授業資料

年　　組　　番号　氏名

「$\sqrt{-1}$ は描けるのか!?」

Vol. **1**

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE-
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

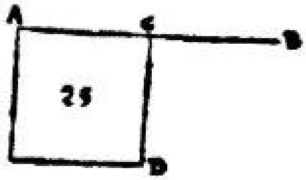
HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

授業者：筑波大学大学院教育研究科１年
小松　孝太郎

exemplum, si quis dicat, diuide 10 in duas partes, ex quarum unius in reliquam ductu, producatur 30, aut 40, manifestum est, quód casus seu quaestio est impossibilis, sic tamē operabimur, diuidemus 10 per aequalia, & fiet eius medietas 5, duc in se fit 25, auferes ex 25, ipsum producendum, utpote 40, ut docui te, in capitulo operationum, in sexto libro, fiet residuum m: 15, cuius ℞ addita & detracta à 5, ostendit partes, quae inuicem ductae producunt 40, erunt igitur hae, 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15.

DEMONSTRATIO

Vt igitur regulae uerus pateat intellectus, sit A B linea, quę dicatur 10, diuidenda in duas partes, quarū rectangulum debeat esse 40, est aūt 40 q̄druplū ad 10, quare nos uolumus quadruplum totius A B, igitur fiat A D, quadratum A C, dimidij A B, & ex A D auferatur quadruplum A B, absq; numero, ℞ igitur residui, si aliquid maneret, addita & detracta ex A C, ostenderet partes, at quia tale residuum est minus, ideo imaginaberis ℞ m: 15, id est differentiae A D, & quadrupli A B, quam adde & minue ex A C, & habebis quaesitum, scilicet 5 p: ℞ v: 25 m: 40, & 5 m: ℞ v: 25 m: 40, seu 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15, duc 5 p: ℞ m: 15 in 5 m: ℞ m: 15, dimissis incruciationibus, fit 25 m: m: 15, quod est p: 15, igitur hoc productum est 40, natura tamē A D, non est eadem cū natura 40, nec A B, quia superficies est remota à natura numeri, & lineae, proximius tamē huic quantitati, quę uere est sophistica, quoniam per eam, non ut in puro m: nec in alijs, operationes exercere licet, nec uenari quid sit est, ut addas quadratum medietatis numeri numero producendo, & à ℞ aggregati minuas ac addas dimidium diuidendi. Exemplū, in hoc casu, diuide 10 in duas partes, producentes 40, adde 25 quadratū dimidij 10 ad 40, fit 65, ab huius ℞ minue 5, & adde etiam 5, habebis partes secundum similitudinem, ℞ 65 p: 5 & ℞ 65 m: 5. At hi numeri differunt in 10, non iuncti faciunt 10, sed ℞ 260, & hucusq; progreditur Arithmetica subtilitas, cuius hoc extremum ut dixi, adeo est subtile, ut sit inutile.



5 p: ℞ m: 15
5 m: ℞ m: 15
25 m: m: 15 q̄d. est 40

QVAESTIO IIII.

Fac de 6 duas partes, quarum quadrata iuncta sint 50, haec soluitur per primam, non per secundam regulam, est enim de puro m: ideo duc 3 dimidium 6 in se, fit 9, minue ex dimidio 50, quod est 25, fit re-

カルダノ，*Ars Magna*，1545 年

1.　$\sqrt{-1}$ の出現

◎　カルダノの考え

　事前課題で「x＋y=16, x・y=60 を満たす x, y を求めよ」という問題について，15 世紀ごろの人たちが生み出した解法の手順を考えました．さらにカルダノという人は，同じ解法手順を利用することで「x＋y=10, x・y=40 を満たす x,y を求めよ」という問題を解こうとしました．

カルダノという人物とは，
名前：Gerolamo Cardano
（英語圏では Jerome Cardan）
年代：1501 年～1576 年
出身地：イタリア
名著：『ArsMagna』（『大いなる技法』とも呼ばれる）
彼はこの本のなかで 3 次方程式の解法を導いた．16 世紀中頃までには，医学者，数学者，占星術師としてカルダノの名はヨーロッパ中で有名になっていた．

　では事前課題の①～⑥の手順と対応させながら，「x＋y=10, x・y=40 を満たす x, y を求めよ」という問題について，カルダノの解法手順をたどってみよう．

