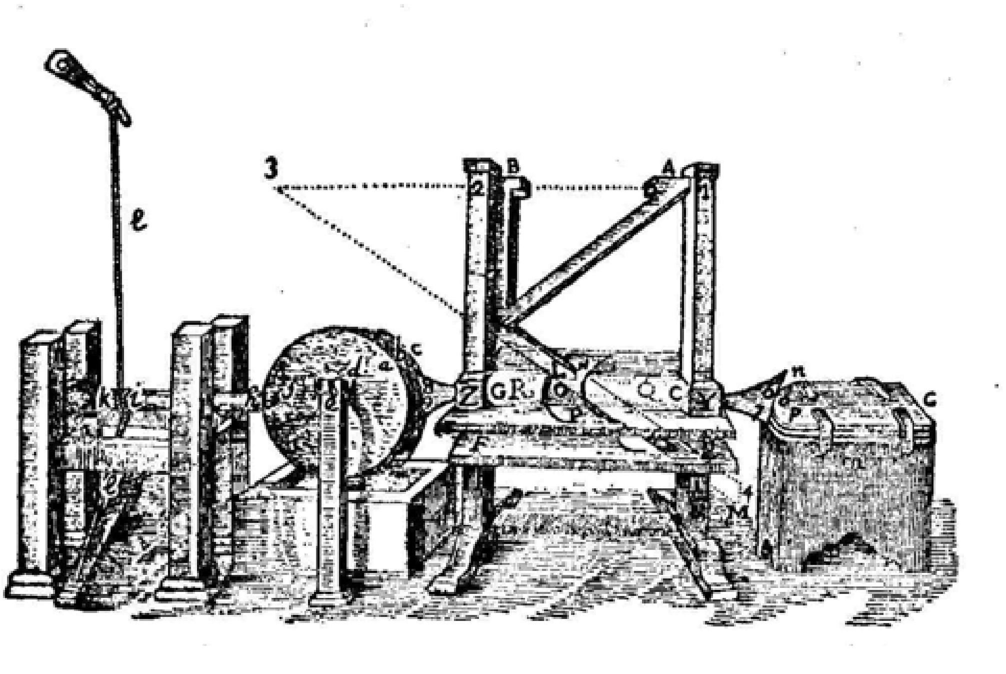
2003年11月13日(木)

Descartes 屈折光学

～レンズをつくる曲線～

授業資料　3日目



2年1組　　番　氏名

授業者：筑波大学大学院教育研究科　今村幸永

０．　前回までの復習

定義

楕円

焦点からの距離の和が一定の点の軌跡

双曲線

焦点からの距離の差が一定の点の軌跡

放物線

焦点と準線からの距離が一定の点の軌跡

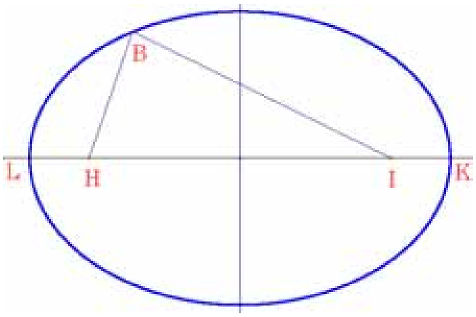


図１

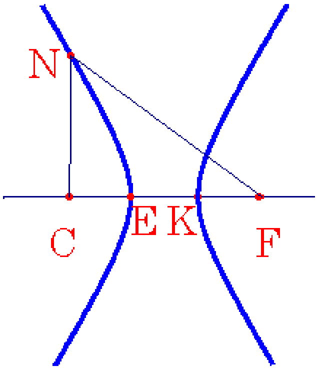


図２

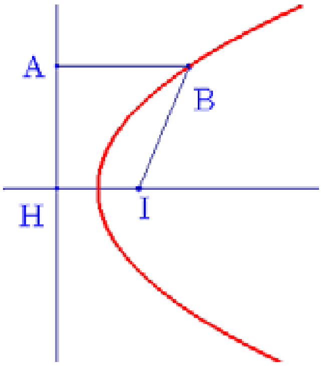


図３

なぜ円、楕円、双曲線、放物線を考えたのか？

　円、楕円、双曲線、放物線は軸に平行に来た光線を焦点へ集めるという性質があるのでレンズの働きをする。
つまり、焦点があるから円、楕円、双曲線、放物線はレンズに適している。

