1 時間目

年　組　番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

授業資料

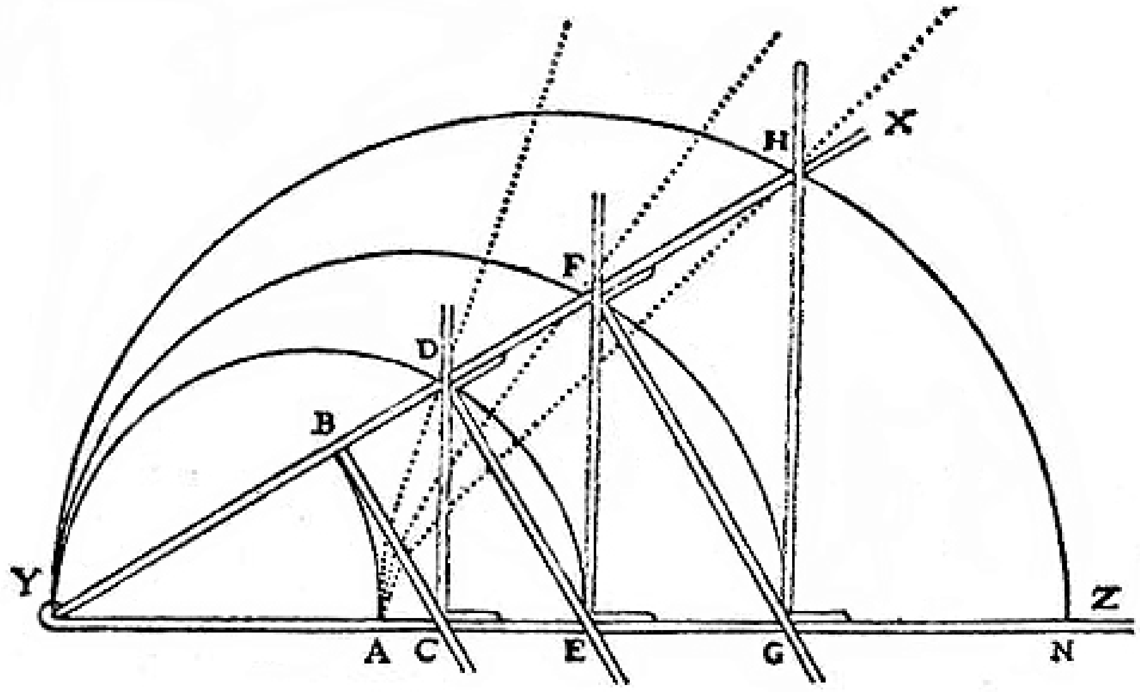
デカルトの幾何学～新しい方法～


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQUE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
cIↃ IↃ C XXXVII.
Auec Priuilege.

授業者：新木　伸次
（筑波大学大学院修士課程教育研究科 1 年）

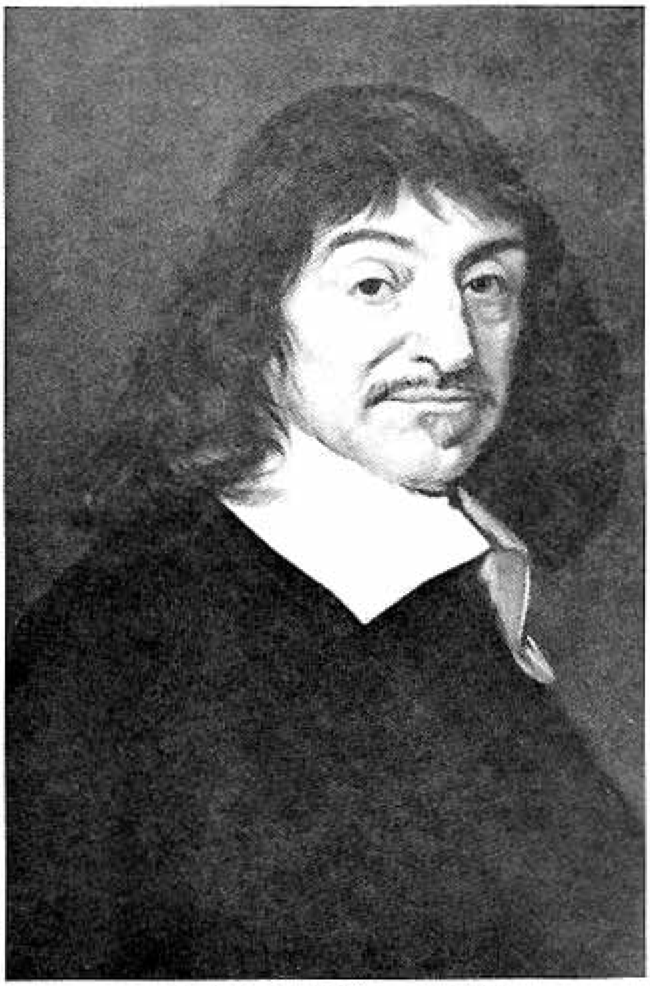
**次の道具はデカルトの著した『幾何学』の中で使われているものです。
これは何をするための道具なのでしょうか。また、デカルトはなぜこのような道具を使ったのでしょうか。**



