2 時間目

年　組　番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

# 授業資料

## デカルトの幾何学～新しい方法～


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Auec Priuilege.

授業者：新木　伸次
（筑波大学大学院修士課程教育研究科 1 年）

［平面的な問題とは何か］

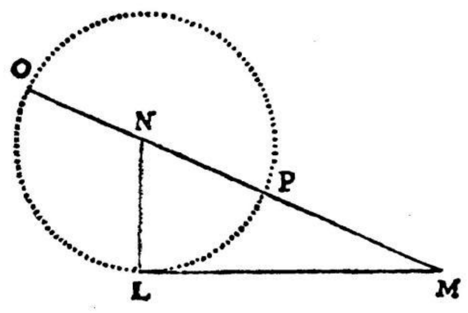
次に、問題が通常の幾何学によって解ける場合、つまり平面上に描かれた直線と円だけを用いて解ける場合は、最後の方程式が完全に整理されたとき、たかだか 1 個の未知の平方が方程式の根に或る既知量を掛けたものと、やはり既知の他の或る量との加法か減法によって生ずるものに等しい、ということになるであろう。

［それはどうして解けるか］

こうなれば、この根、つまり未知の線は容易に見いだされる。なぜならば、たとえば、

$$z^2 = az + bb$$

が得られたとすれば、直角三角形 NLM を作って、辺 LM を既知量 $bb$ の平方根 $b$ に等しく、他の辺 LN を $\frac{1}{2}a$、つまり未知の線と仮定する $z$ が掛かっていた他の量の半分にする。次に、この三角形の底辺 MN を O まで延長して、NO が NL に等しくなるようにすれば、全体 OM が求める線 $z$ である。そしてこの線は次のように表される。




$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

もし、

$$yy = -ay + bb$$

が得られたとし、$y$ が見いだされるべき量であるとすれば、同じ直角三角形 NLM を作り、底 MN から NL に等しい NP を除けば、残り PM がもとめる根 $y$ である。ここでは、

$$y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

が得られる。

同様に、もし

$$x^4 = -ax^2 + b^2$$

が得られたのであれば、PM は $x^2$ であり、

$$x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$$

となるであろう。他の場合も同様である。

【デカルト『幾何学』,「デカルト著作集[1]」白水社（2001)】

デカルトの方程式の解の表現を考えてみよう。

（$z^2 = az + bb$ が得られたときの場合）
方べきの定理より、

$$\mathrm{MO} \cdot (\qquad) = (\qquad)^2$$

であり、

$$\mathrm{MO} \cdot (\mathrm{MO} - (\qquad)) = (\qquad)^2$$

ここで、$\mathrm{LM} = b$、$\mathrm{LN} = \frac{1}{2}a$ であるから、

となり、

これは与えられた方程式と同じ形であるから、MO が求める線 $z$ であることがわかる。
次に、MO を違う表しかたをすると、
三角形 NLM は直角三角形であるから、

$$\mathrm{MN} = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$

ここで、$\mathrm{LM} = b$、$\mathrm{LN} = \frac{1}{2}a$ であるから、$a$、$b$ を使って表すと、

$$\mathrm{MN} = \sqrt{(\qquad\qquad\qquad\qquad)}$$

また、OM は MN を延長したものであるから、

$$\mathrm{MO} = (\qquad) + \mathrm{MN}$$

であり、　$\mathrm{NO} = \mathrm{NL}$ であるから、求める線 $\mathrm{OM} = z$ は、

（$yy=-ay+bb$が得られたときの場合）

方べきの定理より、

$$\mathrm{MO}\cdot(\qquad)=(\qquad)^2$$

であり、

ここで、$\mathrm{LM}=b$、$\mathrm{LN}=\frac{1}{2}a$であるから、

となり、

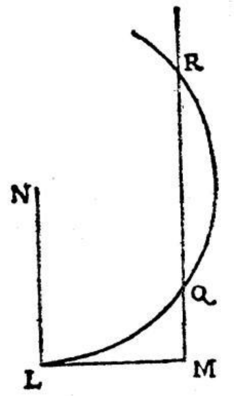
これは与えられた方程式と同じ形であるから、PM が求める線 $y$ であることがわかる。