円錐曲線

円、楕円、双曲線、放物線は円錐を切ったときの切り口（切断面）として現れる。よってこれらの曲線を円錐曲線と呼ぶ。これらの曲線は古代ギリシャで研究されてきた。

１．　円錐曲線について

コラム１　　　円錐曲線を研究した人たち

ユークリッド・・・紀元前 300 年ごろの人物。『原論』『円錐曲線論』を書く。『原論』は数学書の中でもっとも大きな影響を後の数学者に与えたもので、13 巻 467 の命題を含んでいる。
メナイクモス・・・放物線と直角双曲線の研究を行った。
アポロニウス・・・「偉大なる幾何学者」として知られ、紀元前 262 年ごろイタリアに生まれる。ユークリッドの『円錐曲線論』に付け加えを行い、その中で初めて楕円、双曲線、放物線がひとつの円錐を異なる傾きで切断するときに作られることを示した。
パスカル・・・1623 年フランスに生まれる。16 歳のころ『円錐曲線試論』を書き、その中でパスカルの定理を証明している。数学的帰納法の明瞭な説明を与えている。

円錐を切断する方法は以下のようなものがあるが、①～④のときどのような切断面になるだろうか？実際にやってみよう。

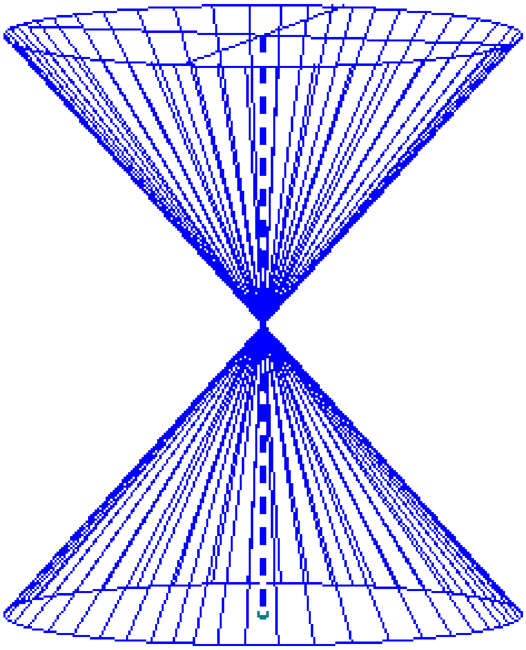


図４

問題　何が見えたか書いてみよう

① 底面と平行になるように切ると（　　　　　　　）となる

② 母線と平行になるように切ると（　　　　　　　）となる

③ 母線と切断面のなす角が頂角より小さくなるように切ると（　　　　　　　）となる。(軸と平行になるように切る)

④ 母線と切断面のなす角が頂角より大きくなるように切ると（　　　　　　　）となる

２．　レンズを作る機械

質問　今まで書いてきた楕円、双曲線は正確にかけましたか？
　　　また、その道具でレンズは作れそうですか？作れなければどのような問題があげられると思いますか。

自分の考え

コラム２　望遠鏡の歴史

1608 年オランダのリッペイが望遠鏡を発明する
1610 年ガリレオ＝ガリレイが望遠鏡で天体観測
1611 年ケプラー天体望遠鏡の発明
1663 年グレゴリー反射望遠鏡を考案
1668 年ニュートン反射望遠鏡を製作
1672 年カセグレン反射望遠鏡を考案
1733 年ホール色消しレンズの発明
1781 年ハーシェル反射望遠鏡で天王星発見
1897 年クラーク世界最大の屈折望遠鏡完成
1948 年パロマー山に口径 5 メートルの反射望遠鏡完成
1999 年ハワイ、マウナケア山に口径 8.2 メートルのスバル望遠鏡完成

やはり昔の人も紐や定規、コンパスだけでは正確に円錐曲線を作図できなかったようです。レンズには正確であることが要求されます。そこでデカルトは下のような機械を作り正確な円錐曲線を描き、レンズカットを行なえるようにしました。

