2002年10月29日（火）

授業資料

円錐曲線について
研究授業２日目


ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛ. ΙΕ.
ΕΚ ΤΩΝ ΘΕΩΝΟΣ ΣΥΝ-
ΟΥΣΙΩΝ.
Εἰς τοῦ αὐτοῦ τὸ πρῶτον, ἐξηγημάτων Πρόκλου βιβλ. δ.
Adiecta præfatiuncula in qua de disciplinis
Mathematicis nonnihil.

BASILEAE APVD IOAN. HERVAGIVM ANNO
M. D. XXXIII. MENSE SEPTEMBRI.

２年　　組　　　番

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

授業者：筑波大学大学院教育研究科　高見香織

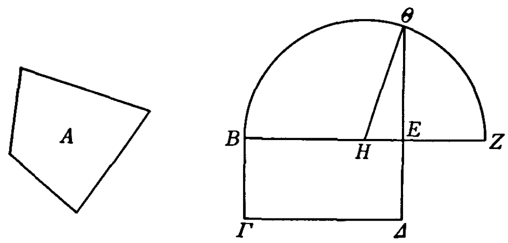
ユークリッド原論　第2巻　命題１４

【出典：中村幸四郎　他訳『ユークリッド原論―縮刷版―』共立出版】
第 2 巻　命題 14

14

与えられた直線図形に等しい正方形をつくること。

与えられた直線図形を A とせよ。このとき直線図形 A に等しい正方形をつくらねばならぬ。



直線図形 A に等しい直角平行四辺形 $B\varDelta$ がつくられたとせよ。そうすればもし BE が $E\varDelta$ に等しければ，命じられたことはなされたことになるであろう。なぜなら正方形 $B\varDelta$ が直線図形 A に等しくつくられたから。もし等しくなければ，BE，$E\varDelta$ の一方が大きい。BE が大きいとし，BE が Z まで延長され，EZ が $E\varDelta$ に等しくされ，BZ が H で2等分され，H を中心とし，HB，HZ の一を半径として半円 $B\Theta Z$ が描かれ，$\varDelta E$ が Θ まで延長され，$H\Theta$ が結ばれたとせよ。

そうすれば線分 BZ は H において等しい部分に，E において不等な部分に分けられたから，<u>BE，EZ にかこまれた矩形と EH 上の正方形との和は HZ 上の正方形に等しい</u>。そして HZ は $H\Theta$ に等しい。それゆえ<u>矩形 BE，EZ と HE 上の正方形との和は $H\Theta$ 上の正方形に等しい</u>。ところが<u>ΘE，EH 上の正方形の和は $H\Theta$ 上の正方形に等しい</u>。ゆえに<u>矩形 BE，EZ と HE 上の正方形との和は ΘE，EH 上の正方形の和に等しい</u>。双方から HE 上の正方形がひかれたとせよ。そうすれば残りの<u>BE，EZ にかこまれた矩形は $E\Theta$ 上の正方形に等しい</u>。ところが EZ は $E\varDelta$ に等しいから，矩形 BE，EZ は $B\varDelta$ である。それゆえ<u>平行四辺形 $B\varDelta$ は ΘE 上の正方形に等しい</u>。そして $B\varDelta$ は直線図形 A に等しい。ゆえに直線図形 A も $E\Theta$ 上に描かれた正方形に等しい。