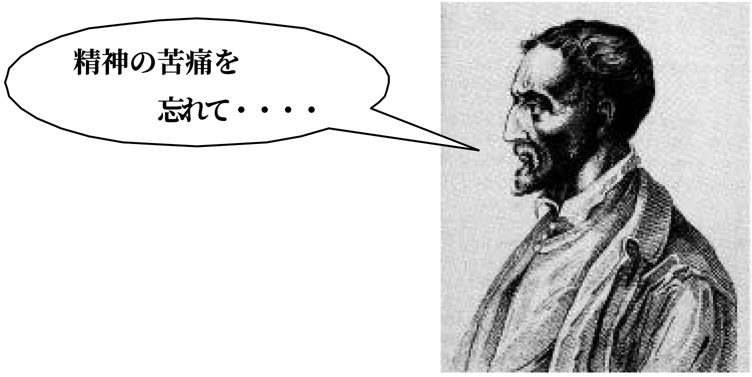
解答欄.	
①	④
②	⑤
③	⑥

答えはどのようになったかな？　答え.

事前課題の問題と同様にこの解法手順も図示できるでしょうか？

◎　カルダノの戸惑い

カルダノは以上のような方法で解答を得ましたが，この結果に戸惑いを示しました．



また，カルダノは自身で導いた３次方程式の解の公式を方程式 $x^3 = 15x + 4$ の場合にも適用すると，方程式の解が

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

になってしまうため，このような場合を casus irreducibilis（還元できない場合）として避けました．しかし，$x = 4$ がこの方程式の解であるもカルダノは知っており，この自己矛盾を彼は理解することができませんでした．

2.　$\sqrt{-1}$ の計算法則

カルダノがこの考えを示した時代は，数として負の数は認められていませんでした．そのような時代に２乗して負になる数（以下、負数の平方根）が認められるわけはありません．

しかし，この負数の平方根に計算法則を定義した人がいます。それは， Rafael Bombelli（1526 年～1572 年）（以下、ボンベリ）という人物です．彼は，カルダノの弟子で，著書『L'algebra』のなかで，負数の平方根について言及しました．

お話．

当時，数字の 3 と言えば長さ 3 の棒を指していたように，数字は図や物などで視覚的に表されなければ認められませんでした．従って，-3 といった負の数は「無いものよりも小さい数」であり，当時は視覚的に表すことができなかったのです．

◎　ボンベリの考え

彼は，$+\sqrt{-1}$，$-\sqrt{-1}$をそれぞれ *piu di meno*，*meno di meno* という表現を用いて表しました．

そして，$(+)\times(+)=(+)$，$(+)\times(-)=(-)$，$(-)\times(+)=(-)$，$(-)\times(-)=(+)$といった演算を拡張し，以下の新しい法則を定めました．右側の空欄に，ボンベリの述べていることを式で表してみよう．

ボンベリの記述	式で表すと，
① *piu via piu di meno, fa piu di meno*	①
② *meno via piu di meno, fa meno di meno*	②
③ *piu via meno di meno, fa meno di meno*	③
④ *meno via meno di meno, fa piu di meno*	④
⑤ *piu di meno via piu di meno, fa meno*	⑤
⑥ *piu di meno via meno di meno, fa piu*	⑥
⑦ *meno di meno via piu di meno, fa piu*	⑦
⑧ *meno di meno via meno di meno, fa meno*	⑧
注意）　“*A via B, fa C*”は A×B=C ということ．	

その後，ボンベリはこれを基に $(2+\sqrt{-1})^3$ と$(2-\sqrt{-1})^3$を計算しました．みんなもこの２つを計算し，さらに$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ の値がどうなるか考えてみよう．

3. $\sqrt{-1}$の図示に対する否定的な意見

ボンベリが負数の平方根に対して計算法則を決めたにも関わらず，それを視覚的に表すことはまだ不可能でした．この時代，負数の図示が成功していたため，負数の平方根が広く認知されるためにも，この数を図示することが課題となりました．

しかし，本当に図示することができるのでしょうか？

お話．
負数の図示はジラールやデカルトらによって行われました．ジラールは「幾何学での負数は逆進を示し，一方，正数は前進を示す」といっていました．つまり，現代で言う数直線や向きの概念を用いることで，負数を視覚的に表現したのです．

