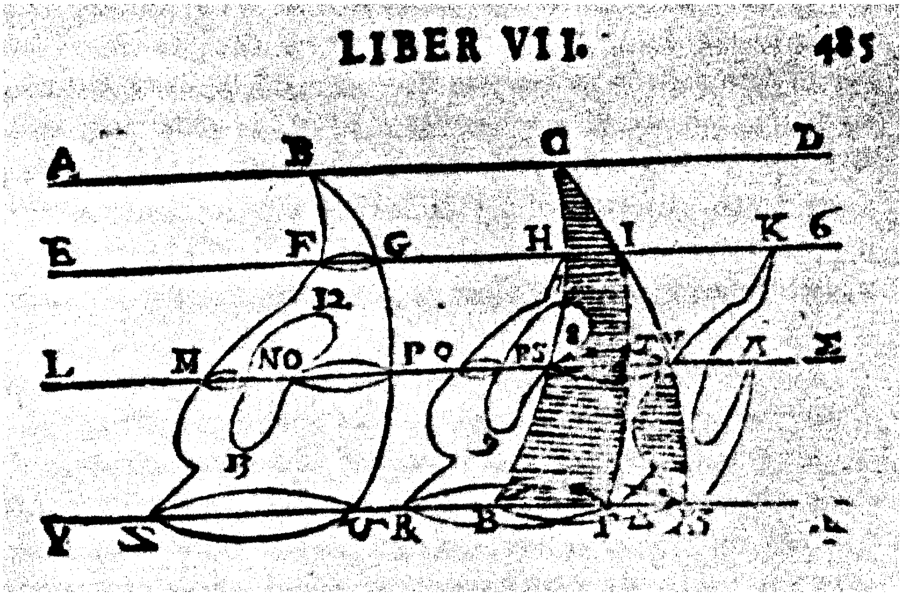
授業資料　１

積分の夜明け

～求積から積分公式へ～

１日目



不可分量と Cavalieri

授業者：中嶋　恭子

§１．「求積」に「不可分量」を用いた数学者たち

「求積」(面積，体積を求める)ために、「不可分量(indivisibles)」を無限個寄せ集めるという計算法(無限小解析(infinitesimal analysis))の研究の始まりに貢献した代表的な数学者として、ケプラー，カヴァリエーリ，ウォリスが挙げられる。まだ、極限(limit)の思想は明確には現れていないが，今日の定積分として学ぶものと本質的には同様のものである。

ケプラー(Johannes Kepler, 1571-1630)

ドイツの物理学者。「ケプラーの法則」の発見者。面積速度一定を証明する際に、楕円の周をだんだん細かく分割の数を増やし、各弧に、太陽 S を頂点とする小部分(小さな三角形(不可分量の概念))を対応させ、おのおのの面積の和を計算するという計算法(無限小解析)を用いた。

カヴァリエーリ(Bonaventura Cavalieri, 1598-1647)

イタリアの物理学者。ガリレオの(トリチェリと共に)弟子。主な研究は、ケプラーの著書「樽の体積測定」に強い影響を受けて行った不可分量に基づく無限小解析である。その研究は「連続な不可分量の幾何」(1635 年)となって、後世に大きな影響をあたえた。

ロベルヴァール(Roberval, 1602-1675)

フランスの数学者。カヴァリエーリの方法に類似した不可分量の方法を発案した。サイクロイドに関する業績が大きい。

トリチェリ(Evangelista Torricelli, 1608-1647)

イタリアの数学者。不可分量の熱烈な信奉者。求積問題と接線問題に取り組んだ。物理学者として気圧計の発明で有名。

ウォリス(Jon Wallis, 1616-1703)

イギリスの数学者。無限小解析の研究発展に貢献した著書として「無限解析」がある。カヴァリエーリは、幾何学的無限小(線分，面分といった幾何学的不可分量)であったことに対して、ウォリスの方法は算術的不可分量(arithmetical indivisibles)によってなされた。

今回は、多くの数学者達の研究を体験することによって、「積分」を実感しよう

§２．不可分量とは？

「不可分(量)」の意味は？各自調べてきた意味を書いてください

まずは、「カヴァリエーリの原理」を理解しよう

The Theorem. If between the same parallels any two plane figures are constructed, and if in them, any straight lines being drawn equidistant from the parallels, the included portions of any one of these lines are equal, the plane figures are also equal to one another; and if between the same parallel planes any solid figures are constructed, and if in them, any planes being drawn equidistant from the parallel planes, the included plane figures out of any one of the planes so drawn are equal, the solid figures are likewise equal to one another.

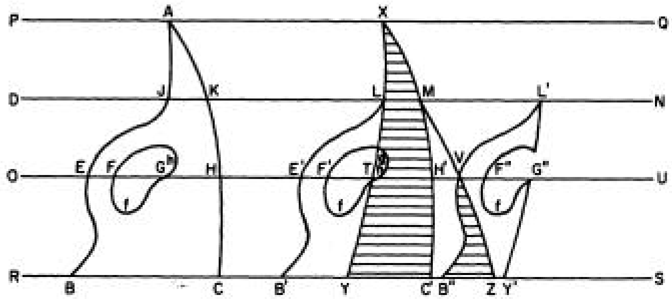
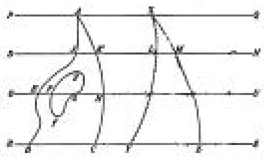
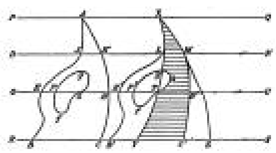
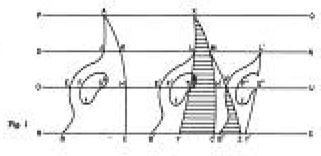


Fig. 1







equ parallels　**平行線**　　idistant　**等距離**　　portion　**部分**　　plane　**平面**

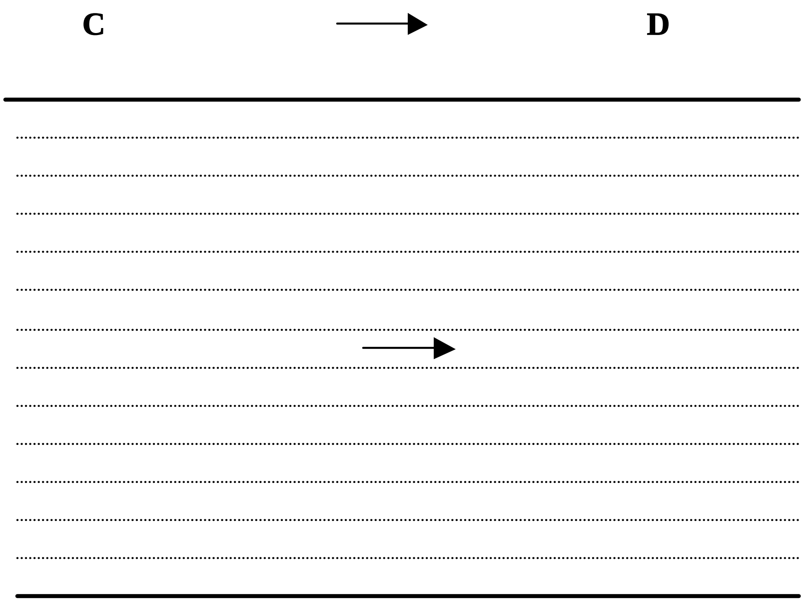
上の英文の、「；」までの２センテンスを日本語に直してください。

また、ある平行な平面の間に２つの立体図形があるとし、そしてその平行な平面の間にその平行な平面から等距離に引かれたどんな平面においても、そしてその引かれた平面の立体図形に含まれる部分がどんな場合にも等しいならば、それらの立体図形も互いに等しい。

カヴァリエーリの求積の方法の考え方

「平面図形の面積を求めるため」の考え方は、「平面図形は、ある与えられた直線に平行な直線(線分、弦)の無限集合と、平行な(接する)両端の直線に囲まれたものから成り立つ」。

面積は同じで形の違う図形を書いてみよう



面積がそれぞれ C と D の２個の図形を考える。形は任意である。上図のように平行な横軸に挟まれた両者を、横軸のどの位置に置いても、C を貫くカットの垂直断面と D を貫くカットの垂直断面の長さが等しいとする。すなわち、すべての横軸に対して$c_x = d_x$だとする。このとき、C=D であると結論するのは合理的である。

カヴァリエーリの不可分量の捉え方

線の不可分量は点、面の不可分量は線、立体の不可分量は面である

「体積を求めるため」の考え方は、「立体図形は、平行な平面での切断面の無限集合に分割される」。

他の不可分量と比較することによって、２つの幾何学的図形を比較するカヴァリエーリの方法は、カヴァリエーリの定理として、いまでも知られている。

もし、２つの立体が互いに等しい高さをもち、底面に平行で底面から等しい距離にある平面による切断面の面積の比が常に一定であるとき、その２つの立体の体積の比も同じである。

例えば、もし２つの三角錐が同じ高さｈと同じ底面積Ａをもつならば、相似比は１：１で、「同じ高さにおける角錐の断面が同じ面積をもつ」ことを示す。そこで、カヴァリエーリの定理は２つの角錐は同じ体積をもつことを得る。