次に、PM を違う表しかたをすると、

最後に、

$$z^2 = az - bb$$

が得られたのであれば、前と同様に NL を$\frac{1}{2}a$に等しく、LM を $b$ に等しくしたうえ、点 M, N を結ぶかわりに、LN に平行に MQR をひき、N を中心として L を通る円を描いて、MQR を点 Q, R において切る。求める線 $z$ は MQ または MR である。なぜならば、この場合には z はふたつの仕方、すなわち




$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$

および $$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$

によってあらわされるからである。

点 N を中心とし点 L を通る円が直線 MQR を切ることも、これに接することもないならば、方程式にはまったく根がなく、提出された問題の作図は不可能と断定することができる。

【デカルト『幾何学』,「デカルト著作集[1]」白水社（2001)】

（$z = \mathrm{MQ}$ となるとき）

方べきの定理より、

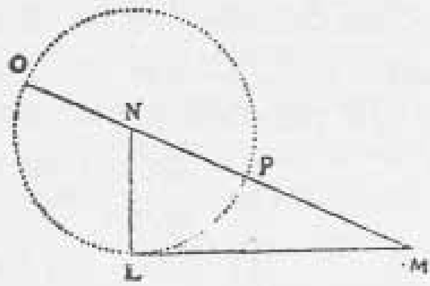
$$\mathrm{ML}^2 = (\qquad)\cdot \mathrm{MQ}$$

となり、MQ が得られた方程式の形を満たすことがわかる。

次に、MQ を違う表し方をすると、

『幾何学』

ie ſais le triangle rectangle NLM, dont le coſté LM eſt eſgal a $b$, racine quarrée de la quantité connue $bb$, & l'autre, LN, eſt $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par $z$, que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. Puis, prolongeant MN, la baze de ce triangle, iuſques a O, en ſorte qu'NO ſoit eſgale a NL, la toute OM eſt $z$, la ligne cherchée[a]. Et elle s'exprime en cete ſorte :




$$z \infty \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}.\ ^*$$

Que ſi i'ay

$$yy \infty -ay + bb,$$

& qu'$y$ ſoit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le meſme triangle rectangle NLM, & de ſa baze MN i'oſte NP eſgale a NL, & le reſte PM eſt $y$, la racine cherchée. De façon que i'ay

$$y \infty -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}.\ ^*$$

Et tout de meſme, ſi i'auois

$$x^4 \infty -ax^2 + b^2,$$

PM ſeroit $x^2$, & i'aurois

$$x \infty \sqrt{-\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}};\ ^*$$

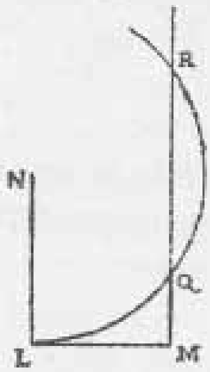
& ainſi des autres.

『幾何学』

Enfin ſi i'ay

$$z^2 \propto az - bb,$$

ie fais NL eſgale a $\frac{1}{2}a$, & LM eſgale a $b$, comme deuant; puis, au lieu de ioindre les poins M, N, ie tire MQR parallele a LN, & du centre N, par L, ayant




deſcrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée $z$ eſt MQ, ou bien MR, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, a ſçauoir

$$z \propto \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - bb},$$

$$\& \; z \propto \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - bb}.$$

Et ſi le cercle qui, ayant ſon centre au point N, paſſe par le point L, ne couppe ny ne touche la ligne droite MQR, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut aſſurer que la conſtruction du probleſme propoſé eſt impoſſible*.