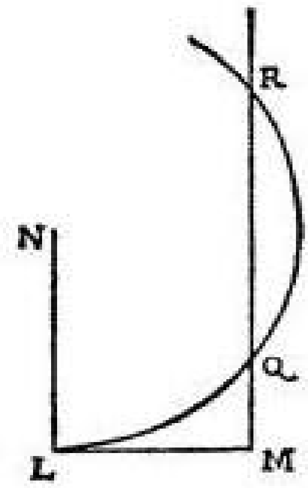
負数の平方根の図示に否定的な意見を示した数学者のなかでも，有名なデカルトの見解について考えてみましょう．

◎　デカルトの見解

デカルト（1596 年～1650 年）は２次方程式の解とその図示の関係から始めていきました．

右図において，NL を$\frac{1}{2}a$に等しく，LM をbに等しくしたうえ，点 M から LN に平行な線を引く．N を中心として L を通る円を描いて，その円弧と平行線の交点を Q，R とする．ここで，未知な長さ MQ と MR をzとしたとき，z は以下の２次方程式で表される．

$$z^2 = az - bb$$



デカルトのこの主張を証明してみましょう!!

証明.

QR の中点を O とする．図より，

$$NO = LM = (\qquad\qquad)$$

NQ は円の半径であることから，

$$NQ = NL = (\qquad\qquad)$$

⊿NQO は斜辺が NQ の直角三角形であることから三平方の定理より，

$$OQ^2 = (\qquad\quad)^2 - (\qquad\quad)^2$$

$$\therefore \quad OQ = (\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

同様にして，

$$OR = (\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

よって，$MQ = MO - OQ$，　$MR = MO + OR$ より，

$$MQ = (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

$$MR = (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

z は MQ，MR の長さであることから，MQ，MR を一つの式にまとめて

$$z = (\quad\;) \pm (\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

よって，この式を整理していくと，

$$z - (\quad\;) = \pm(\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

両辺を２乗すると，　$\{z - (\quad\;)\}^2 = (\qquad\qquad\qquad\qquad)$

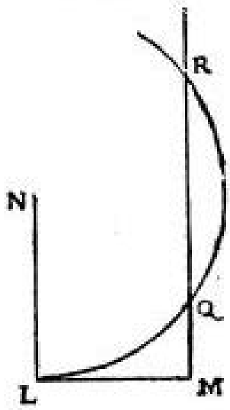
展開して整理すると，　$z^2 = (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$

以上より，MQ，MR の長さ z は与えられた２次方程式で表されることが証明された．

Enfin ſi i'ay

$$z^2 \infty az - bb,$$

ie fais NL eſgale a $\frac{1}{2}a$, & LM eſgale a b, comme deuant; puis, au lieu de ioindre les poins M, N, ie tire MQR parallele a LN, & du centre N, par L, ayant deſcrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z eſt MQ, ou bien MR, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, a ſçauoir



$$z \infty \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - bb},$$

$$\& \; z \infty \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - bb}.$$

Et ſi le cercle qui, ayant ſon centre au point N, paſſe par le point L, ne couppe ny ne touche la ligne droite MQR, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut aſſurer que la conſtruction du probleſme propoſé eſt impoſſible*.

|Au reſte, ces meſmes racines ſe peuuent trouuer par vne infinité d'autres moyens, & i'ay ſeulement voulu mettre ceux cy, comme fort ſimples, affin de faire voir qu'on peut conſtruire tous les Probleſmes de la Geometrie ordinaire, ſans faire autre choſe que le peu qui eſt compris dans les quatre figures que i'ay expliquées. Ce que ie ne croy pas que les anciens ayent remarqué; car, autrement, ils n'euſſent pas pris la peine d'en eſcrire tant de gros liures, où le ſeul ordre de leurs propoſitions nous fait connoiſtre qu'ils n'ont point eu la vraye methode pour les trouuer toutes, mais qu'ils ont ſeulement ramaſſé celles qu'ils ont rencontrées.

* N.

◎　デカルトの主張

点Nを中心とし点Lを通る円が直線MQRを切ることも，これに接することもないならば，方程式にはまったく根がなく，提出された問題の作図は不可能と断定することができる．

（出典：デカルト著，原亨吉訳『幾何学』，下線授業者）

① デカルトの言葉で，点線部分「点Nを中心とし点Lを通る円が直線MQRを切ることも，これに接することもない」とき，a と b にどういう関係式が成り立ちますか？また，このとき２次方程式 $z^2 = az - bb$ の解はどのような値になりますか？

② デカルトは①のような状況のとき，下線部分「提出された問題の作図は不可能と断定する」と言っています．これはどういうことでしょうか？

Au reſte, tant les vrayes racines que les fauſſes ne ſont pas touſiours reelles, mais quelquefois ſeulement imaginaires : c'eſt a dire qu'on peut bien touſiours en imaginer autant que i'ay dit en chaſque Equation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui correſ-

(*) I. — K.