○道具の仕組み

この器具は互いに結びついた多くの定木で作られていて、YZ と記されたものは線 AN 上に固定されており、角 XYZ は開いたり閉じたりすることができる。これをすっかり閉じたときは、点 B、C、D、E、F、G、H はすべて点 A のところに集まるが、角を開くにつれて、点 B で XY に直角に結びついている定木 BC は定木 CD を Z の方に押し、CD は YZ と常に直角をなしながらそのうえを滑り、DE を押す。DE は BC と平行を保ちながら XY 上を滑って、EF を押す。EF は FG を押し、FG は GH を押す。以下、同様の仕方で或るものは XY を常に同じ角をなし、他のものは YZ と同じ角をなしながら、次々を押しあってゆく無数の定木を考えることができるわけである。
【デカルト『幾何学』原亨吉訳,「デカルト著作集[1]」白水社（2001)】

ルネ・デカルト René Descartes（1596〜1650）



デカルト（フランス ハルス画）

・フランスのトゥーレーヌのラ・エに生まれる
・哲学者、軍人、紳士、数学者
・著書には『精神指導の規則』、『宇宙論』、『方法序説』などがある。

『幾何学』は、『方法序説』における方法について述べる三つの試論の中の一つである。ちなみに、他の二つは『屈折光学』、『気象学』である。

次の文はデカルトの『方法序説』の中の一節です。
この内容を 3 時間の授業で理解しよう。

私はもっと若いころ、〈哲学〉のいろいろな部門のうちでは〈論理学〉を、〈数学〉のうちでは〈幾何学者たちの解析〉と〈代数学〉を少しは熱心に勉強しました。この三つの技術あるいは学問が私の計画に何か役に立つはずだと思われたのです。(中略)それから、古代人の〈解析〉と近代人の〈代数学〉のほうは、ひどく抽象的で何の使いみちもないような素材にばかり手をひろげるだけでなく、前者はいつも図形の考察にしばられているので、理解力をはたらかせようと思うと想像力をたいへん疲れさせずにはおかれないほどです。そして後者のばあいは、ある種の規則とある種の数字に従わなければならなかったので、精神をつちかう学問であるかわりに、精神のはたらきを妨げる、あいまいでわかりにくい技術になってしまったのです。以上のような理由から私は、これらの三つの学問の利点をふくんでいながら、その欠点を抜きにした、何かほかの〈方法〉を求めなければならないと考えました。

(中略)

その対象は違っていても、そこに見いだされるいろいろな比あるいは比例以外のものは考察しないという点で、それらの個々の学問がけっきょくは一致するのを見て、私はただこうしたいろいろな比例を全般的に検討するほうがよいと考えました。そしてそういう比例を、いっそう楽に認識させてくれるのに役立つ元になる素材のなかにしか想定せず、しかもそこだけに少しもしばりつけることもしないのです。それから、いろいろな比例をそれにふさわしいほかのどんな基体にも、それだけうまくあてはめられるようにするためです。それから、いろいろな比例を認識するためには、ときにはそのひとつひとつを個々に考察することが必要だろうし、またそのときにはそれをただ記憶にとどめておくなり、いくつも一緒に取りあげるなりすることも必要だろうと気づいて、私は比例を個々にいっそうよく考察するためには、それを線において想定すべきだと考えました。これよりも単純なもの、これよりも私の想像力と感覚にまぎれなくあらわせるものが何も見あたらなかったからです。しかし比例を記憶にとどめるなり、いくつもいっしょに取りあげるなりするためには、それをできるだけ簡潔ないくつかの記号によって明示することが必要だと考えました。そしてこういう手だてで、〈幾何学的解析〉と〈代数学〉との最良の部分をすっかり借りあげ、一方の欠陥をどれもみなもう一方によって正そうと考えました。