|Au reſte, ces meſmes racines ſe peuuent trouuer par vne infinité d'autres moyens, & i'ay ſeulement voulu mettre ceux cy, comme fort ſimples, affin de faire voir qu'on peut conſtruire tous les Probleſmes de la Geometrie ordinaire, ſans faire autre choſe que le peu qui eſt compris dans les quatre figures que i'ay expliquées. Ce que ie ne croy pas que les anciens ayent remarqué; car, autrement, ils n'euſſent pas pris la peine d'en eſcrire tant de gros liures, où le ſeul ordre de leurs propoſitions nous fait connoiſtre qu'ils n'ont point eu la vraye methode pour les trouuer toutes, mais qu'ils ont ſeulement ramaſſé celles qu'ils ont rencontrées.

* N.

［幾何学に受け入れられる曲線はどのようなものか］

幾何学の問題のうち、或るものは平面的、或るものは立体的、或るものは曲線的であることに古代人は十分気づいていた。すなわち、或るものは直線と円を描くだけで作図しうるが、或るものは少なくともある円錐曲線を用いなければ作図しえず、最後に他のものはより複雑な他の曲線を用いなければ作図しえない、という意味である。しかし、彼らがさらに進んで、より複雑なこれらの線の間に種々の段階を区別しなかったことに私は驚かざるをえないし、彼らがこれらの線をどうして幾何学的と呼ばずに機械的と呼んだか、理解に苦しむ。なぜならば、これらを描くには何らかの機械を使うことが必要だからと言うのであれば、同じ理由で、円と直線も〔幾何学から〕退けねばなるまい。これらを紙の上に描くにはコンパスと定木を使わねばならず、これも機械にちがいないからである。また、これらの複雑な曲線を描くに用いられる器具は定木やコンパスより複雑なため、あまり正しくはありえない、という理由からでもない。なぜならば、このような理由からは、人の手になる作品の正しさが要求される機械学からこれを退けるべきであって、推論の正しさだけが求められる幾何学から退けるのは当たるまい。幾何学はたしかに他の線に関してと同様にこれらの線に関しても完全な知識を与えうるのである。古代人が要請の数を増すことを好まず、与えられた 2 点を直線で結び、また与えられた点を中心とし与えられた点を通る円を描きうるということに同意を得るだけで足れりとしたためであるともいえない。現に彼らは、これらのこと以外に、円錐曲線を論ずるため、与えられたあらゆる円錐を与えられた平面によって切りうると仮定することを辞さなかったのである。それに、私がここに導入しようとしているあらゆる曲線を描くためには、2 本またはそれ以上の線が互いによって動かされ、それらの交点が他の線を作り出す、ということを仮定するだけでよいのであって、この仮定が古代人のものよりむずかしいとは私には思えない。いかにも、古代人は円錐曲線を完全には彼らの幾何学に受けいれなかったし、私としても慣用によって確立された用語を変えるつもりはない。

（中略）

あるいは、円錐曲線についてまだわずかなことしか知らないことを彼らは自覚し、また定木とコンパスで作りうるものについてさえ未知のことが多いのを自覚して、より困難な主題には手をつけるべきではないと考えたのかもしれない。しかし、私が提案する幾何学的計算を使いこなすほどの人ならば、今後、平面ないし立体問題に暇をかけることはあるまいと思うから、これらの人々には、訓練の材料にけっしてこと欠かぬ他の研究をすすめるのが至当であると考えるのである。

【デカルト『幾何学』,「デカルト著作集[1]」白水社（2001)】

# LA GEOMETRIE

## LIVRE SECOND.

### *De la nature des lignes courbes.*

Quelles ſont les lignes courbes qu'on peut receuoir en Geometrie.