このことを利用して、底面の半径ｒ、高さｈの円錐Ｃの体積公式を導こう。我々は高さｈ、単位正方形の底面をもつ角錐Ｐと比較する。勿論ここで我々は、ユークリッド原論第 12 巻７の「三角形を底面とするすべての角柱は三角形を底面とする互いに等しい三つの角錐に分けられる。」 系「これから次のことが明らかである、すなわちすべての角錐はそれと同じ底面および等しい高さをもつ角柱の３分の１である。」を既知のものとし、πr^2：Ａ＝Ｖ：1/3Ａｈ　が成り立つことより、Ｖ＝1/3πr^2　と求まる。

次回予告
§３．ロヴェンバールのサイクロイド
求積の前に、1600 年代の数学者の間で流行した曲線サイクロイドについて
○ロヴェンバールのサイクロイドを描いてみよう

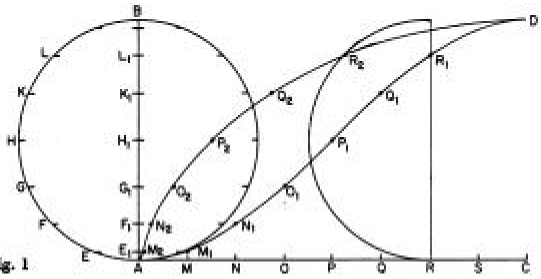


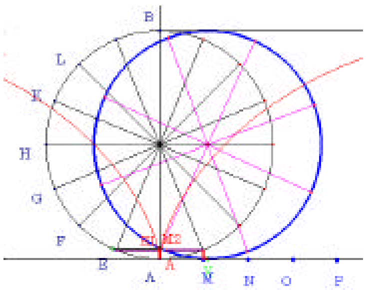
Fig. 1

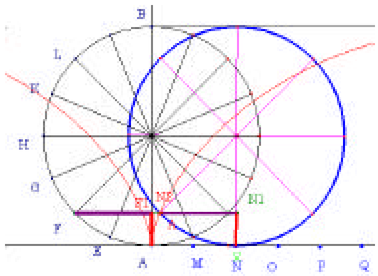
To Generate the Cycloid. Let the diameter AB [Fig. 1] of the circle $AEGB$ move along the tangent AC, always remaining parallel to its original position, until it takes the position CD, and let AC be equal to the semicircle AGB. At the same time, let the point A move on the semicircle AGB, in such a way that the speed of AB along AC may be equal to the speed of A along the semicircle AGB. Then, when AB has reached the position CD, the point A will have reached the position D. The point A is carried along by two motions—its own on the semicircle $AEGB$, and that of the diameter along AC. The path of the point A, due to these two motions, is the half cycloid $A \cdots D$, the second half being symmetrical with the first.

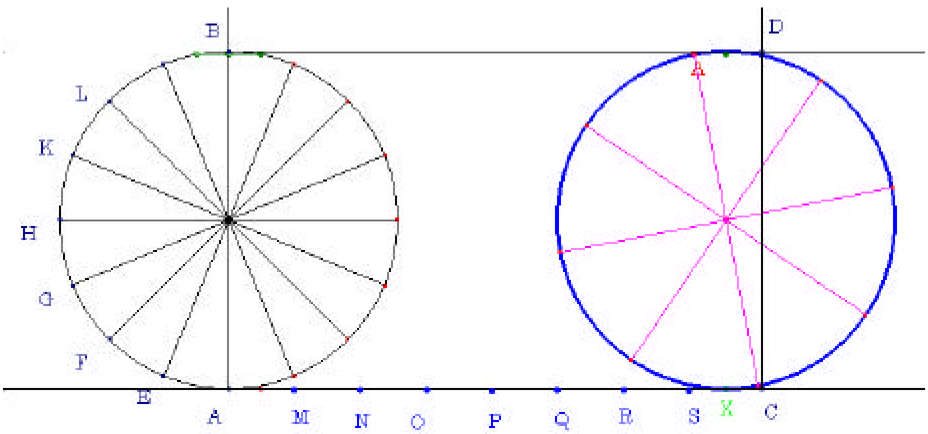
サイクロイドを発生させるために

[図 1]円 AEGB の直径 AB を接線 AC に沿って、その原点までずっと平行に CD まで動かし、線分 AC の長さが半円 AGB の弧の長さと一致するようにする。同時に点 A を半円 AGB 上で動かし、AC に沿って直径の動くスピードは半円に沿って動く A のスピードと同じである。そのとき、直径が CD の位置に到達したとき、点 A は位置 D に到達する。点 A は２つの動きによって運ばれる～その一つは半円ＡＥＧＢ上で、もう一つは線分 AC に沿って動く直径上を動く。これらの２つの動きによって点 A の通った道は、サイクロイドの半分 A・・・D であり、この初めのサイクロイドに対して対称に残りのサイクロイドの半分ができる。

ロヴェルバールにしたがってサイクロイドを作図してみよう







【宿題】
ワークシートにサイクロイドを作図してみよう

授業資料　２

積分の夜明け

～求積から積分公式へ～

２日目

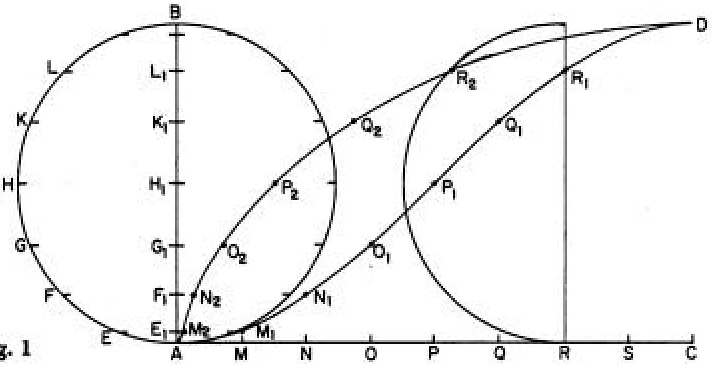


Fig. 1

不可分量と求積

そして、定積分の概念へ

授業者：中嶋　恭子

§ 3．ロヴェンバールのサイクロイド

求積の前に、1600 年代の数学者の間で流行した曲線サイクロイドについて

○ロヴェンバールのサイクロイドを描いてみよう

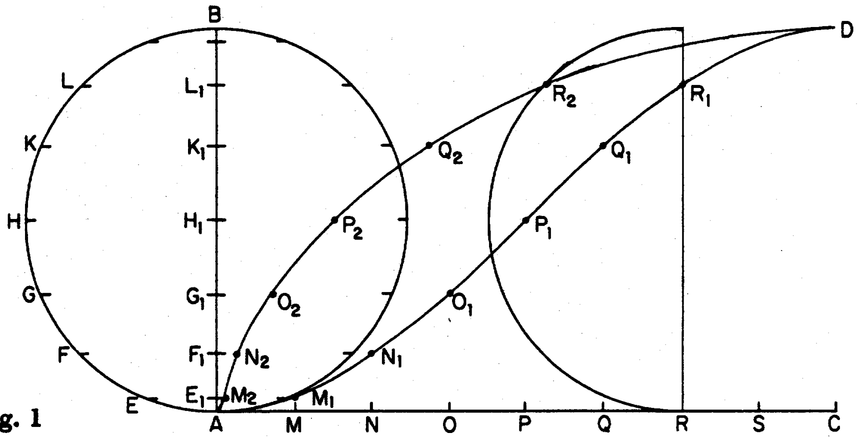


Fig. 1

To Generate the Cycloid. **Let the diameter AB [Fig. 1] of the circle $AEGB$ move along the tangent AC, always remaining parallel to its original position, until it takes the position CD, and let AC be equal to the semicircle AGB. At the same time, let the point A move on the semicircle AGB, in such a way that the speed of AB along AC may be equal to the speed of A along the semicircle AGB. Then, when AB has reached the position CD, the point A will have reached the position D. The point A is carried along by two motions—its own on the semicircle $AEGB$, and that of the diameter along AC. The path of the point A, due to these two motions, is the half cycloid $A \cdots D$, the second half being symmetrical with the first.**

サイクロイドを発生させるために

[図 1]円 AEGB の直径 AB を接線 AC に沿って、その原点までずっと平行に CD まで動かし、線分 AC の長さが半円 AGB の弧の長さと一致するようにする。同時に点 A を半円 AGB 上で動かし、AC に沿って直径の動くスピードは半円に沿って動く A のスピードと同じである。そのとき、直径が CD の位置に到達したとき、点 A は位置 D に到達する。点 A は２つの動きによって運ばれる～その一つは半円ＡＥＧＢ上で、もう一つは線分 AC に沿って動く直径上を動く。これらの２つの動きによって点 A の通った道は、サイクロイドの半分 A・・・D であり、この初めのサイクロイドに対して対称に残りのサイクロイドの半分ができる。

The Nature of the Cycloid. Let the line AC and the semicircle AGB be divided into an infinite number of parts such that arc AE = arc EF = $\cdots$

$$= \text{line } AM = \text{line } MN = \text{line } NO = \cdots.$$

Draw the sine EE_1 perpendicular to the diameter AB, and the versed sine AE_1 is the altitude of A when it has come to E. Similarly draw FF_1, GG_1, etc.

Let MM_1 be parallel and equal to AE_1, NN_1 parallel and equal to AF_1, etc. Let M_1M_2 be parallel to AC and equal to EE_1, N_1N_2 parallel to AB and equal to FF_1, etc. [Roberval's notation for $M_1, N_1, \ldots$ is $1, 2, \ldots$; for $M_2, N_2, \ldots$ is $8, 9, \ldots$.]