【デカルト『方法序説』第 2 部,「デカルト著作集[1]」白水社(2001)】
(下線部加筆;授業者)

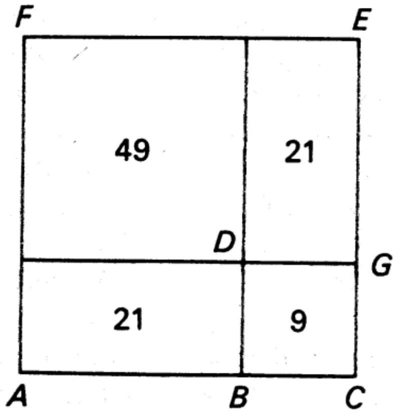
voyant qu'encore que leurs obiets ſoient differens, elles ne laiſſent pas de s'accorder toutes, en ce qu'elles n'y conſiderent autre choſe que les diuers rappors ou proportions qui s'y trouuent, ie penſay qu'il valoit mieux que i'examinaſſe ſeulement ces proportions en general, & ſans les ſuppoſer que dans les ſuiets qui ſeruiroient a m'en rendre la connoiſſance plus ayſée; meſme auſſy ſans les y aſtreindre aucunement, affin de les pouuoir d'autant mieux appliquer aprés a tous les autres auſquels elles conuiendroient. Puis, ayant pris garde que, pour les connoiſtre, i'aurois quelquefois beſoin de les conſiderer chaſcune en particulier, & quelquefois ſeulement de les retenir, ou de les comprendre pluſieurs enſemble, ie penſay que, pour les conſiderer mieux en particulier, ie les deuois ſuppoſer en des lignes, a cauſe que ie ne trouuois rien de plus ſimple, ny que ie puſſe plus diſtinctement repreſenter a | mon imagination & a mes ſens; mais que, pour les retenir, ou les comprendre pluſieurs enſemble, il falloit que ie les expliquaſſe par quelques chiffres, les plus courts qu'il ſeroit poſſible; et que, par ce moyen, i'emprunterois tout le meilleur de l'Analyſe Geometrique & de l'Algebre, & corrigerois tous les defaus de l'vne par l'autre.

Comme, en effect, i'oſe dire que l'exacte obſeruation de ce peu de preceptes que i'auois choiſis, me donna telle facilité a demeſler toutes les queſtions auſquelles ces deux ſciences s'eſtendent, qu'en deux ou trois mois que i'employay a les examiner, ayant commencé par les plus ſimples & plus generales, & chaſque verité que ie trouuois eſtant vne reigle qui me

デカルト以前の代数学

ジェラルモ・カルダノ（1501～1576）は方程式について、次のように図を使って説明している。

「$x^2+6x=91$の方程式について」



正方形 FD と $6x$ が 91 に等しいとする。

そのとき x の係数 6 の半分 3 である DB、DG を作り、正方形 DGCB を完成させると、そのとき CG、CB が作られる。

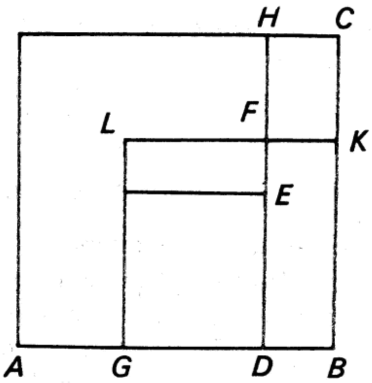
すると、ちょうど『原論』のⅡ，4 におけるように、正方形 AFEC が完成する。

AB の DB 倍は、『原論』の 2 巻の中の定義から、面 AD を与える。任意の係数と x の値の積は、x の項の数の値を与える。（もし、x が 4 で $5x$ の項があるとするならば、$5x$ の項は 20 だろう。）それゆえに、BDが 3 で AB が x の値のとき、面 AD は $3x$ か $3x$ の値に等しいだろう。

しかし、『原論』のⅠ，43 により面 DE は AD に等しく、ゆえにそれは別の $3x$ の項の値である。それゆえに 2 つの面 AD と DE は $6x$ に等しい。それに正方形 FD を加えたものは 91 である。

しかし、BD は 3 であるので正方形 CD が 9 である。ゆえに AC の平方は 100 である。その辺 AC は 10 である。ゆえに、BC が 3 であるので、AC から BC を引くことで 7 として DF の辺である AB がのこる。

