事前課題

問題．　x＋y=16, xy=60 を満たす x,y を求めよ．

解答欄．

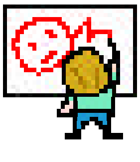
15 世紀ごろの人たちは，上のような問題は以下の方法で解いていました．

問題．　「x＋y=16, xy=60 となる x,y を見つけよ．」

⇒　「16 を 2つに分けなさい．その 2 つの積が 60 になるように．」

手順　① 16 の半分の 8 をとる
　　　② 8 を平方して 64 を得る
　　　③ 64－60＝4
　　　④ 4 の平方根 2 をとる
　　　⑤ 8－2、8＋2 より6 と10 を得る
　　　⑥ 答えは 6 と10 である

当時，この解法の手順は図で表すことによってその正当性が示されました．では，みんなもこの解法の手順の正当性を図で示してみよう!!



解答欄.

ヒント

問題を，「長さ 16 の針金がある．それをあるところで直角に折り，それによってできた2つの長さを隣り合う辺とする長方形の面積が 60 となるようにせよ」と考える．

そのとき，①針金を中央で直角に折り，②それでできた正方形の面積を求める．③余分な面積を出し、④余分な面積を正方形と考えその一辺を出す．そこから，⑤～⑥適当な長方形を見つける．

年　組　　番　名前

授業３日目ワークシート

ヴェッセルの方法により2次方程式の解で
負数の平方根を含むものを図示できるか？

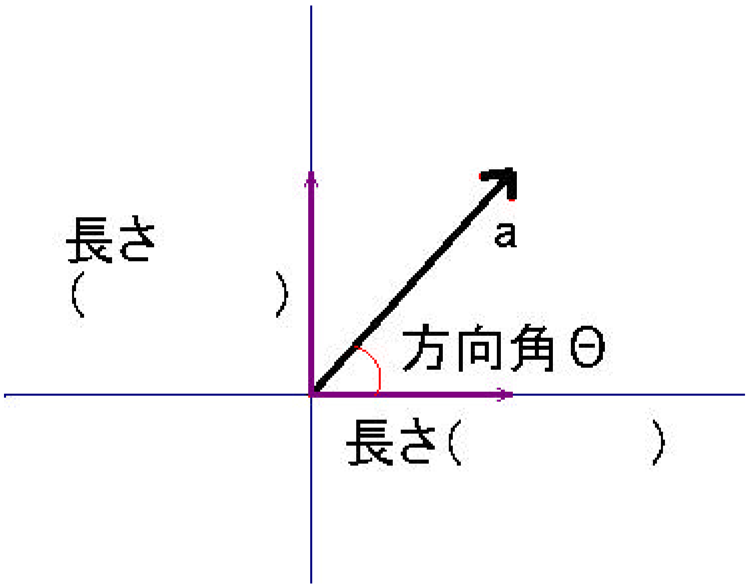
ウォリスが考えたものと同じａ に関する２次方程式$a^2 - ba + a = 0(b/2 < \sqrt{a})$について考えよう．まず，この２次方程式の解はウォリスが考えたように，

$$a = (\quad\quad) + (\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad)$$

ここで$b/2 < \sqrt{a}$ より，√の中は負の数である．したがって，以下のように変形する．

$$a = (\quad\quad) + (\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad) \cdot \sqrt{-1}$$