When the diameter has reached the point M, the point A will have reached the position E, the distance of A above AC will be $MM_1 = AE_1$, and the distance of A from the diameter AB will be $EE_1 = M_1M_2$, hence when the diameter is at M the point A is at M_2. In the same way, when the diameter is at N the point A is at N_2, etc. We thus get two curves, one $AM_2N_2 \cdots R_2D$, and the other $AM_1N_1 \cdots R_1D$. The first of these is the path of the point A, which is the first half of the cycloid.

（Traite des Indisibles;1634）

サイクロイドの性質

直線 AC と半円 AGB は弧 AE＝弧 EF＝・・・=線分AM＝線分 MN=線分 NO=・・・のように無限個の部分にわけられた。直径 AB に垂直に線分 EE_1 を引くと線分 AE_1 は点 A が E まできたときの高さとなる(それらは、対応する角の sin である)。同様にして線分 FF_1 , GG_1 ,・・・が描かれる。線分 MM_1 は線分 AE_1 に平行でかつ等しく、線分 NN_1 は線分 AF_1 に平行でかつ等しく、・・・。線分 M_1M_2 は直線 AC に平行で線分 EE_1 に等しく、線分 N_1 N_2 は直線 ACに平行で線分 FF_1 に等しく、・・・。(ロベンバルの論文では、M_1 , N_1 ・・・は1，2，・・・；M_2 , N_2 ・・・は8，９，・・・とある)

その直径が点 M に達したとき点 A は点 E に達し、直線 AC に沿って動く直径上に点 A があるとき点 A の位置を示す距離は MM_1 ＝AE_1 となり、直径 AB から A への距離は EE_1＝M_1 M_2 となる。だから直径が M に達したとき点 A は M_2 となる。同様にして、直径が N 上のとき、点 A は N_2 になり、・・・。我々はこのようにして２つの曲線を得た。１つは AM_2N_2 ・・・R_2D, もう１つは AM_1N_1 ・・・R_1D。これらの最初のものは点 A の進路である。そして、それはサイクロイドの半分である。

The Companion of the Cycloid. The curve drawn through the points $AM_1N_1 \cdots R_1D$, is known as the companion of the cycloid.[2]

サイクロイドの随伴曲線

そのカーブは点AM_1N_1・・・R_1Dを通るように描かれ、サイクロイドの随伴曲線であることが知られている。

みなさんのよく知っている 曲線です。その曲線とは？

身近にあるサイクロイド

アーチ

法隆寺の甍

§４．不可分量を利用して面積、体積を求めよう

○ロヴェンバールのサイクロイドに囲まれる面積を求めよう

Proposition 1. *The area of the figure included between the cycloid and the companion of the cycloid is equal to the area of half of the generating circle.*

Proof. Within the figure $AM_2N_2 \cdots D \cdots N_1M_1 \cdots A$ we have $M_1M_2 = EE_1$, $N_1N_2 = FF_1$, $O_1O_2 = GG_1$, etc.

Now M_1M_2, N_1N_2, O_1O_2 divide this figure into strips whose altitudes are AE_1, E_1F_1, $F_1G_1, \ldots$, while EE_1, FF_1, $GG_1, \ldots$ divide the semicircle AHB into strips having the same altitudes. Hence the corresponding infinitesimal strips are equal. Therefore the area of the figure $AM_2N_2 \cdots D \cdots N_1M_1 \cdots A$ is equal to the area of the semicircle AHB.[3]

Proposition 2. *The area of the figure included between the cycloid and its base is equal to three times the area of the generating circle.*

Proof. The companion of the cycloid, the curve $AM_1N_1 \cdots D$, bisects the parallelogram $ABCD$, since to each line in $ACDM_1$ there corresponds an equal line in $ABDM_1$.

Therefore the area of $ACDM_1 = \frac{1}{2}$ the area of $ABCD$
$= \frac{1}{2}$ „ „ „ $2 \cdot$ circle AGB
$=$ „ „ „ circle AGB.

Therefore the area of $ACDM_2 = ACDM_1 + AM_2 \cdots D \cdots M_1$
$=$ circle $AGB + \frac{1}{2}$ circle AGB
$= \frac{3}{2}$ circle AGB.

Doubling, the area between the whole cycloid and its base is equal to three times the area of the generating circle.

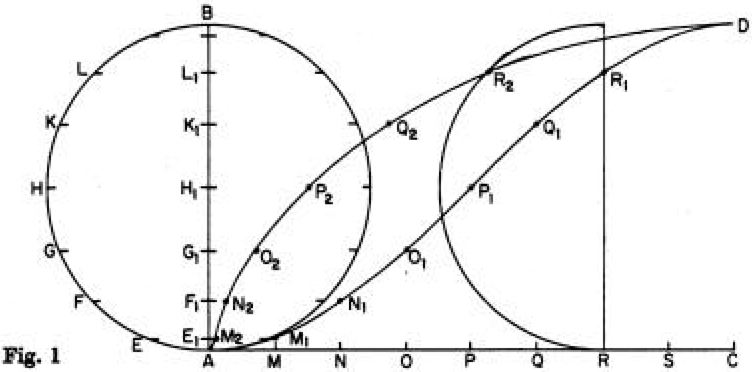


Fig. 1

（Traite des Indisibles;1634）

英文の訳を考えながら□を埋めよう。

命題１
サイクロイドと、サインカーブの間の図形の面積は円の□の面積と等しい。

証明
図AM_2N_2・・・Dにおいて、M_1M_2＝EE_1, N_1N_2＝FF_1, O_1O_2＝GG_1, ・・・とする。
今、M_1M_2，N_1N_2，O_1O_2は高さがAE_1，E_1F，F_1G_1，・・・である線でこの形をわける。一方では、EE_1，FF_1，GG_1, ・・・は半円AHBを同じ高さを持つ線に分けられる。だから対応する不可分量の線は等しい。それゆえ、図AM_2N_2の面積は半円　AHB　の面積と等しい。

命題２
サイクロイドとその底面（直線AC）の間の図形の面積は円の面□倍である。

証明
サインカーブ（曲線AM_1N_1・・・D）は、平行四□　　を二等分する。だから、$ACDM_1$におけるそれぞれの線は$ABDM_1$の線と一致し、

サイクロイドとその底辺で囲まれた面積は母円の面積□　倍である。

$ACDM_1$の面積＝□　ABD□　□・・□

＝円□

$ACDM_2$の面積＝$ABDM_1$＋AM_2・・・D・・・M_1
＝円AGB＋1/2円AGB　＝3/2円AGB

平行四辺形ABDCの面積

円AGBの半径をrとする

§５．積分の一般的な公式を求めてみよう

多くの数学者達が求積を行ってきたが、様々な計算問題が解けるような一般的原理を探求しようとした２人の研究を見てみよう。その根底には「カヴァリエーリの原理」が流れている。

カヴァリエーリの方法

もう一度カヴァリエーリの考え方について復習しよう。
カヴァリエーリは「不可分」な線や面をいかなる厚さもないものと考えた。何かある平面図形の「すべての線」という述語でカヴァリエーリは、図形を構成する互いに平行な線の全体をも考えていた。カヴァリエーリの不可分量の捉え方は、「線の不可分量は点、面の不可分量は線、立体の不可分量は面」である。

カヴァリエーリは、omens lineae　(すべての線)の omnes を記号として「omn」をもちいた。これこそが、現在「積分」と呼んでいるものを表している。

ここで、カヴァリエーリの原理に基づく「求積」の方法を思い出そう。
「他の不可分量と比較することによって、２つの幾何学的図形を比較する」
○「平面図形の面積を求めるため」の考え方は、「平面図形は、ある与えられた直線に平行な直線(線分、弦)の無限集合と、平行な(接する)両端の直線に囲まれたものから成り立つ」。
○「体積を求めるため」の考え方は、「立体図形は、平行な平面での切断面の無限集合に分割される」。

では、カヴァリエーリが、いかにして

$\mathrm{omn}\ x = \frac{1}{2}\mathrm{omn}\ a = \frac{1}{2}a^2$ ，$\mathrm{omn}\ x^2 = \frac{1}{3}\mathrm{omn}\ a^2 = \frac{1}{3}a^3$ 　を幾何学的に導いたかを考えてみよう。

まずは、本文に入る前に以下のことを確認しよう。

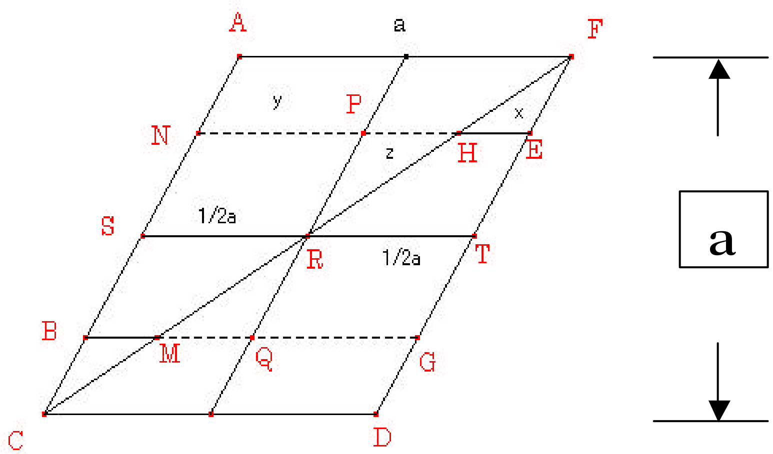
平行四辺形AFDC**の面積は、対角線**FC**で割ってできた三角形のひとつの２倍である。図１で**NE、BG、AF**が平行でさらに**HE＝BM、NH＝MG。HE＝**x,** NH＝**y,** AF＝a **とおく。xは**△DFC**の、yは**△ACF**の、aは平行四辺形AD の不可分量である。 x＋y＝aより、*omn* x＋*omn* y＝*omn* a とおく。**