「$x^2=6x+16$の方程式について」



正方形 AC が $6x$ に 16 を加えたものに等しいとする。

AD が x の係数であり、6 である。すると、面 AH は $6x$ であり、残りの DC は確実に 16 になるだろう。

AD は G で等分割され、GB の平方である GK と GD の平方である GE とを作図する。

よって、BC は BA に等しく、BK は BG に等しい。KC は GA に等しいだろう。また、GD と FL にも等しい。DE と DG は互いに等しく、DF と BG も同様に等しい。FE は DB に等しいだろう。それゆえに FK もまた等しい。

それゆえに 2 本の線 FK と FH は FL と FE に等しく、A、D、F での角は直角であ

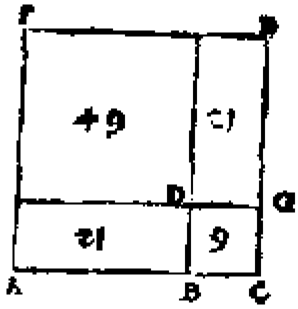
る。それゆえに面 FC は LE に等しい。しかし FC 足す FB は 16 に等しく、それゆえに、LE 足す FB は 16 に等しい。正方形 GE を加えることによって、（GD は 3 なので）GK は 25 になる。それゆえに辺 GB は 5 になり、これに GA である 3 を加えることで x の値である合計 8 である AB を作る。

次の問題を図で説明してみましょう。

「$x^2+60=16x$ の方程式について」

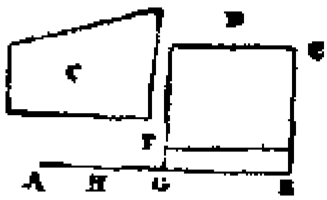
＜解法＞
１．16 の半分の 8 をとる。
２．8 を平方して 64 を得る。
３．64－60＝4
４．4 の平方根 2 をとる。
５．8－2 と 8＋2 から、6 と 10 を得る。

citur ex 4 æstimatiõe rei in ç numerum rerũ, ut ostendimus in capitulo tertio, igitur cum B D sit 3, & A B æstimatio rei, erit superficies A D tribus rebus æqualis, seu æstimatio trium rerum, at superficies D E æqualis est A D, ex 43ª primi elementorum, igitur & ipsa est æstimatio trium aliarum rerum, duæ igitur superficies, A D & D E, sunt æquales 6 rebus, quare ipsæ cum quadrato F D sunt 91, at quadratum, C D est 9, quia B D est 3, igitur A C quadratum est 100, quare latus eius A C est 10, cum igitur B C sit 3, detracta B C ex A C, relinquitur A B latus de 7.



Alia Demonstratio.

Sit modo A B numerus rerum quarumdam, æqualium C numero & quadrato D, & faciam quadratum B G dimidij A B, quod sit G B, à quo auferam C numerum, ut E F superficies æqualis sit numero C, & ponam latus quadrati, F B superficiei, quod sit G H, dico lineas B H & H A esse utrasque latera quadrati D, unde sequitur duas fore ueras æstimationes huius capituli, quarum aggregatum est æquale numero rerum, uidelicet A B, constat enim quod rectangulum ex A H in H B, una cum quadrato H G est æquale quadrato B G, ex 5ª 2ª elementorum, quadratum autem H G æquale fuit F B superficiei, rectangulum igitur ex A H in H B, æquale est E F, quare & C numero, quod autem fit ex A B in H B, ex 3ª 2ª elementorũ, æquale est quadrato H B & rectangulo A H in H B, igitur quod fit ex numero rerum A B in æstimationem rei quę est H B, æquale est numero C, & quadrato H B, quod est probandum. Et similiter eadem ratione rectangulum ex A B in A H, æquale est quadrato A H, & ductui A H in H B, sed ex A H in H B, ut probatum est, fit C numerus, igitur rectangulum ex A B in A H, scilicet ex numero rerum in rerum æstimationẽ, æquatur quadrato rei & numero proposito.