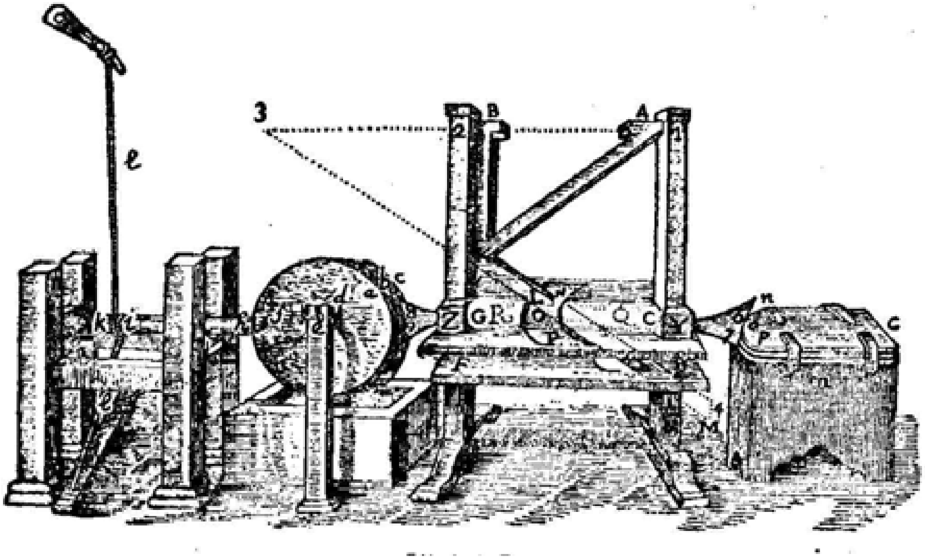
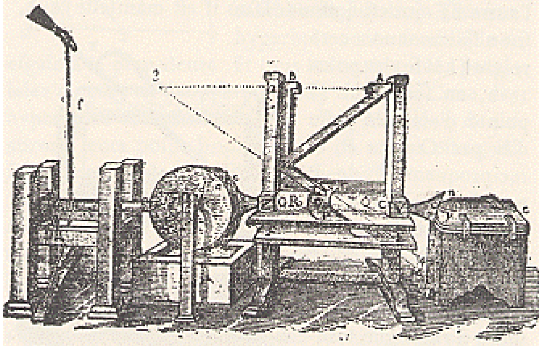


図５　デカルトの考え出したレンズ製作機

この機械に関するデカルトの原典を読んで見ましょう。

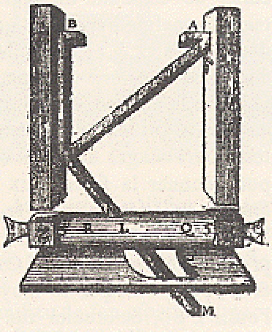
ABKLM n'eſt qu'vne ſeule piece, qui ſe meut toute entiere ſur les poles 1, 2, & dont la partie ABK peut auoir | telle figure qu'on voudra, mais KLM doit auoir



celle d'vne reigle ou autre tel cors, dont les lignes qui terminent ſes ſuperficies ſoient paralleles; & elle doit eſtre tellement inclinée, que la ligne droite 43, qu'on imagine paſſer par le centre de ſon eſpaiſſeur, eſtant prolongée iuſques a celle qu'on imagine paſſer par les poles 1, 2, y face vn angle 234 eſgal a celuy qui a tantoſt eſté marqué des lettres HTV[a]. CG, EF ſont deux planches paralleles a l'aiſſieu 12, & dont les ſuperficies qui

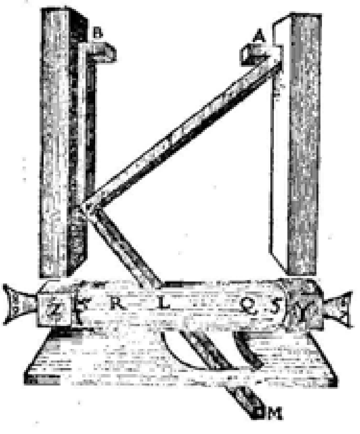
a. « Voyés en la figure de la page 142. » (P. 216 ci-avant.)

