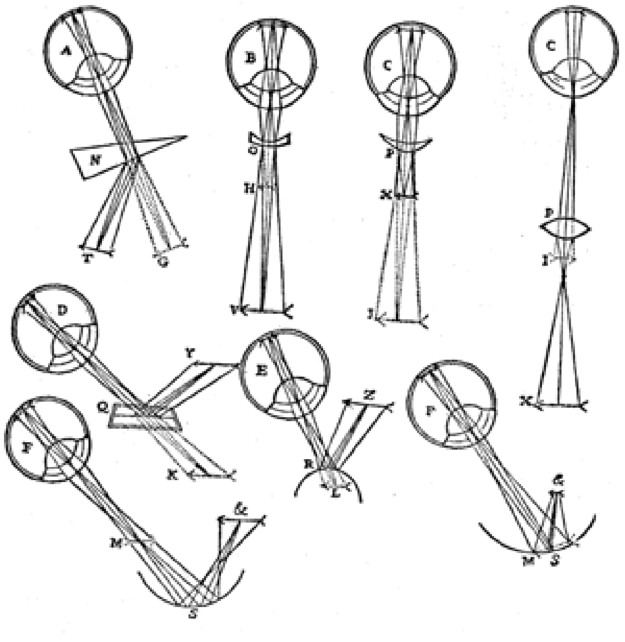
2003年11月7日(金)

Descartes 屈折光学

～レンズをつくる曲線～

授業資料　２日目



２年１組　　番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

授業者：筑波大学大学院教育研究科　今村幸永

０．　復習

デカルト・・・・１７世紀の数学者であり哲学者。

『方法序説』屈折光学、幾何学、気象学を記した。

目の構造・・・・網膜には逆像が写る。目の中には光の道筋によって２つの円錐が存在する。

屈折・・・・光が物質１から物質２へ入射する時に方向を変える現象

平面の物質に対して屈折率は常に一定。

$$\text{屈折率} = \frac{AH}{IG} = \frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta}$$

楕円定義

焦点からの距離の和が一定の点の軌跡

問題

もう一度楕円を描いてみよう WORK シートへ書いて下さい。

１．楕円の性質

光が水（平面）に入射すると屈折を起こし、屈折率が一定であることは昨日学んだ。それと同様に光が楕円（この場合は楕円のレンズとして考える）の長軸に平行となるように入射するときの実験をデカルトは屈折光学（La　Dioptriqve）の中で述べている。原典を見ながらながら学習していこう。

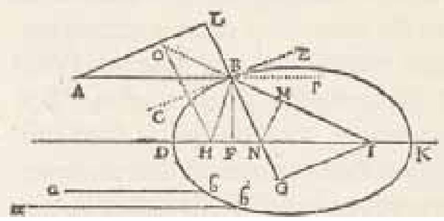
92-93. LA DIOPTRIQUE. — DISCOURS VIII. 169

dans l'Ellipſe, tout ce qui ſe dit icy du rayon AB ſe doit entendre generalement de tous les rayons paralleles a l'aiſſieu DK, qui tombent ſur quelque point de cete Ellipſe, a ſçauoir qu'ils y ſeront tous tellement détournés, qu'ils iront ſe rendre de là vers le point I.

|Or cecy ſe demonſtre en cette ſorte. Premierement,[a]

a. Le texte qui suit jusqu'à « Puis » (p. 170, l. 5) est une seconde rédaction de Descartes, indiquée par lui à Mersenne (voir *Correspondance*, t. II, p. 638) comme devant être substituée à celle de l'édition de 1637. Voici le texte primitif :