Ex hoc patet, quod illi falluntur qui dicunt (quòd si B H, gratia exempli) sit æstimatio rei, & G F 3, quod rectangulum ex B H in G F erit 3 G H seu triplum G H, hoc enim esse non potest, scilicet quod superficies contineat lineam aliquam, neque numero, nec alia proportione, cum infinitę lineæ possint esse in superficie, quantitas enim continua nullum fere diuisionis recipit terminum, sed ueritas est, quod si G F contineat tres unitates (gratia exempli) id est partes tres lineæ B H, dimisę

C 2 in

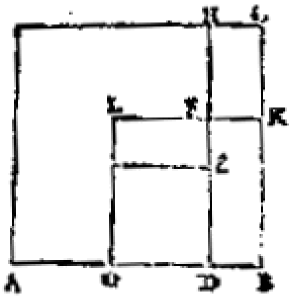
カルダノ『Ars Magna』

in tot partes, quot unitates sunt in numero quem dicitur continere, ut puta quod B H ponatur 12, erit G F 3, ubi G F sit quarta pars B H, & tunc uerum est, quod ex B H in G F fit superficies continens 36 superficies quadratas, quarum uniuscuiusque tetragonicum latus est unitas, id est una ex partibus illis, secundum quas B H est diuisa in 12, & G F in 3, hoc autem tam in rationalibus, quam in irrationalibus pulchre ostendit Plato in Memnone.

Nec admireris, hanc secundam demonstrationem, aliter quam à Mahumete, explicari, nam ille immutata figura magis ex re ostendit, sed tamen obscurius, nec nisi unam partem, eamque pluribus, unde nos facilitati & breuitati consulentes, tum ut utrique aestimationi una demonstratione satisfaceremus, hac utimur.

Alia Demonstratio.

3 Sit modo quadratum A C in tertia figura, aequale 6 rebus & 16 numero, & ponatur A D numerus rerum, scilicet 6, igitur superficies A H est 6 positiones, quare D C residuū erit precise 16, diuidatur A D per aequalia in G, & fiant quadrata G B & G D, quae sint G K & G E. Quia igitur B C equalis est D A, & B K aequalis B G, erit K C aequalis G A, quare etiam G D & F L, & quia D E & D G sunt aequales, item D F & B G, erit F E aequalis D B, quare etiam equalis F K, duae igitur lineae E K & F H, aequales sunt F L & F E, & anguli A D F recti, igitur F C superficies aequalis est L E, sed F C cum F B fuit 16, igitur L E cum F B fuit 16, addito quadrato G E quod est 9, nam G D fuit 3, erit G K



quadratum 25, igitur latus G K 5, addita igitur G A, quae est 3, fiet A B tota 8, rei aestimatio.

4 Secundum haec formabimus regulas tres, pro quarum memoria subiungemus Carmen hoc,

Quema, da bis. Nuquer, admi. Requan, Minue dami.

Regula I.

Est autem unicuique horum capitulorum commune, ut dimidium numeri rerum in se ducatur. Quando igitur quadratum aequatur rebus & numero, quod significatur per Quema siue primam tantum intelligas literam seu admonere sequentes à prima uocali cōsonantes, ut Quema, quadratū aequale rebus & numero significet, & Nuquer, Numerum quadrato ac rebus aequalem, & Requan, res quadrato & numero aequales. In hoc Quema igitur, seu capitulo quadrati aequalis

カルダノ『Ars Magna』

そしてこの点をさらに注意深く考察するなら人はついに次のことに気づくであろう、すなわち、順序（ordo）或いは計量的関係（mensura）の研究せられるすべての事物しかもただそれのみが、数学に関係し、かつそういう計量関係が、数において或いは図形において或いは星において或いは音においてまたその他のいかなる対象において、求められるかは、問題でない、ということ。従って何ら特殊な質量に関わりなく、順序と計量関係とについて求められうるすべてのことを、説明するところの或る一般的な学問がなければならぬこと。かつそれは外来の名を以ってでなくすでに古くから慣用されている名を以って、普遍数学（Mathesis universalis）と呼ばれるべきであること――というのはその他の学問が数学の部分と呼ばれるときその理由となっているすべての事柄は、それに含まれているからである――。

【デカルト「精神指導の規則」野田又夫訳　岩波書店】

LA GEOMETRIE

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.

Tous les Problesmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin, par aprés, que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée que de quatre ou cinq operations, qui ſont : l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion *; ainſi n'a-t-on autre choſe a faire, en Geometrie, touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter; ou bien, en ayant vne

Comment le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

* *Nous indiquons, par des étoiles, les endroits auxquels se rapportent les commentaires de Schooten dans ses éditions latines de la* GEOMETRIE (1649 et 1659). *La lettre de renvoi correspondante est, pour cette page,* A.