ここで、使用する記号 *omn*x、*omn*y、*omn*a の図形的な意味は、それぞれ三角形DFC、ACF、**平行四辺形**AD**の面積となる。**

omn x＝***omn*** y **に注意すると、*omn*a＝*omn***(x＋y)＝***omn*** x＋***omn*** y＝２***omn*** x

したがって、*omn* x＝1/2*omn* a → 図形的意味

＝1/2a²



***omn* x²＝1/3*omn* a²** → 図形的意味

＝1/3a³

[参考文献　]

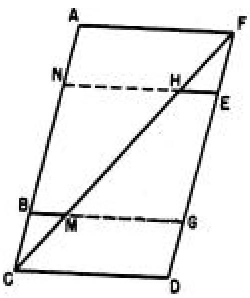
各自、訳を考えながら、カヴァリエーリの幾何学的発想に浸ってみよう

カヴァリエーリの証明

Proposition 21. *All cubes of the parallelogram AD* [Fig. 1] *are the quadruple of all cubes of either triangles ACF or FDC.*[1]

All cubes of parallelogram AD are equal to a.c. of [the line NH of] triangle ACF with a.s. of [the lines of] triangle FDC, together with three times a.l. of triangle FDC with a.s. of [the lines of] triangle ACF.[2]

(「Un chapitre de l'oeuvre de Cavalieri. Les proposition XⅥ- XXⅦ de l'Exercition Quarta」Mathesis 36 (1922))



【訳】

定理21　**図1において、平行四辺形**AD**の3乗全体は三角形** ACF **または** FDC **の3乗全体の4倍である。**

平行四辺形 AD **の3乗全体は、三角形** ACF **の［線分** NH］**の3乗全体と三角形** FDC **の［線分］の3乗の全体に、三角形** FDC **の線分全体と三角形** ACF **の線分の平方全体の** 3 **倍を足したものと等しい。**

Fig. **1**

確認事項　cube**：立方体(３乗)**　　a.c.**：すべての立方体［立方(３乗)］**
a.s.**：すべての正方形［平方(２乗)］**　　a.l.**：すべての線［(１乗)］**
triangle**：三角形**　parallelogram**：平行四辺形**　squares**：正方形**
altitude**：高さ**　ratio**：比**　resolve**：解く**　remain**：残る**
product**：積**　　together　with**：足す**

①

Now a.c. of AD are the product of a.l. AD by a.s. AD, and this is to the product of a.l. of AD by a.s. of triangle FDC as a.s. of the parallelogram AD is to a.s. of triangle FDC (because their altitude is the same, namely a.l. AD), and this ratio is 3. Hence a.c. of AD are equal to three times the product of a.l. of AD by a.s. of triangle FDC, and this is equal to the product of a.l. of triangle ACF by a.s. of triangle FDC plus the product of a.l. of triangle FDC by a.s. of the same triangle FDC, and this is equal to a.c. of triangle FDC. Hence a.c. of AD will be three times the sum of a.c. of triangle FDC and the product of a.l. of triangle ACF by a.s. of triangle FDC.

②

If now we resolve a.c. of AD into its parts, then we shall get a.c. of ACF plus a.c. of FDC plus three times the product of a.l. of triangle FDC by a.s. of triangle ACF plus three times the product of a.l. of triangle ACF by a.s. of triangle FDC. But three times the product of a.l. of triangle ACF by a.s. of triangle FDC is three times the same product. If we take it away three times of what we take away remains. So that a.c. of ACF plus a.c. of FDC and three times the product of a.l. of triangle FDC by a.s. of triangle FAC are three times a.c. of triangle FDC. Now a.c. of triangle ACF plus a.c. of triangle FCD are twice a.c. of triangle FCD, since a.c. of triangle ACF will be equal to a.c. of triangle FCD.

Hence three times the product of a.l. of triangle ACF by a.s. of triangle FCD together with three times the product of a.l. of triangle FCD by a.s. of triangle FAC and a.c. of the triangles ACF, FDC, that is a.c. of parallelogram AD, are equal to the quadruple of a.c. of triangle FDC (or triangle FAC).

This is so, since the product of a.l. of ACF by a.s. of FDC is equal to the product of a.l. of FDC by a.s. of ACF, and this is so because of the equality of the lines and their squares in those triangles FDC, ACF which alternately correspond. Hence three times the product of a.l. of ACF with a.s. of FDC are equal to three times the product of a.l. of FDC and a.s. of ACF. This makes the proof clear.[3]

確認事項

a.c.：すべての立方体［立方(３乗)］
a.s.：すべての正方形［平方(２乗)］
a.l.：すべての線［(１乗)］

本文に印をつけてみよう！

triangle：**三角形**　parallelogram：**平行四辺形**　squares：**正方形**
altitude：**高さ**　ratio：**比**　resolve：**解く**　remain：**残る**
product：**積**　together with：**足す**

図形的意味を考え$\boxed{\quad}$を埋めながら、カヴァリエーリの言葉を幾何学的にとらえ、更に現代表記してみよう

【訳】

① 今、平行四辺形 AD の３乗全体は AD の線分全体と２乗全体の積である。そしてこれと、平行四辺形ＡＤの線分全体と三角形ＦＤＣの２乗全体の積は、平行四辺形 AD の２乗全体は三角形ＦＤＣの２乗全体(なぜなら高さが同じである、つまりＡＤの線分全体)の比と等しくなり、はこの比は３である。だから、AD の３乗全体は三角形 FDC の２乗全体と AD の線分全体の積の３倍と等しい。そしてこれは三角形 FDC２乗全体と三角形 ACF の線分全体の積に、同じ三角形 FDC の平方の和と線分の和の積を加えたものと等しい。そして、三角形 FDC の３乗全体と等しい。だから、AD の立方の和は三角形 FDC の立方の和３倍と、三角形 FDC の２乗全体と三角形 ACF の線分の和の積と等しくなる。

② もし、今その一部である AD の３乗全体を分解したなら、ACF の３乗全体たす FDC の３乗全体たす三角形 ACF の２乗全体と三角形 FDC の線分全体の積の３倍たす三角形 FDC の２乗全体と三角形 ACF の線分全体の積の３倍の式を得る。しかし、三角形 FDC の２乗全体と三角形 ACF の線分全体の積の３倍は同じ積の３倍である。もしその３倍を取り除いたなら、ACF の３乗全体に FDC の３乗全体を加え、更に三角形 FDC の線分全体と三角形 FAC の２乗全体の積の３倍を加えたものは、三角形 FDC の３乗全体の３倍となる。今、三角形 ACF の３乗全体は、三角形 FCD の３乗全体と等しいから、三角形 ACF の３乗全体に FCD の３乗全体を加えたものは三角形 FCD の３乗の２倍となる。

ここで、三角形 FCD の２乗全体と三角形 ACF の線分全体の積の３倍と三角形ＦAC の２乗全体と三角形 FCD の線分全体の積の３倍と ACF、 FDC の３乗全体を足したもの、AD の３乗全体であるが、三角形 FDC(または、三角形 FAC)の３乗全体の４倍と等しい。

これは、FDC の２乗全体と ACF の線分全体の積が ACF の２乗全体と FDC の線分全体の積と等しいことからわかる。なぜなら、互いに一致している三角形 FDC,ACF の２乗と線分が同じであるから。だから、FDC の２乗全体と

カヴァリエーリの示した方法を代数的に記してみよう

①
$omn(x+y)^3 =$
$omn(x+y)(x+y)^2$
$\rightarrow omn(x+y)x^2$
$omn(x+y)^2$
$\rightarrow omn x^2$
$omn xy^2 = omn x^2 y$
$omn(x+y)^3 : omn(x+y)x^2$
$= omn(x+y)^2 : omn x^2$
$= 3 : 1$ **よって、**
$omn(x+y)^3 = 3omn(x+y)x^2$
$= 3(omn\,y\,x^2 + omn\,x\,x^2)$
$= 3omn x^3 + 3omn x^2 y$

②$omn(x+y)^3 =$
$omn x^3 + omn y^3$
$+3omn xy^2 + 3omn x^2 y$
$omn(x+y)^3$
$= 3omn x^3 + 3omn x^2 y$
上の２式より $3omn x^2 y$
を取り去ると
$omn x^3 + omn y^3 + 3omn xy^2$
$\boxed{\quad}$
$omn x^3 = omn y^3$ **から**
$omn x^3 + om\boxed{\quad}$
このとき
$omn x^3 + omn y^3 + 3omn xy^2$
$= 3omn x^3$ **より**
$\boxed{\qquad\qquad}$
$omn x^3 + omn y^3 + 3omn xy^2$
$+3omn x^2 y$
$= omn(x+y)^3$
$\boxed{\quad}$
$= \boxed{\quad}$
$omn xy^2 = omn x^2 y$ **から**