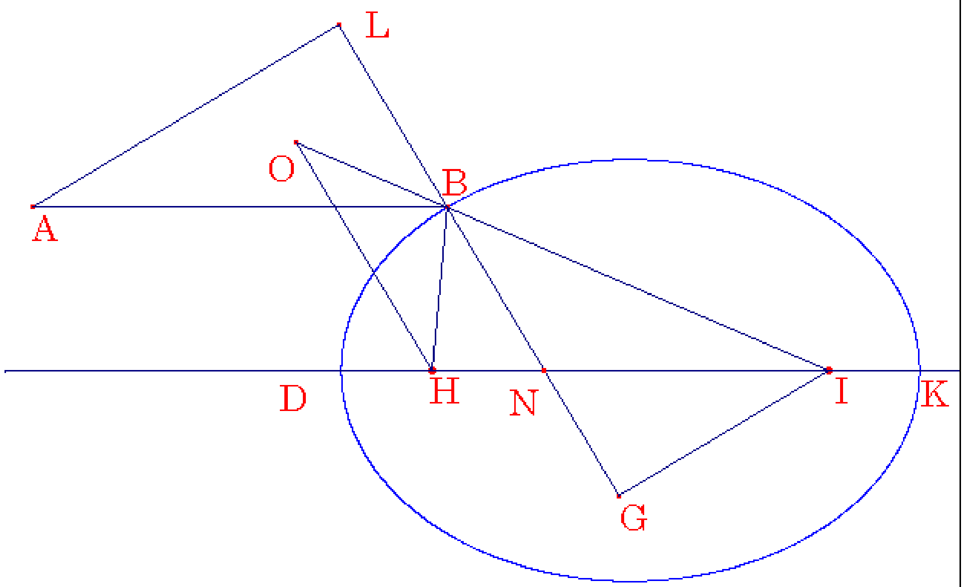
ſi on tire du point B la ligne BF perpendiculaire ſur KD, & que du point N, où LG & KD s'entrecoupent, on tire auſſy la ligne NM perpendiculaire ſur IB, on trouuera que AL eſt a IG comme BF eſt a NM. Car, d'vne part, les triangles BFN & BLA ſont ſemblables, a cauſe qu'ils ſont tous deux rectangles, & que, NF & BA eſtans paralleles, les angles FNB & ABL ſont eſgaus; & d'autre part, les triangles NBM & IBG ſont auſſy ſemblables, a cauſe qu'ils ſont rectangles, & que l'angle vers B eſt commun a tous deux. Et, outre cela, les deux triangles BFN & BMN ont meſme rapport entre eux que les deux AlB & BGI, a cauſe que, comme les baſes de ceux-cy, BA & BI, ſont eſgales, ainſi BN, qui eſt la baſe du triangle BFN, eſt eſgale a ſoy meſme en tant qu'elle eſt auſſy la baſe du triangle BMN. D'où il ſuit euidemment que, comme BF eſt a NM, ainſi AL, celuy des coſtés du triangle ALB qui ſe rapporte a BF dans le triangle BFN, c'eſt a dire qui eſt la ſubtendue du meſme angle, eſt a IG, celuy des coſtés du triangle BGI qui ſe rapporte a cauſe que tant les lignes AB & NI, que AL & GI, ſont paralleles, les triangles ALB & IGN ſont ſemblables; d'où il ſuit que AL eſt a IG comme AB eſt a NI; ou bien, pource que AB & BI ſont eſgales, comme BI eſt a NI. Puis, ſi on tire HO parallele a NB, & qu'on prolonge IB iuſques a O, on verra que BI eſt a NI comme OI eſt a HI, a cauſe que les triangles BNI & OHI ſont ſemblables. Enfin, les deux angles HBG & GBI eſtans eſgaus par la conſtruction, HOB, qui eſt eſgal a GBI, | eſt auſſy eſgal a OHB, a cauſe que cetuy cy eſt eſgal a HBG; & par conſequent le triangle HBO eſt iſoſcele, & la ligne OB eſtant eſgale a HB, la toute OI eſt eſgale a DK, d'autant que les deux enſemble HB & IB luy ſont eſgales. Et ainſi, pour reprendre du premier au dernier, AL eſt a IG comme[a] BI a NI, & BI a NI comme OI a HI, & OI eſt eſgale a DK; donc AL eſt a IG comme DK eſt a HI.



＜和訳、要約＞

点 B から楕円の外部へ直線 BA を長軸 DK に平行に引き、BI に等しくし、点 A と I から LG に 2 垂直線 AL と IG を引くと、このあとの AL と IG とは DK と HI との比と同じ比になるであろう。だからもし直線 AB が光線であり、この楕円 DBK が透明固体の表面上にあり、先述の通り、直線 DK が HI より大きくなればそれと同じ比率で光線が空気中より容易に通過するものとすると、この光線 AB はこの透明体の表面によって、点 B でそこから I の方向に進むように向きを変えるであろう。そしてこの点 B は楕円状に任意にとられたものであるから、ここで光線 AB について言われたことすべては、軸 DK に平行でこの楕円のどこかの点に落ちるすべての光線に一般にあてはまる。すなわち、それらの光線はそこで、そこから点 I に進むように向きを変える。