よって与えられた直線図形 A に等しい正方形，すなわち $E\Theta$ 上に描かれうる正方形がつくられた。これが作図すべきものであった*)。

問：次の$\boxed{\text{空欄}}$をうめてください。①〜⑥は命題 14 の下線部①〜⑥に対応しています。

BE・EZ＋EH²＝HZ²　　・・・①
（HZ=Hθより）

$\boxed{}$　　・・・②

θE²＋EH²＝Hθ²　　・・・③

BE・EZ＋HE²＝θE²＋EH²　　・・・④

（両辺から HE²をひくと）

$\boxed{}$　　・・・⑤

（EZ=EΔより）

BE・EZ＝BE・EΔ

∴　BE・EΔ＝Eθ²　　・・・⑥

BΔ＝直線図形 A

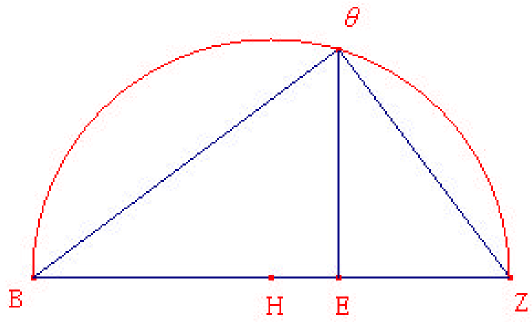
∴直線図形 A= Eθ²

問　この証明の方法と命題 14 の証明の方法の違いは何ですか？

問　左図をもとに、　BE・EZ＝Eθ²
を証明してください。

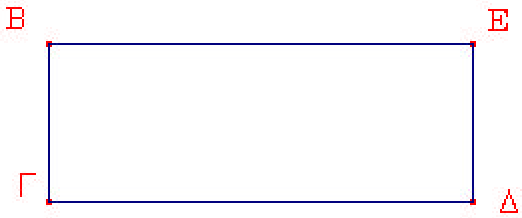
証明

△θBE∽△ZθE より
BE：Eθ＝$\boxed{\quad\quad：\quad\quad}$



a：b＝b：cの関係が成り立つとき、bをaとcの比例中項という。

比例中項を作図してみましょう。



作図手順

①

②

③

④

⑤

⑥

２．アポロニウスが考えた円錐曲線の性質について

基本的な性質について　【引用文献：Greek Mathematics Work Ⅰ IVOR THOMAS 著】

ギリシア語

ια΄

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἔτι δὲ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς παράλληλος ᾖ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς τοῦ κώνου παράλληλος ἀχθῇ τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου μέχρι τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς καὶ ἄλλης τινὸς εὐθείας, ἣ λόγον ἔχει πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς τοῦ κώνου γωνίας καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν· καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ παραβολή.

Ἔστω κῶνος, οὗ τὸ Α σημεῖον κορυφή, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν τὴν ΔΕ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΒΓ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔΖΕ, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΖΗ παράλληλος ἔστω μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου τῇ ΑΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΖΗ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΘ, καὶ πεποιήσθω, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΖΑ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΔΕ παράλληλος ἡ ΚΛ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΖΛ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Λ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΜΝ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΛ τῇ ΔΕ παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΔΕ ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῇ βάσει τοῦ κώνου. τὸ ἄρα διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον κύκλος ἐστίν, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ. καὶ ἔστι κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΝ ἡ ΚΛ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΔΕ ἐπὶ τὴν ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΜΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΛ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, τὸ δὲ

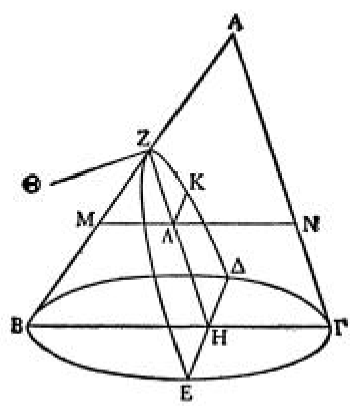
英語

Prop. 11

Let a cone be cut by a plane through the axis, and let it be also cut by another plane cutting the base of the cone in a straight line perpendicular to the base of the axial triangle, and further let the diameter of the section be parallel to one side of the axial triangle; then if any straight line be drawn from the section of the cone parallel to the common section of the cutting plane and the base of the cone as far as the diameter of the section, its square will be equal to the rectangle bounded by the intercept made by it on the diameter in the direction of the vertex of the section and a certain other straight line; this straight line will bear the same ratio to the intercept between the angle of the cone and the vertex of the segment as the square on the base of the axial triangle bears to the rectangle bounded by the remaining two sides of the triangle; and let such a section be called a parabola.

For let there be a cone whose vertex is the point Α and whose base is the circle ΒΓ, and let it be cut by a plane through the axis, and let the section so made be the triangle ΑΒΓ, and let it be cut by another plane cutting the base of the cone in the straight line ΔΕ perpendicular to ΒΓ, and let the section so made on the surface of the cone be ΔΖΕ, and let ΖΗ, the diameter of the section, be parallel to ΑΓ, one side of the axial triangle, and from the point Ζ let ΖΘ be drawn perpendicular to ΖΗ, and let $\mathrm{B\Gamma}^2 : \mathrm{BA} . \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{Z\Theta} : \mathrm{ZA}$, and let any point Κ be taken at random on the section, and through Κ let ΚΛ be drawn parallel to ΔΕ. I say that $\mathrm{K\Lambda}^2 = \Theta\mathrm{Z} . \mathrm{Z\Lambda}$.