デカルトは図的に表せる数（＋1，－2，1/2，$\sqrt{2}$ など）を reelles（フランス語），負数の平方根を imaginaires（同様にフランス語）と記述しました．これを英訳するとそれぞれ real と imaginary，つまり彼は図的に表せる数を「実際の数（以下，実数）」，負数の平方根は「想像上の数」であると述べました．

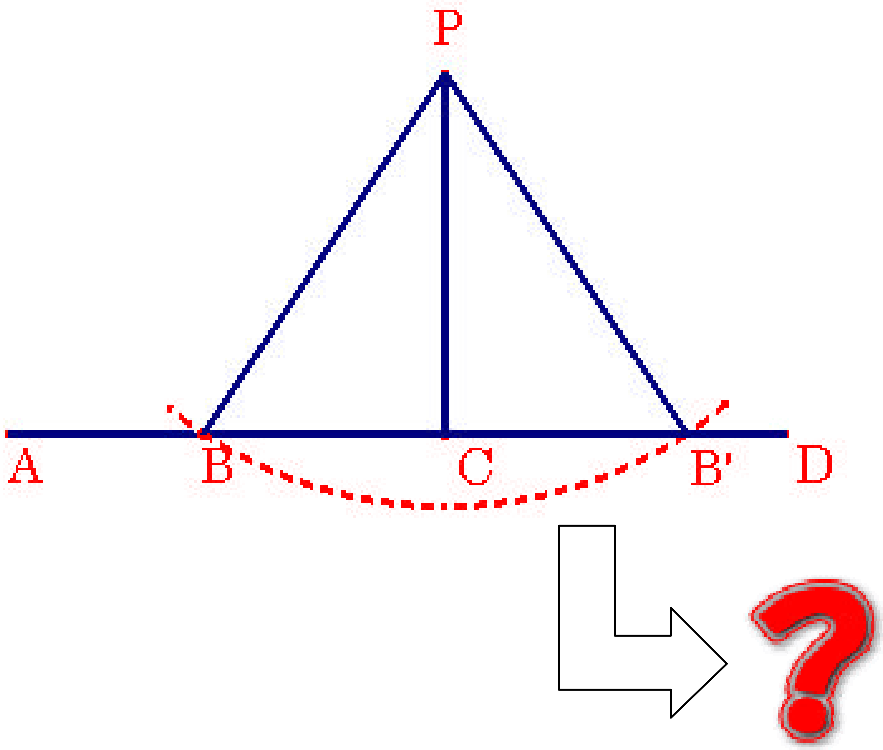
以後，彼の言葉が広く採用されていくことになりました．

授業資料

年　　組　　番　氏名

「$\sqrt{-1}$ は描けるのか!?」

Vol. 2



授業者：筑波大学大学院教育研究科１年
小松　孝太郎

１時間目では・・・

古くから数というものは「図的に表されなければ認められない」ということでした．ボンベリによって$\sqrt{-1}$の計算法則が確立された16，17世紀において，$\sqrt{-1}$を図示することは当時の課題でした．しかし，これを図的に表現することは不可能であるとされ，デカルトは負数の平方根を「想像上のもの」であると述べました．

このような時代にあって当時の数学者は以下の野望に燃えるわけです．

「$\sqrt{-1}$を図示することでそれを真に認められるようにしよう．」

それでは負数の平方根の図示に挑戦した数学者の考えをみんなで考えていこう!!

４．　$\sqrt{-1}$の図示への挑戦（ウォリス）

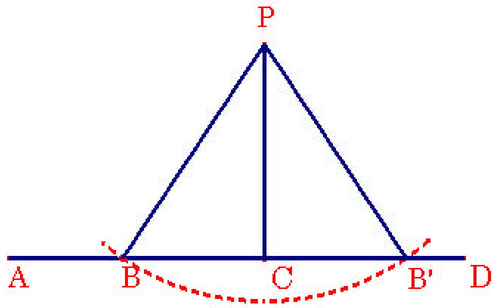
負数の平方根の図示に果敢にも挑戦した最初の人はウォリスという人物です．

名前：John Wallis
年代：1616年～1703年
出身地：イギリス
彼はニュートンが脚光を浴びる直前の時代において最も有名な数学者でした．数々の名著を発表し，微積分学を発達させたニュートンに多大な影響を及ぼしました．