問題



以下の条件を満たすとき　AL：IG＝DK：IH を示せ。

1　AB//DK とする

2　AB=BI とする

3　∠HBG=∠GBI とする

4　AL⊥LG

5　IG⊥LG

6　HO//LG とする

問題　以下の穴を埋めてください。

証明

AB // NI、AL // GI より
△ALB ∽ △IGN　（2 角が等しい）
∴　AL：IG＝$\boxed{}$：IN
また、AB＝BI（仮定）より
AL：IG＝$\boxed{}$：IN となる。・・・①

HO // NB より
△BNI∽△OHI　（2 角が等しい）
∴　BI：IN＝OI：IH となる。・・・②

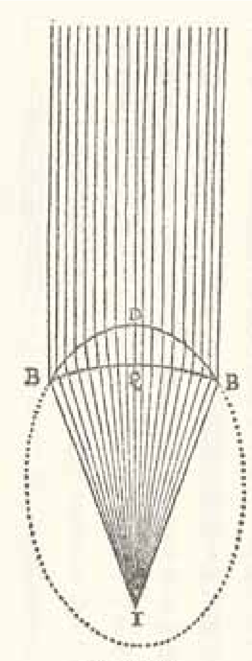
∠HBN＝∠NBI（仮定）と∠NBI＝∠HOB（６）より
∠HOB＝∠$\boxed{}$となる。
なぜなら、外角の関係より
∠HBI＝∠HOB＋∠BHO
2∠HOB＝∠HOB＋∠BHO
だから、∠HOB＝$\boxed{\angle}$
よって、△BOH は二等辺三角形となる
∴OB＝BH・・・③
今、IB＋BH＝DK であった。（楕円の定義）
よって、③より DK＝$\boxed{}$となる

①に戻ってみると
AL：IG＝BI：IN＝OI：IH＝DK：IH
①　②　③

Q.E.D

これによって軸ＤＫに平行で楕円面ＢＤＫに落ちかかるすべての光線は入射点より遠いほうの焦点に向かうことがわかる。

また、その逆も言える。つまりＩから出た光線が点Ｂを通れば軸ＤＫに平行となって進んでいく。



[第 28 図]

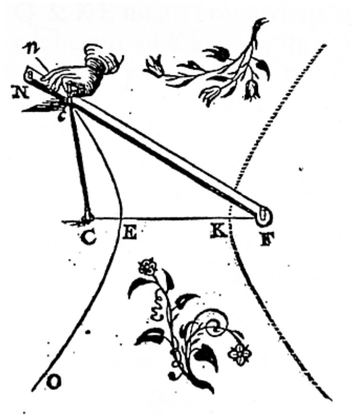
ここで屈折率を考えてみよう。

屈折率は入射角α、屈折角βに対する Sin 比であった。
つまり、今上の問題で光が軸に水平に入射する場合
AL：IG は一定という関係がでた。

今、$\mathrm{Sin}\,\alpha = \dfrac{AL}{AB}$　　$\mathrm{Sin}\,\beta = \dfrac{IG}{BI}$　　となる。今、AB=BI なので

$$\boxed{\text{屈折率} = \frac{AL}{IG} = \frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta} = \text{一定}\quad\text{となる}}$$

2.　双曲線

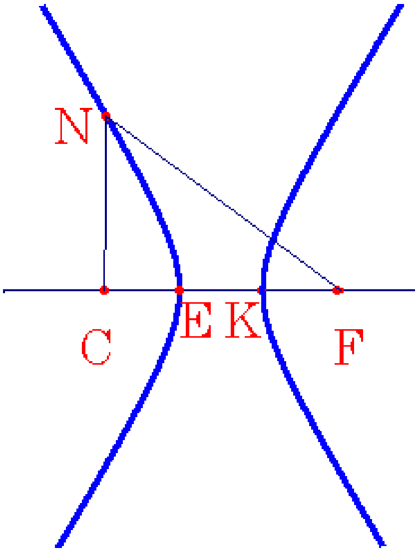


定義

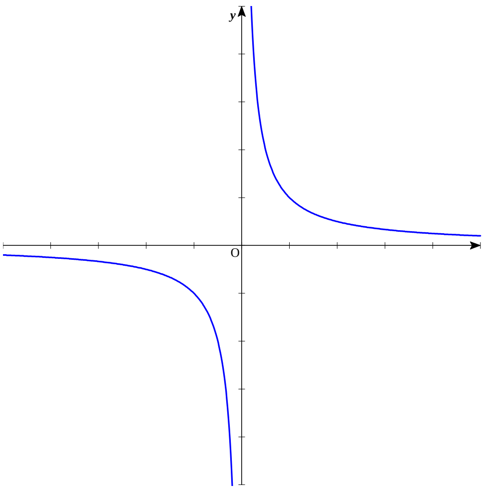
点 C、F、N が与えられたとき、CN と FN の差が一定（EK）となる。点 N の軌跡を**双曲線**と呼ぶ。ただし、EK は CF を超えないものとする。