第 1 巻

円と直線だけを用いて作図しうる問題について

幾何学のすべての問題は、いくつかの直線の長ささえ知れば作図しうるような諸項へと、容易に分解することができる。

［**算術の計算は幾何学の操作にどのように関係するか**］

そして、全算術がただ 4 種か 5 種の演算、すなわち、加法、減法、乗法、除法、そして一種の除法と見なしうる巾根の抽出によって作られているのと同様に、幾何学においても、求められる線が知られるようにするためには、それに他の線を加えるか、それから他の線を除くか、あるいは或る線があり——これを数にいっそうよく関係づけるために私は単位と呼ぶが、普通は任意にとることのできるものである——さらに他のふたつの線があるとき、この 2 線の一方に対して、他方が単位に対する比をもつ第 4 の線を見いだすか——これは乗法と同じである——または、2 線の一方に対して単位が他方に対する比をもつ第 4 の線を見いだすか——これは除法と同じである——あるいは最後に、単位と或る線との間に、1 個、2 個、またはそれ以上の比例中項を見いだすか——これは平方根、立方根などを出すのと同じである——すればよい。私は意のあるところをよりわかりやすくするため、このような算術の用語をあえて幾何学に導入しようとするのである。

【デカルト『幾何学』,「デカルト著作集[1]」白水社（2001)】

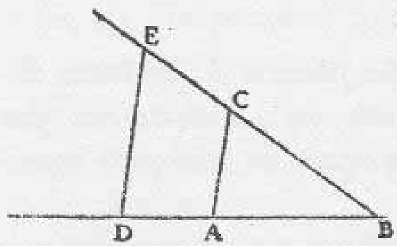
（下線部加筆；授業者）

加法、減法を作図してみよう。

que ie nommeray l'vnité* pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion *, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication *; ou bien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux comme l'vnité eſt a l'autre, ce qui eſt le meſme que la Diuiſion *; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou pluſieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité & quelque autre ligne, ce qui eſt le meſme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligible.

La Multiplication

Soit, par exemple, AB l'vnité, & qu'il faille multiplier BD par BC; ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer DE parallele a CA, & BE eſt le produit de cete Multiplication.

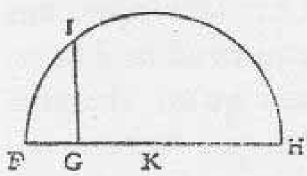


La Diuiſion.

Ou bien, s'il faut diuiſer BE par BD, ayant ioint les poins E & D, ie tire AC parallele a DE, & BC eſt le produit de cete Diuiſion.

L'Extraction de la racine quarrée.

Ou, s'il faut tirer la racine quarrée de GH, ie luy adiouſte en ligne droite FG, qui eſt l'vnité, & diuiſant FH en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle FIH; puis, eſleuant du point G vne ligne droite iuſques a I a angles droits ſur FH, c'eſt



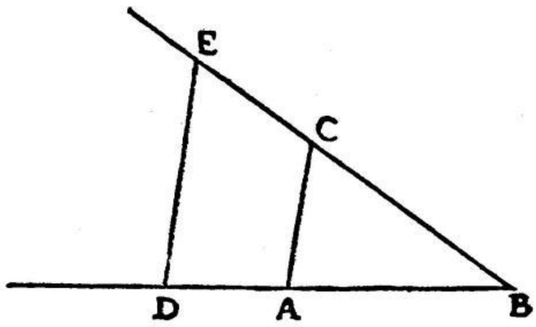
* B. — C. — D. — E.

［乗法］

　たとえば、AB を単位とし、BD に BC を掛けねばならぬとすれば、点 A と C を結び、CA に平行に DE をひけばよい。BE はこの乗法の積である。

［除法］

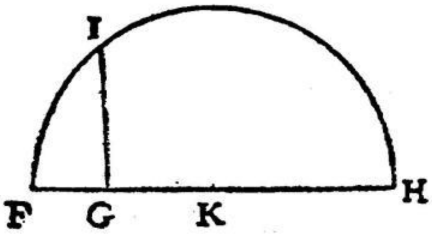
　また、BE を BD で割らねばならぬとすれば、点 E と点 D を結んだうえで、DE に平行に AC をひく、BC はこの除法の結果である。



【デカルト『幾何学』,「デカルト著作集[1]」白水社（2001)】

なぜ、BE が乗法の積 BD･BC になるのかを説明してみよう。

［平方根の抽出］



　また、GH の平方根を出さねばならぬとすれば、それと一直線に単位である FG を加え、FH を点 K で二等分して、K を中心とする円 FIH を描き、点 G から FH と直角に I まで立てる。GI は求める根である。

【デカルト『幾何学』,「デカルト著作集[1]」白水社（2001)】

なぜ、GH＝GI^2 となるのかを説明してみよう。