◎　ウォリスの挑戦　その１

彼はaに関する２次方程式 $a^2 - ba + a = 0$ の解を図示することから始めました．

まず，ある直線AD上に長さが$b/2$である線分ACをとる．次に，Cを通り直線ADに垂直な線分で長さが$\sqrt{a}$である線分 PC をとる．そして，点 P を中心とし半径の長さが AC と同じである円弧を描き、その円弧と直線 AD との交点を B, B'とする．



このとき，２つの長さ AB, AB'がこの方程式 $a^2 - ba + a = 0$ の解である．

証明）

与えられた２次方程式$a^2 - ba + a = 0$ を解くと，

$$\{a - (\quad)\}^2 = (\qquad\qquad)$$

$$a - (\quad) = (\qquad\qquad)$$

$$\therefore \quad a = (\quad) \pm (\qquad\qquad\qquad) \cdots ①$$

この解を線分ACやAB'，ABなどで表したい．

$$AC = (\qquad) \cdots ②$$

また，⊿PB'Cは∠C＝90°の直角三角形より，

$$CB'^2 = (\qquad)^2 - (\qquad)^2$$

$$= (\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

$$\therefore \quad CB' = (\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

CB'とは反対向きの長さ CB を CB=－CB'とすると,

$$CB = -CB' = (\qquad\qquad\qquad) \cdots ③$$

２次方程式の解①を②，③式を利用して変形していくと,

$$a = (\quad) \pm (\qquad\qquad)$$
$$= (\qquad) + (\qquad),\quad (\qquad) + (\qquad)$$
$$= (\qquad\quad),\quad (\qquad\quad)$$

よって，２つの長さ AB, AB'は２次方程式 $a^2 - ba + a = 0$ の解を図示するものである.

証明が終わった人は以下のことを考えましょう.

① ２次方程式の解を図示するこの方法に似たものを以前に考えた人はいませんでしたか？

② ウォリスの場合，CP の長さが円弧の半径の長さを超えるとき，b と a の間にはどのような関係式が成り立つでしょうか？また，このとき２次方程式の解を示す重要な２点 B, B'はどうなるでしょうか？

③ ②の場合，２次方程式 $a^2 - ba + a = 0$ の解はどのような値になるでしょうか？

④ ①の人は②，③という状況になったら何と言っていたでしょうか？

◎　ウォリスの挑戦　その２

ウォリスは，a に関する２次方程式に関して，解に負数の平方根を含む場合の $a^2-ba+a=0(b/2<\sqrt{a})$ についてどのように考えたのでしょうか？

ここで便宜上，実数解をもつ場合 $a^2-ba+a=0\,(b/2>\sqrt{a})$・・・（＊），

解に負数の平方根が含まれる場合 $a^2-ba+a=0(b/2<\sqrt{a})$・・・（＊＊）とします．

まず，（＊＊）の解は，負数の平方根まで範囲を認めるなら（＊）と式の見た目は同じで，

$$a=(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

です．（＊）との違いは√の中が負の数であることです．ここでウォリスは以下のように考えました．

「a に関する２次方程式 $a^2-ba+a=0$ の解は２つの線分の長さ AB，AB'で図示される」という先ほどの証明は，$b/2>\sqrt{a}$ という条件の下で進められていた．この証明が $b/2<\sqrt{a}$ の場合でも成り立つといいなぁ．

もし成り立つのなら，（＊＊）の場合でも（＊）の場合と同じ結論を得ることになり，（＊＊）の場合は解に負数の平方根を含むので，負数の平方根が図示できることになる．

しかし，本当に $b/2>\sqrt{a}$ の場合に関する証明の過程が $b/2<\sqrt{a}$ の場合にも全て成り立つのでしょうか？

討論

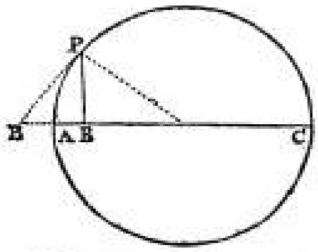
- ウォリスの考えは正しいだろうか？間違いだろうか？正しいと思う人は正しいと書き，間違いだと思う人はどこが間違いかを指摘してみよう．

- ウォリス（役を演じる授業者）の「つじつま合わせ」は正しいだろうか？間違いだろうか？正しいと思う人は正しいと書き，間違いだと思う人はどこが間違いか指摘してみよう．

situ quidem, non diametrice contrario, sed subcontrario; prorsum (ut prius) ab A, sed deorsum: similiterque si sumatur $A\beta = -b$ retrorsum, & $AC = +c$ (ut prius) sursum; erit $\beta C = -bc$ (propter contraria signa $-$ in $+$) situ item subcontrario; sursum (ut prius) sed retrorsum.