このとき、C,F を焦点と呼び、直線 CF を**主軸**、主軸と双曲線の 2 つの交点（E、K）を**頂点**、線分 CF の中点を**中心**と呼ぶ。

例 1



例 2　（反比例）



実際に双曲線を書いてみよう

作業　ピン 2 個　ヒモ 1 本　棒 1 本で書いてみよう

WORK シートへ書いて下さい。

ヒント１

メモ

３． 双曲線の性質

楕円同様に原典を見ながら読み進めていこう

Mais ie veux icy enſuite vous faire voir que, ſi de ce meſme point B on tire vers le dedans de l'Hyperbole la ligne droite BA parallele a DK, & qu'on tire auſſy par le meſme point B la ligne LG qui couppe CE a angles droits; puis, ayant pris BA eſgale a BI, que des points A & I on tire ſur LG les deux perpendiculaires AL & IG, ces deux dernieres, AL & IG, auront entre | elles meſme proportion que les deux DK & HI. Et enſuite, que ſi on donne la figure de cete Hyperbole a vn cors de verre dans lequel les refractions ſe meſurent par la proportion qui eſt entre les lignes DK & HI, elle fera que tous les rayons qui ſeront paralleles a ſon aiſſieu, dans ce verre, s'iront aſſembler au dehors au point I, au moins ſi ce verre eſt conuexe ; & s'il eſt concaue, qu'ils s'eſcarteront ça & là, comme s'ils venoient de ce point I.

Ce qui peut eſtre ainſi demontré. Premierement, [a]

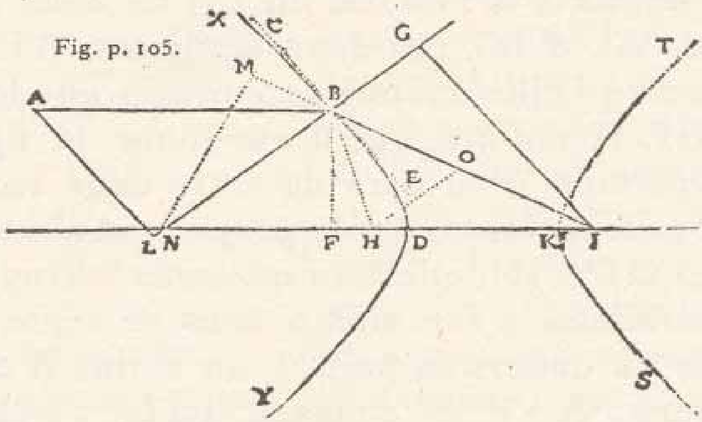
a. Le texte qui suit jusqu'à « Puis » (p. 180, l. 5) est une seconde rédaction de Descartes (voir t. II, p. 638), arrêtée en vue d'une réédition. Voici le texte primitif :

ſi on tire du point B la ligne BF perpendiculaire ſur KD prolongée autant qu'il eſt beſoin, & du point N, où LG & KD s'entrecoupent, la ligne NM perpendiculaire ſur IB auſſy prolongée, on trouuera que AL eſt a IG comme BF eſt a NM. Car, d'vne part, les triangles BFN & BLA ſont ſemblables, a cauſe qu'ils ſont tous deux rectangles & que, NF & BA eſtant paralleles, les angles FNB & LBA ſont eſgaus. Et, d'autre part, les triangles IGB & NMB ſont auſſy ſemblables, a cauſe qu'ils ſont rectangles & que les angles IBG & NBM ſont eſgaus. Et, outre cela, comme la meſme a

180 ŒUVRES DE DESCARTES. 104-105.