ſe regardent ſont fort plates & vnies, & couppées a angles drois par le plan 12GOC. Mais, au lieu de s'entretoucher comme deuant, elles ſont icy iuſtement autant eſloignées l'vne de l'autre qu'il eſt beſoin pour donner paſſage entre elles deux a vn cylindre ou roulleau QR, qui eſt exactement rond, & par tout d'eſgale groſſeur. Et, | de plus, elles ont chaſcune vne fente NOP, qui eſt ſi longue & ſi large, que la reigle KLM, paſſant par dedans, peut ſe mouuoir ça & là ſur les poles 1, 2, tout autant qu'il eſt beſoin pour tracer entre ces deux planches vne partie d'vne hyperbole, de la grandeur du diametre des verres qu'on veut tailler. Et cete reigle eſt auſſy paſſée au trauers du roulleau QR, en telle façon que, le faiſant mouuoir auec ſoy ſur les poles 1, 2, il demeure neantmoins touſiours enfermé entre les deus planches CG, EF, & parallele a l'aiſſieu 12. Enfin Y67 & Z89 ſont les outils qui doiuent ſeruir a tailler en



＜和訳＞図５と図６を参照してください。

ABKLM（図５）はひとつのまとまりのものであって、全体として極１，２の上を動き、その部分 ABK はどんな形をしていてもよいが、KLM は定規の形をしていなければならない。というのは、その表面をなす線は平行である必要があるからである。そしてこの定規の傾き加減は、その厚みの中心を通ると考えられる直線３４が、両極１，２を通ると考えられる線まで延長された場合に、角２３４を固定しなければならない。CG、EF は軸１２に平行な二枚の板であり、その向かい合った面はごく平らで滑らかで、面１２GOC によって直角にきられる。そしてここではその二枚の板は前のようにくっつけられないで、正確に丸くどこも同じ太さの円筒あるいはローラーを二枚の板の間に入れることができる感覚の分だけきっちりと開いている。さらにそれらの板にはそれぞれ隙間 NOP（図 5）があり、これはその中に通された定規 KLM が両極１２上をあちこち動きうるだけの長さと幅を持つ。こうすれば切ろうと思うレンズの［①　　］の一部をそのレンズの直径の大きさで、これら二枚の板の間で十分に描くことができることとなる。またこの定規はローラーQR を貫いていて、両極１，２の上で動かすとローラーも動き、しかもローラーは軸１２に平行で常に二枚の板 CG、EF の間に閉じ込められていることになる。



質問

この機械ではどのような図形が描けますか。（①には何があてはまりますか）

以下の図７と説明を参考にして解答してください。

解　　答 ＿＿＿＿＿＿＿＿

図６　上図中央の机の上にある機械の拡大図

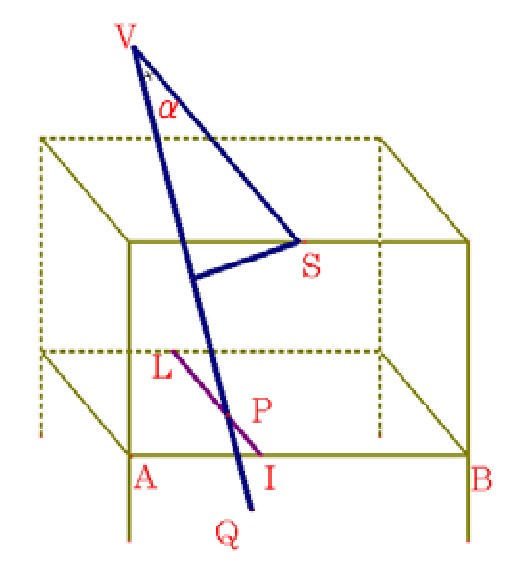


図７

この装置のメカニズムはアポロニウスの理論によっている（図７参照）。堅い棒ＶＳ､ＶＱが点Ｖ で接合され、あらかじめ固定された角α（∠SVQ＝α）を保つようになっている。 VS はそれを軸として VQ を母線として円錐を描くように回転する。その際、３番目の棒 LI が水平面に沿って(定距離を保ち)、まっすぐ角度を保ちながら平行に滑るように、棒 VQ は点 P を押し進める.。このようにして点Ｐは［　①　］を描き、LI は［　①　］の輪郭線を導く。