Habetur itaque (utcunque sumantur $a, b,$) Quadratum, seu Rectangulum, (in eodem Plano) reale: Affirmativum quidem si signa sint similia; sed situ diametrice contrario si sit utrobique $-$, illi qui foret si utrobique $+$: Negativum vero, si dissimilia; & situ subcontrario; nempe, vel prorsum sed deorsum, vel sursum sed retrorsum.

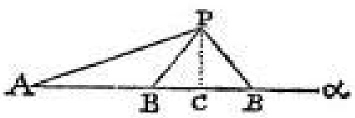
Idem fere conspicietur, si, pro quadratis his sive rectangulis, sumantur mediæ proportionales ut horum planorum radices; quarum itaque novus orietur earundem situs, prout signa sunt similia aut dissimilia.



Verbi gratia; Si prorsum ab A sumatur $AB = +b$, & prorsum adhuc (in eadem recta) $BC = +c$; sitque AC $(= AB + BC = +b + c)$ diameter circuli: erit sinus rectus, seu media proportionalis, $BP = \sqrt{+bc}$.

Sin retrorsum ab A (adeoque cum contrario signo) sumatur $-AB = -b$; &, à B prorsum, $BC = +c$; manente eadem circuli diametro $AC = -AB + BC = -b + c$: erit Tangens, seu media proportionalis, $BP = \sqrt{-bc}$.

Adeoque $\sqrt{+bc}$ significabit Sinum rectum, & $\sqrt{-bc}$ Tangentem, ejusdem (in eodem circulo) Arcus AP; ab eodem P puncto ad eandem AC diametrum, saltem productam. Ipsumque (ad centrum O) triangulum OBP rectangulum, quod prius erat rectangulum ad B, fiet (casu posteriori) rectangulum ad P.



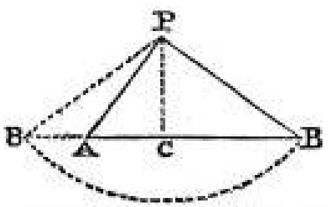
Ponamus jam (majoris illustrationis gratia) super rectam positione datam AC, triangulum constitutum ABP, cujus datum sit crus alterum $AP = 20$; una cum (angulo PAB, adeoque) altitudine $PC = 12$; reliquique cruris longitudine $PB = 15$: & quærendum sit punctum B, seu basis AB longitudo.

Manifestum est (propter $APq = 400$, & $PCq = 144$) horum quadratorum differentiam fore 256 $(= 400 - 144) = ACq$.

Adeoque AC $(= \sqrt{256}) = +16$, vel -16; prorsum vel retrorsum ab A, prout sumere libeat radicem affirmativam, vel negativam. Libet jam affirmativam sumere; adeoque AC (prorsum ab A) $= +16$.

Tum, propter datum $BPq = 225$, & $PCq = 144$; horum quadratorum differentia $CBq = (225 - 144 =)\ 81$. Adeoque $CB = \sqrt{81}$; quam indifferenter dicamus $+9$, aut -9; adeoque vel prorsum à C, vel retrorsum, pro arbitrio sumendam. Unde duplex oritur longitudo rectæ AB; nimirum $AB = 16 + 9 = 25$; aut $AB = 16 - 9 = 7$. Affirmativa utraque.

Quod si ante sumere libuisset, retrorsum ab A, $AC = -16$; foret $AB = -16 + 9 = -7$, & $AB = -16 - 9 = -25$. Utraque Negativa.



Ponamus jam $AP = 15$, $PC = 12$, (adeoque $AC = \sqrt{:225 - 144:} = \sqrt{81} = +9$,) & $PB = 20$, (adeoque $BC = \sqrt{:400 - 144:} = \sqrt{256} = \pm 16$:) Tunc erit $AB = 9 + 16 = +25$; vel $AB = 9 - 16 = -7$: altera affirmativa, altera Negativa. Idemque valores prodibunt si sumatur $AC = \sqrt{81} = -9$, sed alternatis signis. Nempe $AB = -9 + 16 = +7$, & $AB = -9 - 16 = -25$.