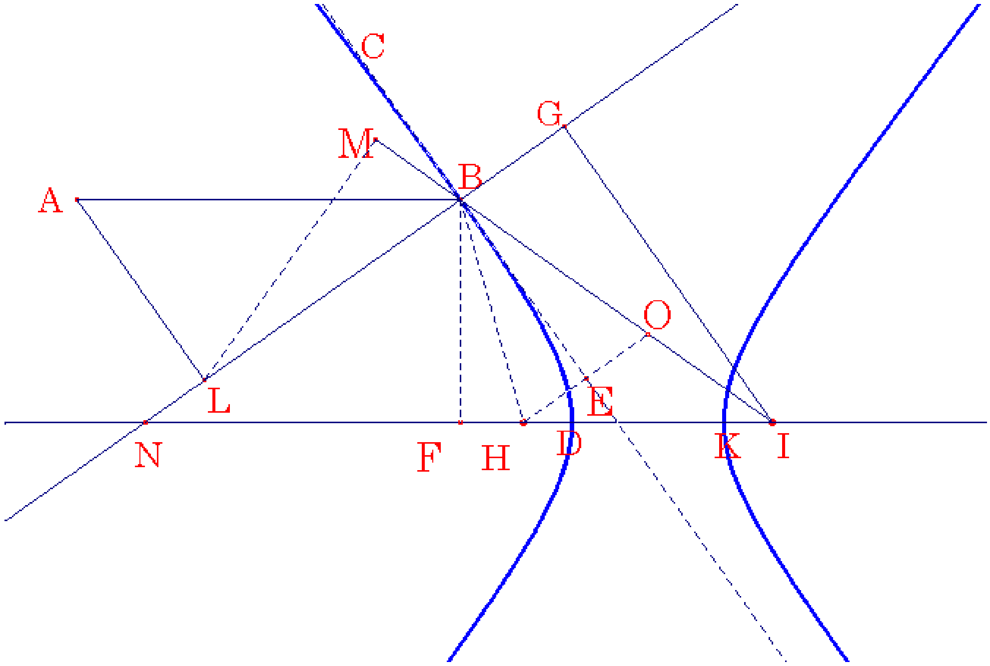
cauſe que tant les lignes AB & NI, que AL & GI, ſont paralleles, les triangles ALB & IGN ſont ſemblables; d'où il ſuit que AL eſt a IG comme AB eſt a NI; ou bien, pource que AB & BI ſont eſgales, comme BI eſt a BI. Puis, ſi on tire HO parallele a LG, on verra

Fig. p. 105.



＜和訳、要約＞

もし、同じ点 B から双曲線の内側で DK に平行に直線 BA を引き、また同じ点 B を通って CE と直角をなす線 LG を引き、次に BA を BI に等しくし、点 A、I から LG 上に 2 垂直線 AL と IG を引くと、この AL と IG とは DK と HI と同じ比になるであろう。また、線 DK と HI との比によって測定されるような屈折率を持つガラスをこの双曲線の形にすると、少なくともそのレンズが凸状であれば、このレンズのなかでその軸へ平行なすべての光線は外部の I に集まるようになる。また、凹状であれば光線はまるで I から来たようにあちこちに分散する。