Les anciens ont fort bien remarqué qu'entre les Probleſmes de Geometrie, les vns ſont plans, les autres ſolides, & les autres lineaires : c'eſt a dire que les vns peuuent eſtre conſtruits en ne traçant que des lignes droites & des cercles; au lieu que les autres ne le peuuent eſtre, qu'on n'y employe pour le moins quelque ſection conique; ni enfin les autres, qu'on n'y employe quelque autre ligne plus compoſée. Mais ie m'eſtonne de ce qu'ils n'ont point, outre cela, diſtingué diuers degrés entre ces lignes plus compoſées, & ie ne ſçaurois comprendre pourquoy ils les ont nommées Mechaniques, plutoſt que Geometriques. Car, de dire que ç'ait eſté a cauſe qu'il eſt beſoin de ſe ſeruir de quelque machine pour les deſcrire, il faudroit reietter, par meſme raiſon, les cercles & les lignes droites, vû qu'on ne les deſcrit ſur le papier qu'auec vn compas & vne reigle, qu'on peut auſſy nommer des machines. Ce n'eſt pas non plus a cauſe

## 立方体の倍積の問題

一辺 $a$ の立方体の倍の体積を持つ立方体を作るには、

$x^3 = 2a^3$ となるような、一辺 $x$ を作図すればよい

ということが分かります。どうすればこの $x$ は作図できるのでしょうか。

キオス（ギリシャ）のヒポクラテス（紀元前 5 世紀頃）は、2 つの線分の間に 2 つの比例中項を見つければよいということを発見しました。

$a$ と $b$ の間に 2 つの比例中項を見つけるとは、

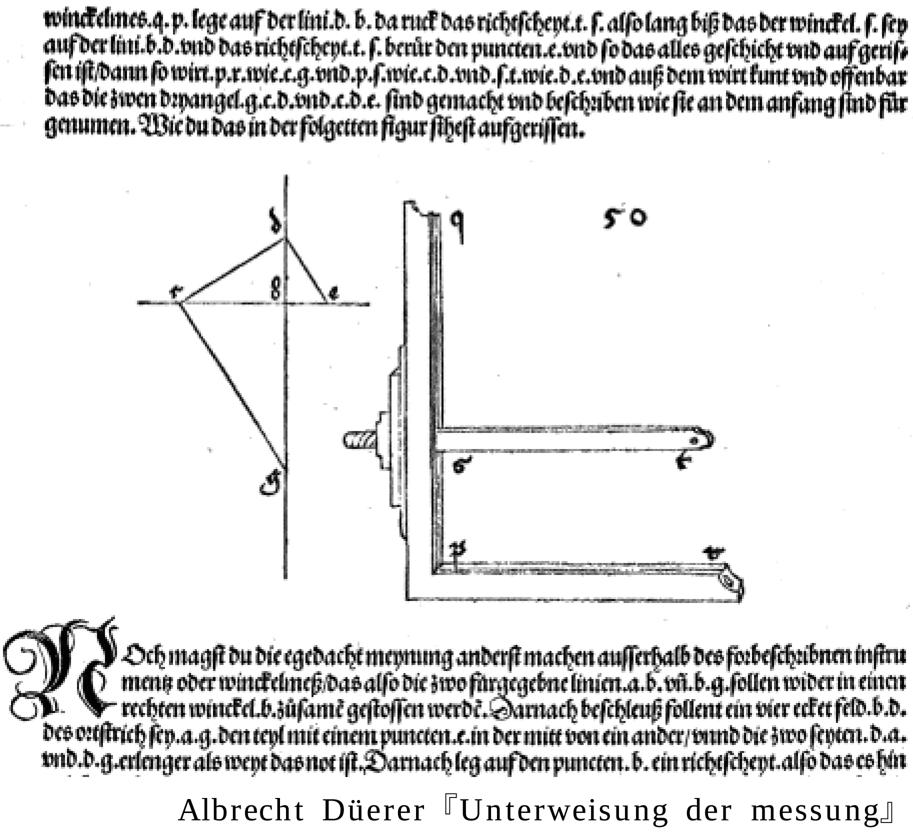
$$a : x = x : y = y : b$$

という $x$、$y$ を見つけるということです。（立方体の倍積問題の時は、$b = 2a$ として考えればよい。）

2 つの線分の間に 1 つの比例中項を作図することはできます。

どのようにすれば 2 つの比例中項を作図することができるのでしょうか。

下の絵は 2 つの線分の間に 2 つの比例中項を求めることができる道具です。下の道具自体は紀元前 4 世紀頃には考え出されていました。



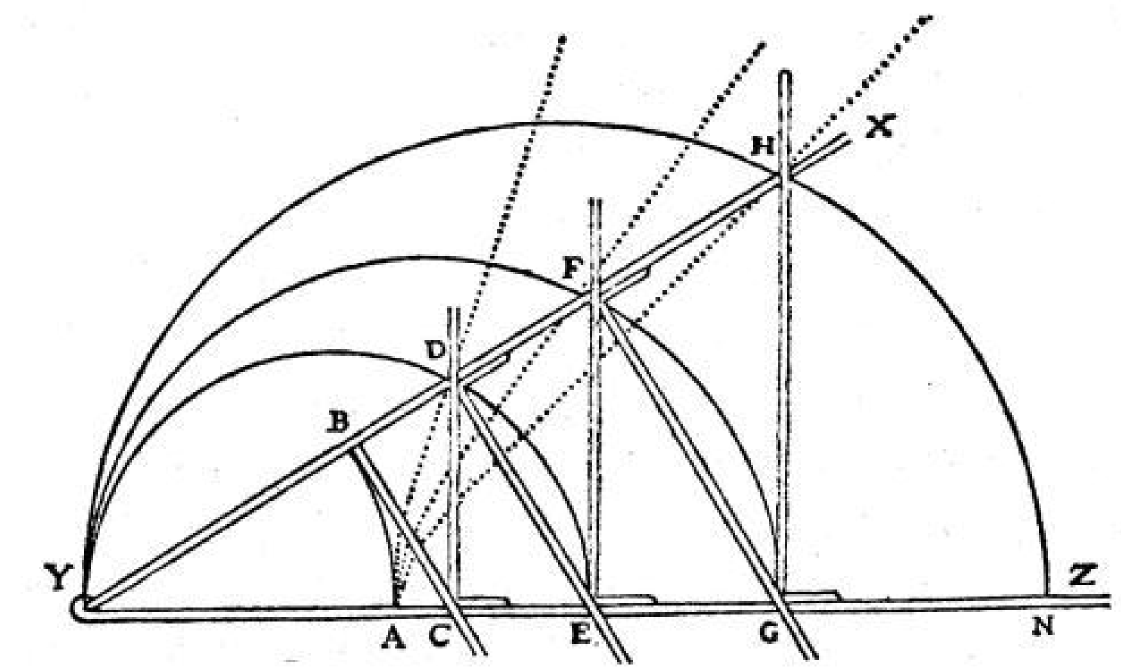
winckelmes.q.p. lege auf der lini.d.b. da ruck das richtscheyt.t.f. also lang biß das der winckel.f. sey auf der lini.b.d.vnd das richtscheyt.t.f. berür den puncten.e.vnd so das alles geschicht vnd auf gerissen ist/dann so wirt.p.r.wie.c.g.vnd.p.f.wie.c.d.vnd.f.t.wie.d.e.vnd auß dem wirt kunt vnd offenbar das die zwen dryangel.g.c.d.vnd.c.d.e. sind gemacht vnd beschriben wie sie an dem anfang sind für genumen. Wie du das in der folgetten figur sihest aufgerissen.