ACF の線分全体の積の３倍は ACF の２乗全体と FDC の線分全体の積の３倍と等しい。これは、明確に証明された。 $3\mathit{omn}\,xy^2 = 3\mathit{omn}\,x^2y$

①②の結果から

$$\mathit{omn}\ \mathbf{x}^3 = 1/4\,\mathit{omn}\ \mathbf{a}^3 \longrightarrow \boxed{\text{図形的意味}}$$

$$= 1/4\mathbf{a}^4$$

カヴァリエーリは、このような過程を繰り返し（n＝９まで）

$\mathit{omn}\,\mathbf{x}^n$ ＝ $\boxed{}$ と予測した

これは、現代における $\int_0^a x^n dx = \boxed{}$ を意味する

《重要参考資料》
○トリチェリのとがった双曲面体

ON THE ACUTE HYPERBOLIC SOLID

Consider a hyperbola of which the asymptotes *AB*, *AC* enclose a right angle [Fig. 1]. If we rotate this figure about the axis *AB*, we create what we shall call

an acute hyperbolic solid, which is infinitely long in the direction of *B*. Yet this solid is finite. It is clear that there are contained within this acute solid rectangles through the axis *AB*, such as *DEFG*. I claim that such a rectangle is equal to the square of the semiaxis of the hyperbola.[1]

We draw from *A*, the center of the hyperbola, the semiaxis *AH*, which bisects the angle *BAC*. This gives us the rectangle *AIHC*, which is certainly a square (it is a rectangle and the angle at *A* is bisected by the axis *AH*). Therefore the square of *AH* is twice the square *AIHC*, or twice the rectangle *AF*, and therefore equal to the rectangle *DEFG*, as claimed.[2]

【訳】

図１で、直角に交わる AB, ＡＣを漸近線とする双曲線を考える。もし、この図形を軸 AB の周りに回転させたならば、B の方向に無限に長い、とがった双曲的立体を生み出せる。またこの立体は有限である。それは、DEFG のように軸 AB を貫くこのとがった立体長方形を含むことは明らかである。私は、長方形は双曲線の半軸による正方形と同じであることを主張する。

双曲線の中央 A から角 BAC を二等分する（半軸）AH をかく。これは確かに正方形である AIHC を与える(それは長方形であり、そして A における角は軸 AH によって二等分されている)。それゆえに AH の正方形は正方形 AIHC の２倍、または長方形 AF の２倍、それゆえ主張されている長方形 DEFG と同じである。

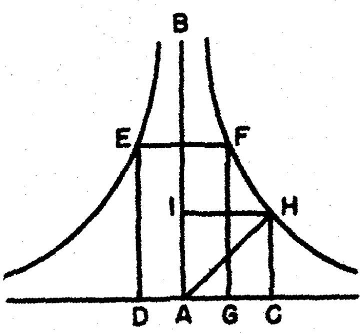


Fig. 1

Ａを原点、直線ＡＢをｙ軸として、双曲線HF を表す式を$y=a^2/x$　とおくことによって、この主張が正しいことを確認しよう

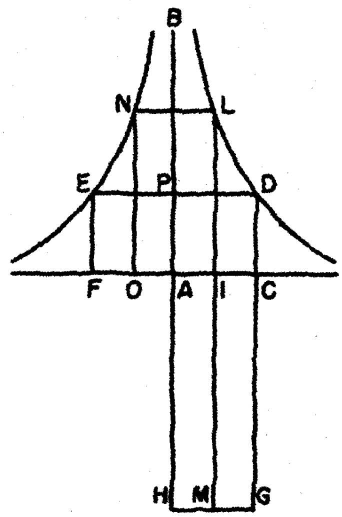
Theorem. An acute hyperbolic solid, infinitely long, cut by a plane [perpendicular] to the axis, together with the cylinder of the same base, is equal to that right cylinder of which the base is the latus versum (that is, the axis) of the hyperbola, and of which the altitude is equal to the radius of the basis of this acute body.

Consider a hyperbola of which the asymptotes AB, AC [Fig. 4] enclose a right angle. We draw from an arbitrary point D of the hyperbola a line DC parallel to AB, and DP parallel to AC. Then the whole figure is rotated about AB as axis, so that the acute hyperbolic solid EBD is formed together with a cylinder $FEDC$ with the same base. We extend BA to H, so that AH is equal to the entire axis, that is, the latus versum of the hyperbola. And on the diameter AH we imagine a circle [in the plane] constructed perpendicular to the asymptote AC, and over the base AH we conceive a right cylinder $ACGH$ of altitude AC, which is the radius of the base of the acute solid. I claim that the whole body $FEBDC$, though long without end, yet is equal to the cylinder $ACGH$.

We select on the line AC an arbitrary point I and we form the cylindrical surface $ONLI$ inscribed in the acute solid about the axis AB, and likewise the circle IM on the cylinder $ACGH$ parallel to the base AH. Then we have, according to our lemma: (cylindrical surface $ONLI$) is to (circle IM) as (rectangle OL through the axis) is to (square of the radius of circle OM), hence as (rectangle OL) is to (square of the semiaxis of the hyperbola).

And this will always be true no matter where we take point I. Hence all cylindrical surfaces together, that is, the acute solid EBD itself, plus the cylinder of the base $FEDC$, will be equal to all the circles together, that is, to the cylinder $ACGH$. Q.E.D.[5]

Fig. 4



【訳】

定理　無限に長い、とがった双曲的立体は、軸に垂直な面で切ってできる断面を底面とする円柱を足していくとできあがり、その円柱の側面は、底面の半径が双曲線の側線(それは、軸)であり、高さはこのとがった立体の底面の半径と同じ右の円柱と同じである。

図４において漸近線 AB，AC が直交している双曲線をよく考えよう。我々は双曲線上の勝手にとった点 D から AB に平行に DC を引き、DP は AC に平行にひく。図全体は軸である AB のまわりを回転させ、それでとがった双曲的立体 EBD は同じ底面をもつ円柱 FEDC を形成する。そこで AH が双曲線の側線である軸全体と等しくなるように BA を H まで延長する。そして直径 AH において(平面の)漸近線 AC に垂直に描かれた円をイメージできる。そして底面 AH の上に高さ AC の右の円柱 ACGH を理解する。ＡＣはとがった立体の底辺の半径である。

立体 FEBDC 全体を求めることを考えれば限りがないが、いつかは円柱 ACGH と等しくなる。

我々は、線分 AC 上に勝手に点 I をとり、軸 AB であるとがった立体に内接する円柱の曲面 ONLI をつくる。そして、同様に底面 AH に平行な円柱 ACGH 上にその円 IM をつくる。そのとき、補助定理によると、(長方形 OL)と(双曲線の半軸の平方)の比から、(円柱の曲面 ONLI)と、（円 IM）の比は(軸をまたがる長方形ＯL)と(円 OM の半径の平方)の比と等しい。

そして、これは点 I をどこにとろうが、常に正しい。だから、すべての円柱の曲面は同時にとがった立体 EBD それ自身となり、底面 FEDC の円柱まで加え、すべての円と共に等しくなる。すなわち円柱 ACGH と等しくなる。

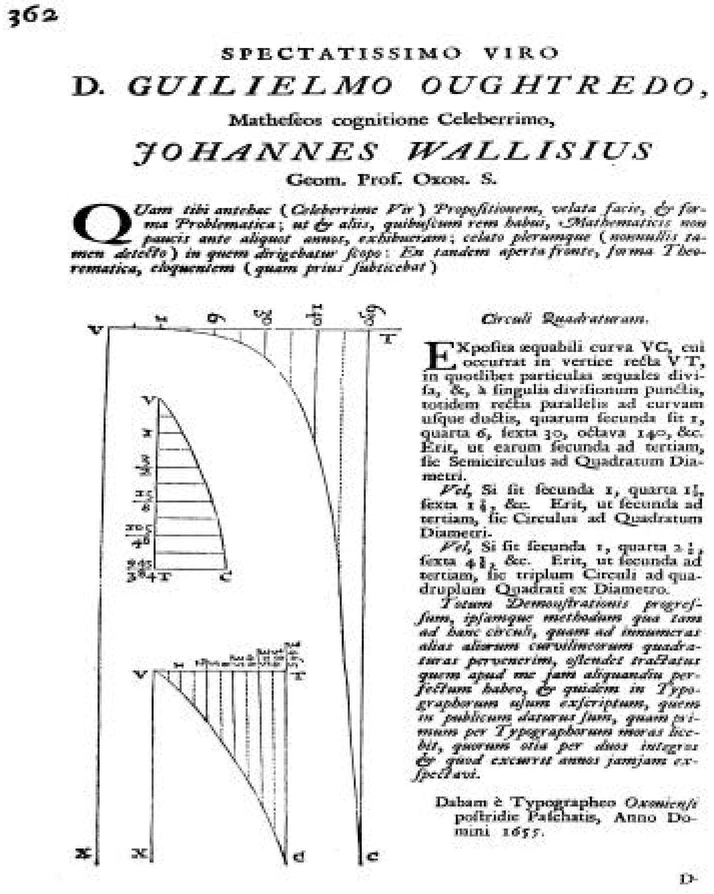
Ａを原点、直線ＡＢをｙ軸として、双曲線ＬＤを表す式をｙ＝ａ^2／ｘ　とおくことによって、この主張の中の『「(円柱の曲面 ONLI)と、（円 IM）の比」が１：１である』ことを確認しよう。

授業資料　3

積分の夜明け

～求積から積分公式へ～

３日目



362

SPECTATISSIMO VIRO

D. GUILIELMO OUGHTREDO,

Mathefeos cognitione Celeberrimo,

JOHANNES WALLISIUS

Geom. Prof. Oxon. S.