For let ΜΝ be drawn through Λ parallel to ΒΓ; but ΚΛ is parallel to ΔΕ; therefore the plane through



ΚΛ, ΜΝ is parallel to the plane through ΒΓ, ΔΕ [Eucl. xi. 15], that is to the base of the cone. Therefore the plane through ΚΛ, ΜΝ is a circle, whose diameter is ΜΝ [Prop. 4]. And ΚΛ is perpendicular to ΜΝ, since ΔΕ is perpendicular to ΒΓ [Eucl. xi. 10];

therefore $\mathrm{M\Lambda} . \mathrm{\Lambda N} = \mathrm{K\Lambda}^2$.

And since $\mathrm{B\Gamma}^2 : \mathrm{BA} . \mathrm{A\Gamma} = \Theta\mathrm{Z} : \mathrm{ZA}$, ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ καὶ ἡ ΒΓ πρὸς ΒΑ, ὁ ἄρα τῆς ΘΖ πρὸς ΖΑ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΒΓ πρὸς ΓΑ καὶ τοῦ τῆς ΓΒ πρὸς ΒΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΝΑ, τουτέστιν ἡ ΜΛ πρὸς ΛΖ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΜΑ, τουτέστιν ἡ ΛΜ πρὸς ΜΖ, καὶ λοιπὴ ἡ ΝΛ πρὸς ΖΑ. ὁ ἄρα τῆς ΘΖ πρὸς ΖΑ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΜΛ πρὸς ΛΖ καὶ τοῦ τῆς ΝΛ πρὸς ΖΑ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΜΛ πρὸς ΛΖ καὶ τοῦ τῆς ΛΝ πρὸς ΖΑ ὁ τοῦ ὑπὸ ΜΛΝ ἐστι πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ. ὡς ἄρα ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΛΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ. ὡς δὲ ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, τῆς ΖΛ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΜΛΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΜΛΝ τῷ ὑπὸ ΘΖΛ. τὸ δὲ ὑπὸ ΜΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΛ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΖΛ.

Καλείσθω δὲ ἡ μὲν τοιαύτη τομὴ παραβολή, ἡ δὲ ΘΖ παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΖΗ διάμετρον, καλείσθω δὲ καὶ ὀρθία.

while $\mathrm{B\Gamma}^2 : \mathrm{BA} \,.\, \mathrm{A\Gamma} = (\mathrm{B\Gamma} : \Gamma\mathrm{A})(\mathrm{B\Gamma} : \mathrm{BA})$,

therefore $\Theta\mathrm{Z} : \mathrm{ZA} = (\mathrm{B\Gamma} : \Gamma\mathrm{A})(\Gamma\mathrm{B} : \mathrm{BA})$.

But $\mathrm{B\Gamma} : \Gamma\mathrm{A} = \mathrm{MN} : \mathrm{NA}$

$= \mathrm{M}\Lambda : \Lambda\mathrm{Z}$, [Eucl. vi. 4

and $\mathrm{B\Gamma} : \mathrm{BA} = \mathrm{MN} : \mathrm{MA}$

$= \Lambda\mathrm{M} : \mathrm{MZ}$ [*ibid.*

$= \mathrm{N}\Lambda : \mathrm{ZA}$. [Eucl. vi. 2

Therefore $\Theta\mathrm{Z} : \mathrm{ZA} = (\mathrm{M}\Lambda : \Lambda\mathrm{Z})(\mathrm{N}\Lambda : \mathrm{ZA})$.

But $(\mathrm{M}\Lambda : \Lambda\mathrm{Z})(\Lambda\mathrm{N} : \mathrm{ZA}) = \mathrm{M}\Lambda \,.\, \Lambda\mathrm{N} : \Lambda\mathrm{Z} \,.\, \mathrm{ZA}$.

Therefore $\Theta\mathrm{Z} : \mathrm{ZA} = \mathrm{M}\Lambda \,.\, \Lambda\mathrm{N} : \Lambda\mathrm{Z} \,.\, \mathrm{ZA}$.

But $\Theta\mathrm{Z} : \mathrm{ZA} = \Theta\mathrm{Z} \,.\, \mathrm{Z}\Lambda : \Lambda\mathrm{Z} \,.\, \mathrm{ZA}$,

by taking a common height $\mathrm{Z}\Lambda$;

therefore $\mathrm{M}\Lambda \,.\, \Lambda\mathrm{N} : \Lambda\mathrm{Z} \,.\, \mathrm{ZA} = \Theta\mathrm{Z} \,.\, \mathrm{Z}\Lambda : \Lambda\mathrm{Z} \,.\, \mathrm{ZA}$.

Therefore $\mathrm{M}\Lambda \,.\, \Lambda\mathrm{N} = \Theta\mathrm{Z} \,.\, \mathrm{Z}\Lambda$. [Eucl. v. 9

But $\mathrm{M}\Lambda \,.\, \Lambda\mathrm{N} = \mathrm{K}\Lambda^2$;

and therefore $\mathrm{K}\Lambda^2 = \Theta\mathrm{Z} \,.\, \mathrm{Z}\Lambda$.

