK が L を中心とする円であれば、古代人の第 1 コンコイドが描かれるであろうし、KB を直径とする放物線であれば、私が先ほどパップスの問題に関して最初の最も単純な線と言ったもの、つまり位置に関して与えられた直線が 5 本しかない場合の〔或る〕線が描かれるのである。しかし、平面 CNKL を限るものが第 1 類のこれらの線でなくて、第 2 類の曲線の 1 つであるならば、それによって第 3 類の線のひとつが描かれるであろうし、第 3 類の線のひとつが使われるならば、第 4 類の線のひとつが描かれ、以下同様にどこまでも進むであろう。

【デカルト『幾何学』,「デカルト著作集[1]」白水社（2001）】

（下線部加筆；授業者）

メモ

2時間目の資料の中のメソラボス･コンパスの描く線の説明の中にも､｢あとに来る線ほど最初の線に比べて複雑であり、最初の線自体は円より複雑である。｣という表現があります。これはどういうことなのでしょうか。デカルトの提案した曲線の分類法を用いて説明してみましょう。
（YA は定数なので、YA＝1 として考えるとどうなるでしょうか。）