50

NOch magst du die egedacht meynung anderst machen ausserhalb des forbeschribnen instruments oder winckelmeß/das also die zwo fürgegebne linien.a.b.vñ.b.g.sollen wider in einen rechten winckel.b.zůsamē gestossen werdē. Darnach beschleuß sollent ein vier ecket feld.b.d. des ortstrich sey.a.g.den teyl mit einem puncten.e.in der mitt von ein ander/vnnd die zwo seyten.d.a. vnd.d.g.erlenger als weyt das not ist. Darnach leg auf den puncten.b. ein richtscheyt.also das es hin

Albrecht Düerer『Unterweisung der messung』（1525）

メソラボス・コンパスについては、1 時間目の最初の道具の仕組みの説明の後に、次のように著されています。

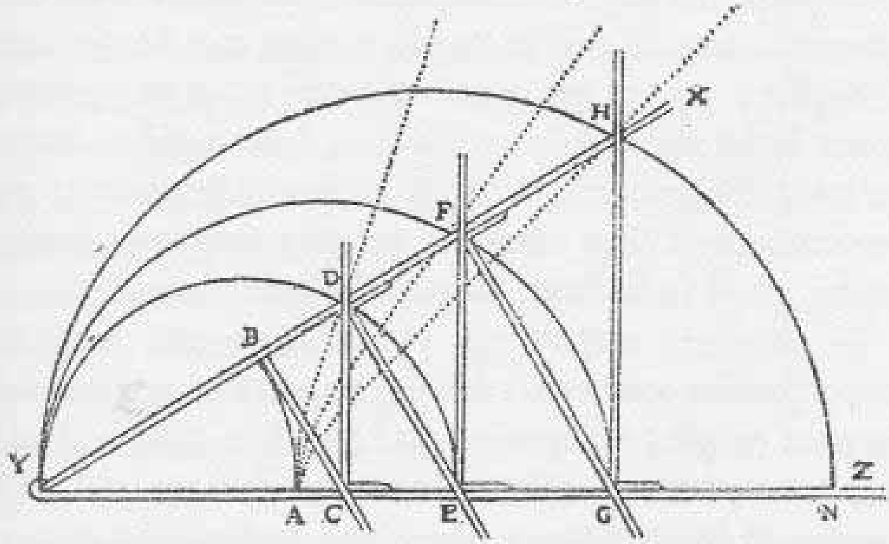



さて、このようにして角 XYZ を開く間に、点 B は線 AB を描くが、これは円である。他の定木が交差する他の点 D、F、H は他の線 AD、AF、AH を描く。あとに来る線ほど最初の線に比べて複雑であり、最初の線自体は円より複雑である。しかし、この最初の線の描き方を、円の場合、少なくとも円錐曲線の場合と同様に明晰判明に考えるのをさまたげるものは何もないはずである。また、第 2、第 3、そのほか描きうるかぎりの線を第 1 の線と同様に考え、したがって、それらすべてを同様に受け入れて、幾何学の研究に使うのをさまたげるものもないはずである。

【デカルト『幾何学』,「デカルト著作集[1]」白水社（2001)】

（下線部加筆；授業者）

Voyés les lignes AB, AD, AF & femblables, que ie fuppofe auoir efté defcrites par l'ayde de l'inftrument YZ[a], qui eft compofé de plufieurs reigles, tellement iointes que, celle qui eft marquée YZ eftant areftée fur la ligne AN, on peut ouurir & fermer l'angle XYZ, & que, lorfqu'il eft tout fermé, les poins B, C, D, <E>[b] F, G, H font tous affemblés au point A;




mais qu'a mefure qu'on|l'ouure, la reigle BC, qui eft iointe a angles droits auec XY au point B, pouffe vers Z la reigle CD, qui coule fur YZ en faifant toufiours des angles droits auec elle; & CD pouffe DE, qui coule tout de mefme fur YX en demeurant parallele a BC; DE pouffe EF; EF pouffe FG; celle cy pouffe GH; & on en peut conceuoir vne infinité d'autres, qui fe pouffent confequutiuement en mefme façon, & dont les vnes facent toufiours les mefmes angles auec YX, & les autres auec YZ. Or, pendant

a. XYZ *Schooten*.
b. E *a été ajouté par Schooten*.

Cabri Geometry Ⅱを使って、実際にメソラボス･コンパスを作って動かしてみよう。

メモ