Quam tibi antehac (Celeberrime Vir) Propositionem, velata facie, & forma Problematica; ut & aliis, quibuscum rem habui, Mathematicis non paucis ante aliquot annos, exhibueram; celato plerumque (nonnullis tamen detecto) in quem dirigebatur scopo: En tandem aperta fronte, forma Theorematica, eloquentem (quam prius subticebat)

Circuli Quadraturam.

Expofita æquabili curva VC, cui occurrat in vertice recta VT, in quotlibet particulas æquales divifa, &c, à fingulis divifionum punctis, totidem rectis parallelis ad curvam ufque ductis, quarum fecunda fit 1, quarta 6, fexta 30, octava 140, &c. Erit, ut earum fecunda ad tertiam, fic Semicirculus ad Quadratum Diametri.

Vel, Si fit fecunda 1, quarta $1\frac{1}{2}$, fexta $1\frac{7}{8}$, &c. Erit, ut fecunda ad tertiam, fic Circulus ad Quadratum Diametri.

Vel, Si fit fecunda 1, quarta $2\frac{1}{4}$, fexta $4\frac{3}{8}$, &c. Erit, ut fecunda ad tertiam, fic triplum Circuli ad quadruplum Quadrati ex Diametro.

Totum Demonftrationis progreffum, ipfamque methodum qua tam ad hanc circuli, quam ad innumeras alias aliorum curvilineorum quadraturas pervenerim, oftendet tractatus quem apud me jam aliquamdiu perfectum habeo, & quidem in Typographorum ufum exfcriptum, quem in publicum daturus fum, quam primum per Typographorum moras licebit, quorum otia per duos integros & quod excurrit annos jamjam expectavi.

Dabam è Typographeo *Oxonienfi* poftridie Pafchatis, Anno Domini 1655.

D-

ウォリスの定積分への概念へ

授業者：中嶋　恭子

§６．ウォリスの方法

J.ウォリス
(1616—1703)

積分法の発展における基本的に重要な一歩は，ウォリスの仕事と結びついてる。ウォリスの数学の業績は，無限小解析の代数化，部分的な帰納法の広い適用，関数の積分における新しい公式の獲得，べき乗の概念の一般化，極限の基礎の研究，無限積の形での数πの表現，階乗の概念の一般化などから成る。ウォリスは 1656 年にオクスフォードでラテン語で出版された『無限の算術』で積分と関連した問題について論じている。
注）無限小解析とは、微分及び n→∞のもとでの n 個の無限小の和の処理としての積分の研究。しばしば、微分積分学及び微分積分学を用いてすべての主題に対しても用いられる。
ジョン・ウォリスは，1616 年 11 月 23 日に，エシュフォード（東ケント）で生まれた。彼の父は教区の司祭だった。ウォリスは初等教育を私学で受け，1632 年にケンブリッジ大学の神学部に入った。彼は数学を独学で学んだ。V．オトレッド（1575－1660）の『数学の鍵』，T．ハリオット（1560－1621）の『解析術演習』，ユークリッド，アルキメデス，アポロニウスの著作，デカルトの『幾何学』を読んだ。ウォリスはカヴァリエーリの不可分法を，トリチェリの『幾何学研究』で知った。彼は書いている。「私は 1650 年に，トリチェリの数学上の研究を学んだ。そのなかには，他の問題とともにカヴァリエーリの「不可分法の幾何学」が述べてあった。カヴァリエーリ自身のものは，何度か本屋で探したが見つからなかった。トリチェリが書いたカヴァリエーリの方法を，私はなぜかとくに気に入ったのである。というのは，そこには何か私を数学にひきつけるものがあったからである。そして私は，大部分の著者たちが円について書いていることが（それらは円を無限個の辺の多角形で置き換え，円を無限に短い無限個の直線で表している），**mutatis mtandis**(適当な変更によって)ほかの問題にも適用できることを知ったのである」。

ウォリスは驚異的な記憶力と計算力をもっていた。ある眠れない夜，彼は **53** ケタの数の平方根をそらで **27** ケタ計算してそれを記憶し，翌朝書き記したのである。

ウォリスは，その頃までに得られた代数と解析幾何の成果にもとづいて，不可分法の幾何学的方法の改良を行い，それに部分的帰納法と極限法をつけ加えた。

1652年までに彼は，代数学を基礎とする円錐の切断理論をつくり，1656年には，「新しい方法による，円錐の切断についての論文」を出版した。その頃彼は，正負の整数べき，分数指数べきの積分 $\int_0^a x^n dx$ を計算した。

ウォリスの『無限算術』が刊行されてから約10年後に，ニュートンによる「無限に多くの項をもつ方程式による解析」と「流率法」の研究がなされる。ニュートンは，自分の数学の研究を発表しなかった。ウォリスはそれらの内容を，ニュートンのオルデンブルクへの 2 通の手紙で知り，「流率法」の基本的思想を「代数学」のなかで述べ，ニュートンの重要な発見を数学の世界での共有物にするべくつとめたのである。

ニュートンはウォリスを高く評価していた。「私は数学の学習の初期に，著名なウォリスの一連の著作の研究に向かった。それらをつなぐことによって彼は円や双曲線の面積を得ていたのだった…」，と彼は書いている。

われわれに関心のあるウォリスの著作の完全な題名は，『無限の算術または曲線図形の面積を求め，他のより困難な数学の問題を研究するための新しい方法』である。その組みたては通常の数学論文のもので，一連の補題，定理，系，注釈からなっている。補題では問題が提起され，例題でそれらの解が与えられる。結果は帰納的に一般化されて，定理一法則の形で定式化される。それから系が得られる。

ウォリスが，面積についての問題の設定とその解決への一般的取扱いを最初におこなったのは，円錐の切断についての論文においてである。『無限算術』で彼は方法を一般化し，それを体積計算に応用した。円錐の切断についての論文のはじめに，ウォリスは三つの三角形を考察する。それらに同じ高さの長方形または平行四辺形からなる階段状の図形を内・外接させる。彼は書いた。「これらの平行四辺形は，全体として三角形に内・外接する図形をなし，こうした内・外接する図形中の平行四辺形が多くなればなるほど，この図形の，もとの三角形からの過剰あるいは不足によるずれは小さくなる。したがって，この平行四辺形の個数が無限大になれば，この違いは無限小，つまり零である・・・」

（ニキフォロスキー著「積分の歴史」より）

D. GUILELMI OUGHTREDI,

Ad præcedentem Epistolam (post Librum editum) Responsio. Quo quid ille de hac methodo senserit, innotescat.

Venerabili Viro & Amico plurimum Honorando
D. JOHANNI WALLISIO
S.

HAud facile dici potest (Venerande Vir) quanta cum Voluptate perlustravi (prout per alia licuit Negotia, per infirmam Valetudinem, per grandem Ætatem & ad finem properantem, agentis annum 82,) Eruditissima tua (de pluribus eximiis subtilibusque argumentis) scripta, ad me missa. Deoque primum, patri luminum, gratias recognosco debitas, qui tam illustri te donavit lumine: Tibique dein Gratulor, etiam cum Admiratione, tantam tum perspicuitatem, tum perspicaciam mentis geniique tui; qui novam non tantum iniveris ipse, sed & aliis aperueris viam, in abditissima Artis mysteria penetrandi; Veteribus incognitam, & ne cogitatam quidem. Eoque me majori movent affectu hæc inventa tua, mysteriis plena, quod Honorabilis Eques (scientissimus ipse & scientiarum patronus) D. *Carolus Cavendish*, jam ante annos viginti, monstravit mihi Chartulam (*Parisiis* ad se missam) pauca quidem, sed egregia quædam nova Theoremata continentem; per *Cavallerii* (credo) methodum excogitata; quæ ego itidem (methodo meis magis conformi) iterato absolvi, & cum pluribus communicavi; quorum aliqui ex meo scripto fecerunt sibi Apographa, sed quod ipse nunc ad manum non habeo. Quod repeto, quia jam tum videre mihi visus sum tanquam è longinquo suborientem lucem, patefacturam mira; quæ supremis hisce mundi seculis humanum genus olim aliquando foret irradiatura. Quam ego lucem, tunc, quasi à longinquo conspectam, salutabam; nunc, ut in propinquo positam, complector; prosperis his initiis effulgentem. Quod Nomen meum, scriptis hisce tuis nunquam emorituris, præfigere dignatus sis, insigni tuo favori debeo: qui gloriæ tuæ nihil ultra conferre valeo quam plausum meum; Precesque ad Deum, ut velit ille perficere sic feliciter incepta, suæque Gloriæ promovendæ congrua. Quod ex animo precatur,

Tui Amantissimus &

Admirator,

Augusti 17. 1655.

Guilelmus Oughtred.

ARITHMETICA INFINITORUM.

SIVE

NOVA METHODUS INQUIRENDI
in Curvilineorum Quadraturam, aliaque
Difficiliora Matheseos Problemata.

PROP. I.
Lemma.