上の図が以下の条件を満たすとき、AL：IG＝DK：IH であることを示せ。
ただし、D、K は双曲線の頂点とする。

1　CE は∠HBI の二等分線
2　AB // DK とする
3　AB＝BI となるようにする
4　CE ⊥ LG
5　AL ⊥ LG
6　IG ⊥ LG
7　HO // LG

補充問題　以下の証明の穴を埋めてください。

証明

AB // NI、　AL // GI より

△ALB∽△　　　　（2 角が等しい）

∴　AL：IG＝　AB　：　　　となる。・・・①

また、AB＝BI　より

AL：IG＝BI：IN となる。・・・②

７より、△BNI∽△OHI　（2 角が等しい）

∴　BI：IN＝　　　：　　　となる

また、△BEH≡△BEO

合同条件（　　　　　　　　　　　　　）

∴　BH＝BO

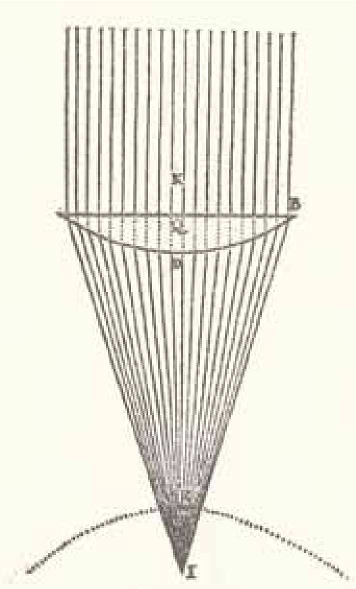
∴　BI－BH＝　　　となる

DK＝　　　より

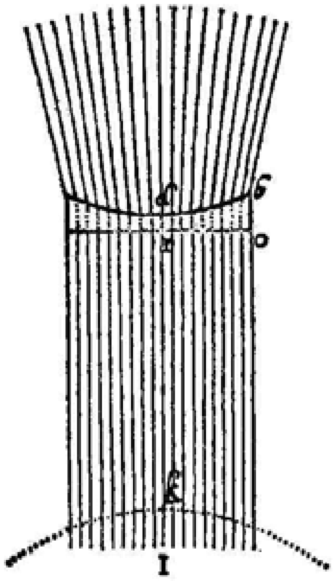
AL：IG＝AB：IN＝BI：IN

＝OI：IH＝DK：IH　　　Q.E.D

線ＤＫとＨＩとの比によって測定されるような屈折率を持つガラスをこの双曲線の形にすると、そのレンズが凸状であれば、このレンズの中でその軸に平行な全ての光線は外部の焦点Ｉに集まるようになる。
また、レンズが凹状であれば光線はまるでＩから来たように、あちこちに分散するようになる。



［第 37 図］



ここで楕円同様に屈折率を考えてみよう。

屈折率は入射角αα、屈折角βに対する Sin の比であった。
つまり、今上の問題で光が軸に水平に入射する場合
AL：IG は一定という関係がでた。

今、$\mathrm{Sin}\,\alpha = \dfrac{AL}{AB}$　　$\mathrm{Sin}\,\beta = \dfrac{IG}{BI}$　　となる。今、AB=BI なので

$$\boxed{\text{屈折率} = \frac{AL}{IG} = \frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta} = \text{一定}\ \text{となる}}$$

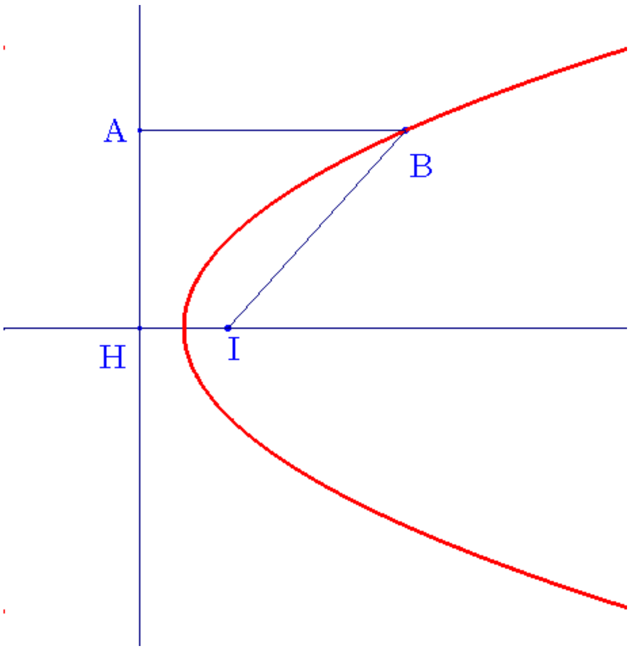
４．　放物線

定義

１つの定点（Ｉ）と、この点を通らない定直線（ＡＨ）から等距離にある点（Ｂ）の軌跡を**放物線**と呼ぶ。

このとき、定点を放物線の**焦点**、定直線を**準線**と呼ぶ。

例



　このように円、楕円、双曲線、放物線を学習してきたが、これらの曲線ははるか昔のギリシャでたくさん研究されてきた。その当時の人々はこれらの曲線は円錐を切断することで発見できることを知った。
そのような理由で円、楕円、双曲線、放物線のことを**円錐曲線**と呼ぶ。

５．まとめ

平面においての同一物質に対する屈折率は

常に一定であった

楕円や双曲線といった曲面においての屈折の仕方を

考えた。

曲面においても軸に平行に入射する光の

屈折率は常に一定であることが分かった。

光が屈折により焦点を通るという性質を用いることで様々なレンズが作られるということが分かる。

Sin や Cos などの曲線は簡単には書けないが、楕円や双曲線は簡単な道具で作図できる事を知った。

↓

だからデカルトは焦点という性質を持ち簡単に作図できる楕円や双曲線について調べ、レンズを研究していった。

次の時間の目標

- 円錐曲線についての学習
- レンズ製作機のしくみ

参考資料

楕円・双曲線レンズによる屈折、見え方。