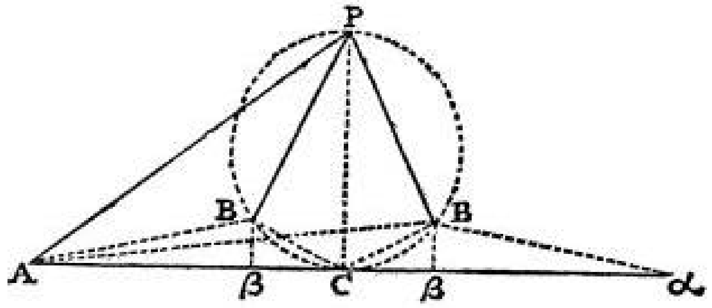
Et in casuum horum singulis habetur B punctum (aut prorsum aut retrorsum ab A) in eadem exposita AC recta infinita.

Et hujusmodi sunt Æquationes omnes quadraticæ, in quibus Radices sunt Reales, (sive sint affirmativæ ambæ, sive ambæ negativæ, sive altera affirmativa, altera negativa) absque ulla inde impossibilitate alia quam (quod in lateralibus item æquationibus contingit) quod Radicum vel altera vel utraque nonnunquam prodeat Negativa.

Verum,

ウォリス, *Algebra*, 1673 年

Verum, si ponamus $AP = 20$, $PB = 12$, $PC = 15$, (adeoque $AC = \sqrt{175}$:) Ubi subductum fuerit $PCq = 225$, ex $PBq = 144$, quo habeatur BCq; prodibit residuum negativum, $144 - 225 = -81 = BCq$. (Quod vocat *Bombellius* piu di meno, *plus e minori.*)



Adeoque BCq erit quidem duorum PBq, PCq, differentia: sed differentia negativa, -81: propter PC (quæ minor supponebatur) majorem quam PB. Et Triangulum PBC, rectangulum quidem, sed non (quod supponebatur) ad C, sed ad B.

Indeque duplex (ut ante) prodibit valor rectæ AB, nempe, $\sqrt{175}, +\sqrt{-81}$; & $\sqrt{175}, -\sqrt{-81}$. Sed nova hinc emergit impossibilitas in Algebra, (præter eam quæ etiam Lateralibus æquationibus est communis, quantitatem Negativam, seu minorem quam nihil,) nimirum *Radicem quadraticam magnitudinis negativæ*; quæ stricto sensu haberi non potest, ne supposita quidem negativa magnitudine; quippe, sive supponatur ea radix negativa, sive positiva, quadratum saltem, ex hac in se ducta (propter similia signa) prodiret affirmativum.

Novaque hæc in Algebra impossibilitas, parilem arguit in Geometria impossibilitatem casus propositi. Nempe, non posse punctum B usquam reperiri (quod supponebatur) in AC recta, utcunque in utramvis partem producta.

Duo tamen (etiam hic) puncta B designantur, extra quidem eam lineam, sed in eodem plano; ad quorum utrumvis si ducantur AB PB rectæ, habebitur Triangulum *Succedaneum*; cujus latera AP PB sint qualia imperantur, angulusque PAC; sed & imperata altitudo PC, non quidem supra AB (quæ supponebatur cum AC coincidere) sed saltem supra AC ad quam factus est angulus imperatus; duorumque quadratorum PBq, PCq, differentia est CBq.

Et prout, in casu primo, duo valores AB (affirmativi) simul exhibent duplum rectæ AC, $(16 + 9, + 16 - 9, = 16 + 16 = 32;)$ sic hic, $\sqrt{175} + \sqrt{-81}, + \sqrt{175} - \sqrt{-81}, = 2\sqrt{175}$.

Itemque, in Figura, quamvis non ipsæ AB AB duæ rectæ (quæ casu primo jacebant in ipsa AC recta,) ipsæ tamen quibus imminent Aβ Aβ rectæ ichnographicæ, simul æquant duplum ipsius AC: Hoc est, si utrivis ipsarum AB, adjungatur Bα reliquæ æqualis & cum sua declivitate, tota ACα (punctorum Aα distantia) erit recta æqualis duplæ AC, prout in primo casu ACα.