SI proponatur ſeries Quantitatum *Arithmetice-proportionalium* (ſive juxta naturalem numerorum conſecutionem) continue creſcentium, à puncto vel o (ciphra, ſeu nihilo) inchoatarum, (puta ut o, 1, 2, 3, 4, &c.) propoſitum ſit inquirere, quam habeat rationem earum omnium aggregatum, ad aggregatum totidem maximæ æqualium.

Simpliciſſimus inveſtigandi modus, in hoc & ſequentibus aliquot Problematis, eſt, rem ipſam aliquouſque præſtare, & rationes prodeuntes obſervare atque invicem comparare; ut inductione tandem univerſalis propoſitio innoteſcat.

Eſt igitur, exempli gratia, $\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{0+1+2=3}{2+2+2=6}=\frac{1}{2}$.

$\frac{0+1+2+3=6}{3+3+3+3=12}=\frac{1}{2}$. $\quad \frac{0+1+2+3+4=10}{4+4+4+4+4=20}=\frac{1}{2}$.

$\frac{0+1+2+3+4+5=15}{5+5+5+5+5+5=30}=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{0+1+2+3+4+5+6=21}{6+6+6+6+6+6+6=42}=\frac{1}{2}$.

Et pari modo, quantumlibet progrediamur, prodibit ſemper ratio ſubdupla. Adeoque ———

PROP. II.
Theorema.

SI ſumatur ſeries quantitatum Arithmetice-proportionalium (ſive juxta naturalem numerorum conſecutionem) continue creſcentium, à puncto vel o inchoatarum, & numero quidem vel finitarum vel infinitarum (nulla enim diſcriminis cauſa erit,) erit illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad 2.

Nempe, ſi primus terminus ſit o, ſecundus 1, (nam ſi ſecus, moderatio adhibenda erit,) & ultimus l, erit ſumma $\frac{l+1}{2}l$ (erit enim, eo caſu, numerus terminorum $l+1$.) Vel, (poſito numero terminorum m, quantuſcunque ſit terminus ſecundus) $\frac{1}{2}ml$.

『無限の算術』

【訳】

命題 1.　補題.

0 で始まり単調に増加する量（たとえば，0，1，2，3，4，・・・）に比例する量の列がある．それらの和の，最大のものに等しい量の和にたいする比を求めよ。

（つまり，比 $\dfrac{0+1+2+3+\cdots+n}{n+n+n+n+\cdots+n}$ ）

この問題においても以下のいくつかの問題においても，もっとも簡単な研究方法は，ついには帰納的に一般的命題が明らかになるように，事柄の経過自体をある時期まで見まもり，得られた比を観察してそれらを互いに比較することにある。

例えば、n＝1，2，3，4，5，6 についての比の値を計算すると、

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2}{2+2+2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3+4+5}{5+5+5+5+5+5}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3+4+5+6}{6+6+6+6+6+6+6}=\frac{21}{42}=\frac{1}{2}$$

こうして，われわれがどれだけ先に行っても，いつでも $\frac{1}{2}$ に等しい比を得るだろう。これから次が得られる。

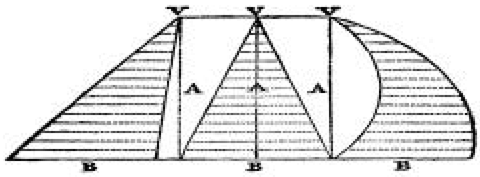
命題 2．定理.

点 0 に始まり単調増加する等差数列をなす，有限個あるいは無限個の（これらを別にする理由は何もないではないか）量の級数（自然数列として）をとると，それと最大の量からなる級数との比は，1 と 2 との比に等しい。

PROP. III.

Corollarium.

Ergo, *Triangulum ad Parallelogrammum* (*super æquali base, æque altum,*) *est ut* 1 *ad* 2.

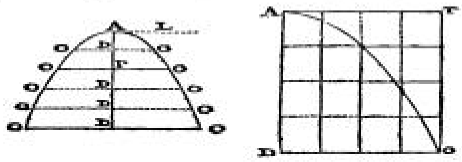


Triangulum enim constat quasi ex infinitis rectis parallelis Arithmetice proportionalibus, à puncto inchoatis, quarum maxima est basis, (ut ostendimus ad pr. 1, & 2. libri nostri de Conicis Sectionibus;) Parallelogrammum autem ex totidem basi æqualibus, (ut patet:) Ergo illud ad hoc est ut 1 ad 2 (per præced.) Quod erat demonstrandum.

PROP. IV.

Corollarium.

Item, *Pyramidoeides vel Conoeides Parabolicum* (*sive erectum sit sive inclinatum,*) *ad Prisma vel Cylindrum* (*super æquali base, æque-altum,*) *est ut* 1 *ad* 2.



Constat enim Pyramidoeides vel Conoeides Parabolicum quasi ex infinitis planis Arithmetice-proportionalibus, à puncto inchoatis, quarum maxima est basis, (ut ostendimus prop. 9. Con. Sect.) Prisma vero vel Cylindrus ex totidem basi æqualibus, (ut patet:) Ergo illud ad hoc ut 1 ad 2, per prop. 2.

Si proponatur series Quantitatum in *duplicata* ratione Arithmetice-proportionalium, (sive juxta seriem numerorum quadraticorum,) continue crescentium, à puncto vel o inchoatarum, (puta ut o, 1, 4, 9, &c.) propositum sit inquirere, quam habeat illa rationem ad seriem totidem maximæ æqualium?

Fiat investigatio per modum inductionis, (ut in prop. 1.) eritque

$$\frac{0+1=1}{1+1=2}=\tfrac{2}{6}=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}. \qquad \frac{0+1+4=5}{4+4+4=12}=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{12}.$$

$$\frac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36}=\tfrac{7}{18}=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{18}. \qquad \frac{0+1+4+9+16=30}{16+16+16+16+16=80}=\tfrac{3}{8}=\tfrac{9}{24}=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{24}.$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25=55}{25+25+25+25+25+25=150}=\tfrac{11}{30}=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{30}.$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25+36=91}{36+36+36+36+36+36+36=252}=\tfrac{13}{36}=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{36}.$$ Et sic deinceps.

Ratio proveniens est ubique major quam subtripla, seu $\frac{1}{3}$. Excessus autem perpetuo decrescit prout numerus terminorum augetur; puta $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \frac{1}{30}, \frac{1}{36}$, &c. aucto nimirum fractionis denominatore, sive consequente rationis, in singulis locis numero senario, (ut patet,) ut sit rationis provenientis excessus supra subtriplum, ea quam habet unitas ad sextuplum numeri terminorum post o. Adeoque ———

命題３．系

求めた比は、三角形の面積と、平行四辺形（その三角形と底辺と高さが同じ平行四辺形）の面積にたいする比が１：２と解釈できる。

「そのあとでウォリスは，ｘ^{2}の積分を求めること，つまりｎ→∞のさいの比

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^2+n^2+n^2+n^2+\cdots+n^2}$$

を得ること，に向かった。

帰納の方法によって（命題１のときのように），研究しよう。次のようになる。

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{}+\frac{1}{6}$$

$$\frac{0+1+4}{4+4+4}=\frac{5}{12}=\frac{1}{}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9}=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}=\frac{1}{}+\frac{1}{18}$$

$$\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16}=\frac{30}{80}=\frac{3}{8}=\frac{1}{}+\frac{1}{24}$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25}{25+25+25+25+25+25}=\frac{55}{150}=\frac{11}{30}=\frac{1}{}+\frac{1}{30}$$

・・・・・・

得られた比は，１の３にたいする比よりつねに大きい．その差は項数が増加するとき，絶えず減少する。つまり，$\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{16},\frac{1}{24},\frac{1}{30},\cdots$となっている。ここで分数の分母は，６から順に増加して行く。こうして，得られた比の，１と３との比の差は，１と６の倍数との比に等しい…。項数が増加するとき，この差は絶えず減少し，ついには，どんな数よりも小さくなる．そして，項数が無限大にまで増大すると，この差はまったく消滅してしまう」。

つまり、

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^2+n^2+n^2+n^2+\cdots+n^2}=\frac{1}{}$$

ウォリスの結果は，法則一定理ＸＸＩで定式化された。

「点０に始まる平方数の無限級数が与えられたとし，これの，最大数からなる級数との比は，１の３にたいする比に等しい」。

次は、以下のような比の値を計算している

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{\ }+\frac{1}{4}$$

$$\frac{0+1+8}{8+8+8}=\frac{9}{24}=\frac{1}{\ }+\frac{1}{8}$$

$$\frac{0+1+8+27}{27+27+27+24}=\frac{36}{108}=\frac{1}{\ }+\frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+8+27+64}{64+64+64+64+64}=\frac{100}{320}=\frac{1}{\ }+\frac{1}{16}$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125}{125+125+125+125+125+125}=\frac{225}{750}=\frac{1}{\ }+\frac{1}{20}$$

・・・・・・

ここからは、
第３回ワークシートでウォリスが求めようとしたものを考えよう！

法則をみつけて

ｋ＝４　のとき、ウォリスの方法で近似してみよう

Excel を使って確認してみよう
ｋ＝３，４の確認できたら、ｋ＝５，６の近似値も調べてみよう

SI proponatur ſeries quantitatum in *Triplicata* ratione Arithmetice-proportionalium, (ſive juxta ſeriem numerorum Cubicorum,) continue creſcentium, à puncto vel o inchoatarum, (puta ut o, 1, 8, 27, 64, &c.) propoſitum ſit inquirere quam habeat illa rationem ad ſeriem totidem maximæ æqualium?