Let such a section be called a *parabola*, and let ΘZ be called the *parameter of the ordinates* to the diameter ZH, and let it also be called the *erect side* (*latus rectum*).[a]

命題 11**《日本語訳》**

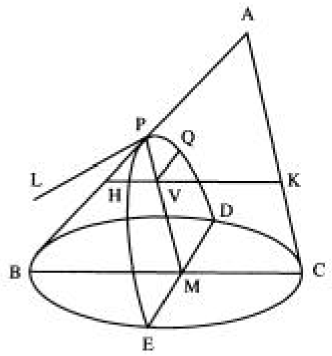
円錐を、軸を通る面で切断する。さらに、軸上の三角形の底辺に垂直な線分で円錐の底面を切断するような、もう一つの面でも切断する。そしてそれは、その切断面の直径が軸上の三角形のひとつの側に平行にしなさい。そうすると、切断面と円錐の底面との共通部分に平行になるように、切断面にできた曲線状の点から切断面の直径上の点へと線分が描かれるときに、その線分を一辺とする正方形は、その線分により切断面の直径が曲線の頂点の方向に切り取られる線分と、もう一つのある線分によってできる長方形に等しいであろう。この直線は円錐の頂角と弧の頂点との間の切片と同じ割合をもつだろう。軸上の三角形の底辺の正方形が三角形の残りの二つの側によって隣接した長方形と同じ割合をもつように。そして、その切断面のことを parabola **と呼ぶ。**

頂点が点 A **で、底面が** BC **を直径とする円である円錐について考える。軸を通る面で切断し、できた切断面を三角形** ABC **とする。その三角形の底辺** BC **に垂直かつ一方の母線** AC **に平行となる面で切断し、その切り口を** EPD **とする。点** P **から切り口**（PM）**に垂直になるように** PL **を描き、その長さを**

PL：PA＝BC^2：BA・AC

となるようにする。点 Q **をその切り口上に任意に取り、点** Q **を通り、**DE **に平行に** QV **をひく。**

このとき、QV^2＝PL・PV　であるといえる。



QV^2＝PL・PV とは・・・

　QV を一辺とする正方形の面積と等しい長方形を PL 上につくると、PL と PV によってつくられる長方形の面積に等しい。

　そこで、アポロニウスはこの曲線を parabola（παλαβολή　、あてはまる）と名づけた。

問　作図ツール(Cabri Geometry Ⅱ)を用いて、「**QV^2＝PL・PV**」の関係を作図してみよう。

現代的な証明

＜証明＞

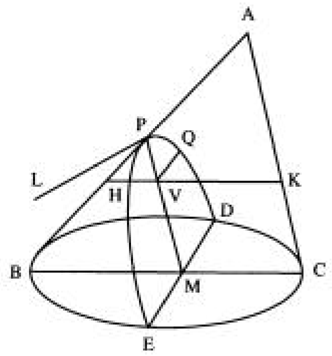
（命題 11**）Ｐ**M//AC

P **を通り切口の平面に垂直な線分** PL **をひき、その長さを、**

PL：PA＝$\underline{\underline{BC^2：BA・AC}}$

PL **はパラメーターまたは通径**（1atus rectum）**という。**

ｐで示すこともある。



点 Q **をその切り口上に任意に取り、点** Q **を通り、**DE **に平行に** QV **をひく。**

Ｖを通り BC **に平行に** HK **をひくと、**HK **は底面に平行な円の直径となるから**

$QV^2＝\underline{HV・VK}$　・・・　（1）　　**【比例中項の関係より】**

相似三角形から

HV：PV＝BC：AC
VK：PA＝BC：BA　（2）

（２）は

HV / PV＝BC / AC
VK / PA＝BC / BA

とかける。

原典英語訳において
BΓ^2：BA・AΓ＝(BΓ：ΓA)(BΓ：BA)**は**
BΓ^2 / BA・AΓ＝(BΓ / ΓA)(BΓ / BA)
と考えればよい。

よって、（２）の 2 **つの式の積をとると**

HV・VK / PV・PA＝BC^2 / BA・AC

∴　$\underline{HV・VK}$：PV・PA＝$\underline{\underline{BC^2：BA・AC}}$〔(2) **から**〕

∴　QV^2：$\underline{PV・PA}$＝PL：PA〔(1) **と仮定による**〕

＝PL・PV：$\underline{PV・PA}$

∴　QV^2＝PL・PV