従って，この数a を表す方向つき線分は下図のように書ける．

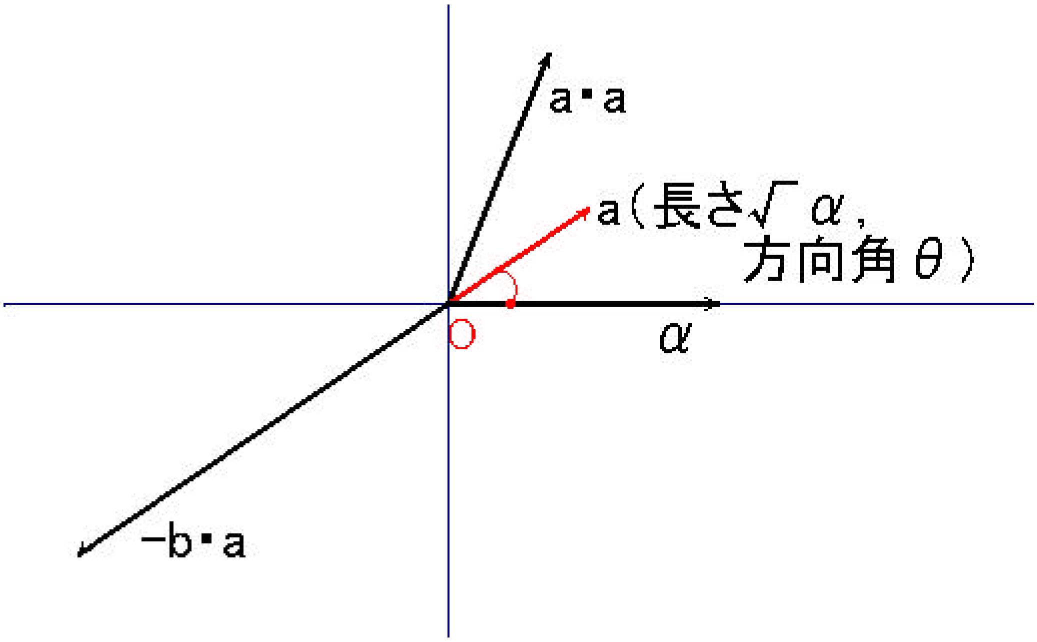


このとき，方向つき線分a の長さは三平方の定理より，

$$\sqrt{(\quad\quad)^2 + (\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad)^2} = (\quad\quad\quad\quad\quad)$$

では逆に，左図にあるような方向つき線分 a がヴェッセルの定義に基づく線分の足し算，掛け算によって $a^2-ba+a=0$ を満たすだろうか？これに答えるために以下の問いに答えてみよう.

① 方向つき線分 a^2，$-ba$，a を定義に基づいて書くと，以下のように書ける.



このとき，

a^2 の長さは（　　），方向角は（　　）、

$-ba$ の長さは（　　）

② 方向つき線分 a^2，$-ba$，a の和 a^2-ba+a が 0 になるためには，a^2-ba+a の方向つき線分がどうなればいいのだろうか？また，そうなるためには

(1) a^2-ba の方向つき線分の終点がどこにいかなければならないか？

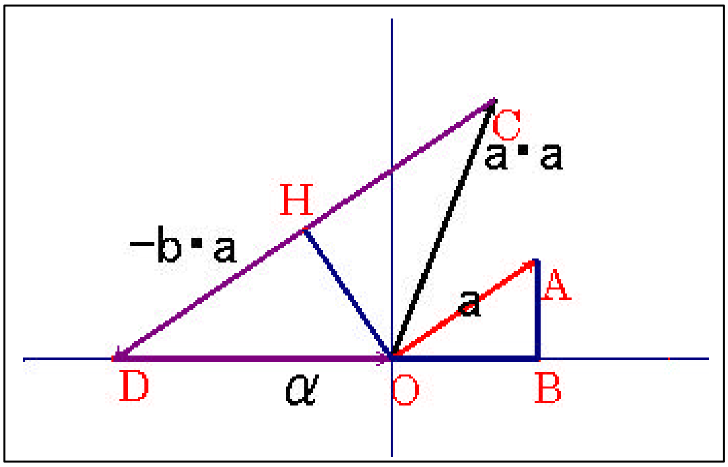
(2) (1) のあと，さらに何を示す必要があるのか？

③　②より方向つき線分a^2-ba+aの終点と始点が点Oで一致すればよいことがわかった．そのためには，以下の2点を示す必要がある．

⑴　a^2-baの終点Dが＋1方向の線分上にあること．

⑵　線分ODの長さがαであること．

以上のことを示すために，図を以下のように変える．



ただし，点H：点Oから線分CDに下ろした垂線の足，

点B：点Aから＋1方向の線分に下ろした垂線の足）

このとき，示すことは以下の2点になる．

⑴　点Dが直線OB上あること．　　　⑵　線分ODの長さがαであること．

証明）

⊿OABと⊿COHにおいて，

∠AOB＝∠AOC＝θ

∠AOC＝∠OCH＝θ

よって，　∠AOB＝∠（　　　　　）＝θ　・・・①

また，　∠ABO＝∠（　　　　　）＝90°　・・・②

よって，　⊿OAB ∽ ⊿COH

相似な三角形は対応する辺の比が等しいことから，

OA：（　　　）＝（　　　）：CH

方向つき線分の長さより,

OA＝（　　）, OC＝（　　）

方向つき線分 a の＋ 1方向の長さより,

OB＝（　　）

よって, CH＝（　　　　　）

CDの長さは方向つき線分 b ･a の長さであるから,

CD＝（　　　　　）

よって, 点Hは線分CDの（　　　　　）である.

⊿OCHと⊿ODHにおいて,

∠OHC＝∠OHD＝90°, CH＝（　　　　）, OHは共通

よって, ⊿OCH ≡ ⊿ODH

対応する角は等しいから,

∠OCH＝∠（　　　）＝θ

まず ⑴を証明するためには, ∠DOB＝180°を言えばよい. ⊿DOCにおいて三角形の内角の和より,

∠DOC＝180°－（∠（　　　）＋∠（　　　））

＝180°－（　　）

∠BOC＝∠BOA＋∠AOC＝（　　）

よって, ∠DOB＝∠DOC＋∠COB＝（　　　）

従って, ⑴が証明できた.

また、対応する辺の長さは等しいから,

DO＝CO＝（　　　）

よって, ODの長さはαである.（⑵証明）