Fiat inveſtigatio per modum inductionis (ut in prop. 1. & 19.) Eritque

$$\frac{0+1=1}{1+1=2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}. \qquad \frac{0+1+8=9}{8+8+8=24}=\frac{3}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}.$$

$$\frac{0+1+8+27=36}{27+27+27+27=108}=\frac{4}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}. \qquad \frac{0+1+8+27+64=100}{64+64+64+64+64=320}=\frac{5}{16}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}.$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125=225}{125+125+125+125+125+125=750}=\frac{6}{20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125+216=441}{216+216+216+216+216+216+216=1512}=\frac{7}{24}=\frac{1}{4}+\frac{1}{24}.$$

Et ſic deinceps.

Ratio proveniens eſt ubique major quam ſubquadrupla, ſeu $\frac{1}{4}$. Exceſſus autem perpetuo decreſcit prout numerus terminorum augetur, puta $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}, \frac{1}{20}, \frac{1}{24}$, &c. aucto nimirum fractionis denominatore, ſive conſequente rationis, in ſingulis locis, numero quaternario, (ut patet;) ut ſit rationis provenientis exceſſus ſupra ſubquadruplam, ea quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum poſt o. Adeoque ——

ウォリスは、$y=x^k$ とx軸とx＝１とで囲まれた面積を求めようとしてこの

計算をしているのですが、どの図形の面積と比較しようとしていると思いますか？

His approach to the determination of this limit was empirical. For example, in the case $k = 3$ he noted that

$$\frac{0^3+1^3}{1^3+1^3}=\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4};$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3}{2^3+2^3+2^3}=\frac{9}{24}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8};$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3}{3^3+3^3+3^3+3^3}=\frac{36}{108}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12};$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3+4^3}{4^3+4^3+4^3+4^3+4^3}=\frac{100}{320}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16};$$

$$\frac{0^3+1^3+\cdots+5^3}{5^3+5^3+\cdots+5^3}=\frac{225}{750}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20};$$

$$\frac{0^3+1^3+\cdots+6^3}{6^3+6^3+\cdots+6^3}=\frac{441}{1512}=\frac{1}{4}+\frac{1}{24}.$$

On the basis of this numerical evidence he concluded that

$$\frac{0^3+1^3+\cdots+n^3}{n^3+n^3+\cdots+n^3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4n},$$

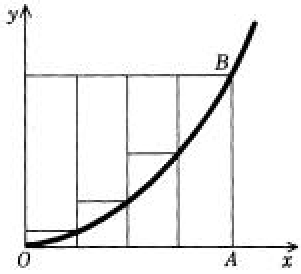
so the limit as $n \to \infty$ is $\frac{1}{4}$. After carrying out such computations for several small values of k he inferred (without further proof) that

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0^k+1^k+\cdots+n^k}{n^k+n^k+\cdots+n^k}=\frac{1}{k+1} \tag{22}$$

このようにして、ウォリスはカヴァリエーリの考えを根底にもち、代数の立場で積分の一般的な式を構成した。

以上の結果からどのような予想ができましたか？

C.H.Edwards,Jr.によって英語で要約された文章を見てみよう



The quadrature of curves of the form $y = x^k$, with k not necessarily a positive integer, was first attacked systematically by John Wallis (1616–1703) who was the Savilian professor of geometry at Oxford. In fact, rational and negative exponents were introduced by Wallis in his *Arithmetica Infinitorum* (The Arithmetic of Infinites) of 1655, which (as we will see in Chapter 7) had a decisive influence on Newton's early mathematical development.

【訳】必ずしも明確な整数ではないkをもつ　$y = x^k$　の曲線の求積は、ジョン　ウォリスによって最初に体系的に導き出された。彼は、オックスフォードにおいて幾何学の Savilia 教授であって、実際、有理数と負数の指数は、彼の Arithmetica　Infinitorum(無限算術)においてウォリスによって紹介された。それは、ニュートンの初期の数学的発展に決定的な影響を与えた。

On the basis of computations with arithmetical indivisibles similar to those described in the previous section, Wallis knew that the area under the curve $y = x^k$ (k a positive integer) over the unit interval is given by

$$\int_0^1 x^k\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{0^k + 1^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + \cdots + n^k}.$$

【訳】算術的な不可分量による計算の基本の上に、ウォリスは曲線$y = x^k$(kは正の整数)の下に単位区間において$\int_0^1 x^k dx = \lim_{n\to\infty} \frac{0^k + 1^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + \cdots + n^k}$　によって与えられることを知っていた。

最後に、ウォリスの思考の流れを概要を読みながら再現しよう

【概要】

ウォリスは，面積や体積が，算術和の比の極限を計算することによって求まることを使った．たとえば，「放物線」$y = x^k$で囲まれる曲線図形の面積の，対応する長方形または平行四辺形の面積との比の計算を, 彼は次のようにおこなった。

放物線，x軸，垂線ABによって囲まれた図形の面積を求めるとしよう．ウォリスは，区間OAを等分割し，分点における垂線上に長方形をつくった．それか

ら，これらの長方形の面積の和の，その面積がすべて初めの長方形のなかでの最大のものに等しい長方形の面積の和にたいする比を求めた．つまり，

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k} = \frac{\sum_{m=0}^{n} m^k}{(n+1)n^k}$$

これは，関数の積分の一般的問題と積分の抽象的概念が得られたと考えることができる。ウォリスは書いた。

「命題 1．補題 0 で始まり単調に増加する量（たとえば，0，1，2, 3, 4, ・・・）に比例する量の列がある．それらの和の，最大のものに等しい量の和にたいする比を求めよ」，つまり，比 $\frac{0+1+2+3+\cdots+n}{n+n+n+n+\cdots+n}$

ウォリスは自分の方法を説明して言う。「この問題においても以下のいくつかの問題においても，もっとも簡単な研究方法は，ついには帰納的に一般的命題が明らかになるように，事柄の経過自体をある時期まで見まもり，得られた比を観察してそれらを互いに比較することにある」。彼は，n＝1，2，3，4，5，6 についての比の値を見いだした。それは一定で，$\frac{1}{2}$ に等しかった。ウォリスは結論した。

「こうして，われわれがどれだけ先に行っても，いつでも $\frac{1}{2}$ に等しい比を得るだろう。これから次が得られる。

命題 2．定理．点 0 に始まり単調増加する等差数列をなす，有限個あるいは無限個の（これらを別にする理由は何もないではないか）量の級数（自然数列として）をとると，それと最大の量からなる級数との比は，1 と 2 との比に等しい。

これは，現代の用語では $\lim_{n\to\infty}\frac{0+1+2+3+\cdots+n}{n+n+n+n+\cdots+n} = \frac{1}{2}$ と書ける。

それからウォリスは，求めた比を三角形の面積の，その三角形と底辺と高さが同じ平行四辺形の面積にたいする比と解釈する。

そのあとでウォリスは，x^2 の積分を求めること，つまり n→∞のさいの比

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^2 + n^2 + n^2 + n^2 + \cdots + n^2}$$

を得ること，に向かった。

ウォリスは書いている。「帰納の方法によって（命題 1 のときのように），研究しよう。次のようになる。

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{0+1+4}{4+4+4} = \frac{5}{12} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$

$$\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16}=\frac{30}{80}=\frac{3}{8}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25}{25+25+25+25+25+25}=\frac{55}{150}=\frac{11}{30}=\frac{1}{3}+\frac{1}{30}$$

・・・・・・

得られた比は，1の3にたいする比よりつねに大きい．その差は項数が増加するとき，絶えず減少する。つまり，$\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{16},\frac{1}{24},\frac{1}{30},\cdots$となっている。ここで分数の分母は，6から順に増加して行く。こうして，得られた比の，1と3との比の差は，1と6の倍数との比に等しい…。項数が増加するとき，この差は絶えず減少し，ついには，どんな数よりも小さくなる．そして，項数が無限大にまで増大すると，この差はまったく消滅してしまう」。つまり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0^2+1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^2+n^2+n^2+n^2+\cdots+n^2}=\frac{1}{3}$$

ウォリスの結果は，法則一定理XXIで定式化された。「点0に始まる平方数の無限級数が与えられたとし，これの，最大数からなる級数との比は，1の3にたいする比に等しい」。

現代的用語では，この法則は $\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$ と同値である。

法則一定理XXIの定式化の後，ウォリスは円錐と角錐の体積を，同じ底面と高さの円柱と角柱の体積を通じて求めている。それは，円錐と角錐は無限に多くの図形からなり，それらは，「相似かつ平行で，一点を最小のものとし，底面を最大のものとする，2乗に関係する量の級数をつくる。それから，放物線の面積が導かれ，他の多くの例が与えられている。

3乗数の「級数」の，この「級数」の最大数の3乗の和にたいする比について，類似の手続きを実行してウォリスは，$\lim_{n\to\infty}\frac{0^3+1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^3+n^3+n^3+n^3+\cdots+n^3}=\frac{1}{4}$

を見いだした。これは，$\int_0^1 x^3\,dx=\frac{1}{4}$ を示す。

帰納的にウォリスは，現代的には $\boxed{}$ に一致する，任意の自然数べきについての結果を書き下している。

彼は書く。「実験を行って，帰納的に見いだされた比が，指摘されたものに，その差がついにはあらかじめ与えられた値より小さくなるように，近づくことがわかった。したがって，無限につづけるとその差は無くなる」。