（デカルト：屈折光学）

つまり、以下のようになっている。

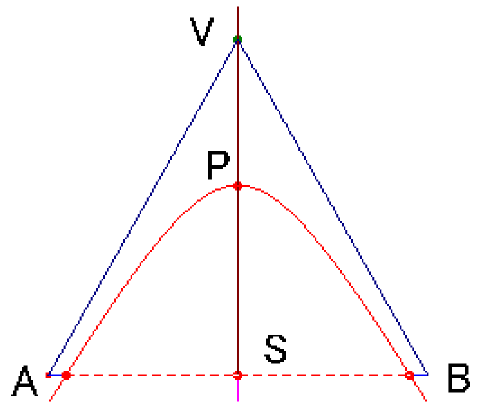


図８　上からの図

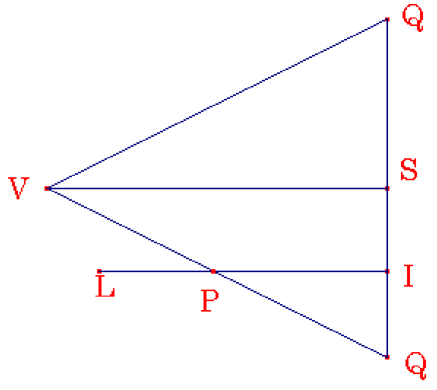


図９　横からの図

３．補足　レンズの削り方

① 図５の左から３番目の機械で双曲線を作る。そして右はじの機械で双曲線型の鉄板を削る。

② ①で削った鉄板を左から３番目の機械の左側（Ｚ）につける。

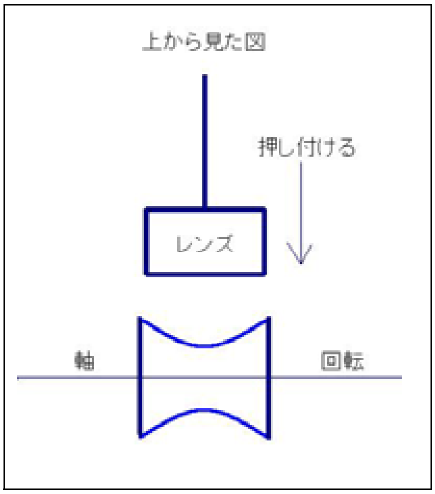
③ 左から二番目の丸い機械は e を軸にしてくるくるまわるので②の機械(鉄板)によって双曲線型に削られる。・・・・・(図１０)

④ khi は軸となってまわるのでその先にレンズの元となるガラスなどをつける。

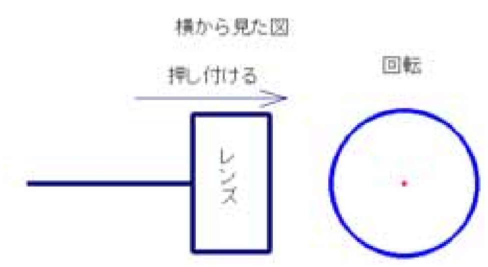
⑤ ③の丸い機械の下にガラス研磨剤などの液をためておき、常に③の機械がぬれているようにする。

⑥ ④の機械と③の機械をくっつけてレンズを削ると、双曲線型のレンズができる。・・・・・(図１１)

（図１０）



（図１１）



三日間の流れ・まとめ

1 日目

- 目の構造とその中に見える円錐
- レンズの屈折について
- 楕円の定義と作図

2 日目

- 楕円の屈折に関する性質
- 双曲線の定義と屈折に関する性質
- 放物線の定義
- 円、楕円、放物線、双曲線を円錐曲線と呼ぶ
- 円錐曲線は焦点を持つのでレンズとして役に立つ

3 日目

- 円錐をどのように切断すれば円錐曲線が現れるか
- デカルトのレンズ製作機とその原理