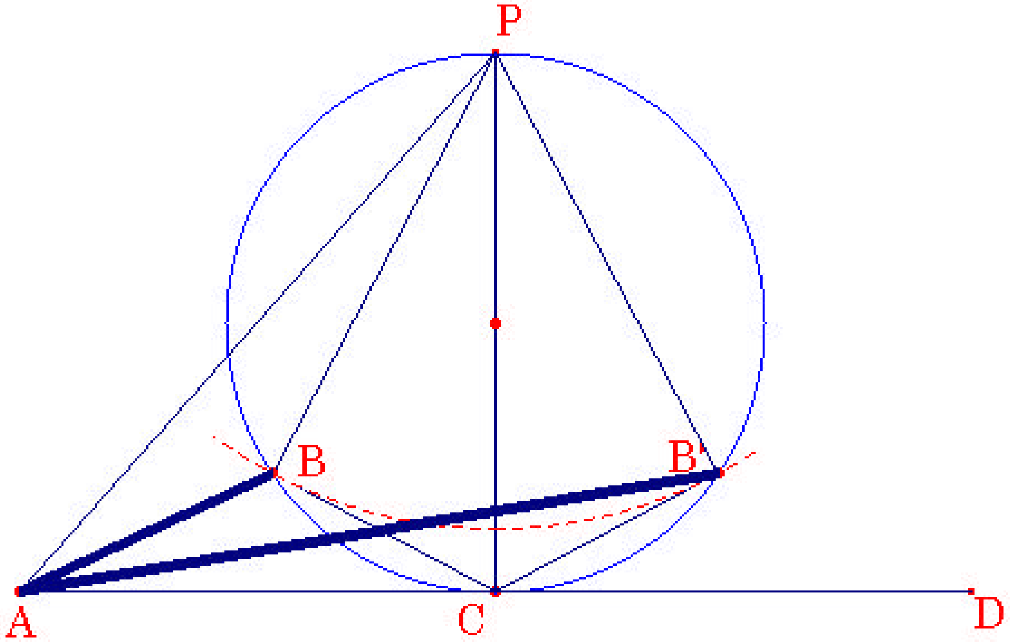
Præcipuum discrimen, hoc est; quod, in casu primo, jacentibus in AC recta punctis B B, rectæ AB AB eædem sunt cum rectis ichnographicis Aβ Aβ; sed non item in casu ultimo, ubi B B puncta punctis ichnographicis ββ super eminent, (nempe, quantum est sinus versus ipsius Arcus CB, diametro PC descripti,) quo casus reddatur possibilis: sed utrobique ACα (linea ichnographica ipsius ABα) æquatur duplæ AC.

Prout igitur, cum æquationis quadraticæ radix prodit negativa; dicendum (verbi gratia) Punctum B (pro eo statu) haberi non posse (ut supponitur) in exposita AC prorsum; posse tamen retrorsum ab A in eadem recta: Hic vero (de radice quadrati negativi) dicendum; Non haberi quidem posse punctum B (ut erat suppositum) in AC recta (vel ante vel retro;) posse tamen (in eodem plano) supra rectam illam.

Hæc ego fusius prosecutus sum, quoniam nova est (quantum scio) hæc notio; nec viderim quomodo dilucidius possem eam explicare, aut (quas vocant) *radices imaginarias* æquationum quadraticarum: quales quidem sunt quæ hic exhibentur.

ウォリスは，$b/2 > \sqrt{a}$（解が実数である）の場合の証明が$b/2 < \sqrt{a}$（解に負数の平方根が含まれる）の場合でも成り立つように強引に「つじつまを合わせて」考えました．そして，その「つじつまあわせ」により$b/2 > \sqrt{a}$の場合の証明が$b/2 < \sqrt{a}$の場合でも成り立つとしました．つまり，依然として$a^2 - ba + a = 0 (b/2 < \sqrt{a})$の解（負数の平方根を含むもの）は，二つの長さ$a = AB$，$AB'$であるとしました．

その２つの長さを図示すると，以下のようになります．



彼はこのようにして，２次方程式の解が負数の平方根を含む場合でも作図できたとしました．

◎　ウォリスの主張

２次方程式の解が実数なら，解を表す重要な点B，B'は直線 AC 上にある．

しかし，解が負数の平方根を含むような場合，点B，B'は直線 AC 上にあるのではなく，AC から離れて取るのである．

私は大いにこれを主張する．なぜなら私が考える記述は新しいからである．

　ウォリスのこの主張をみなさんはどう思いますか？この主張はこんなところが間違っている、ここが欠点である、いや私は賛成であるなど、自由に記述してください。

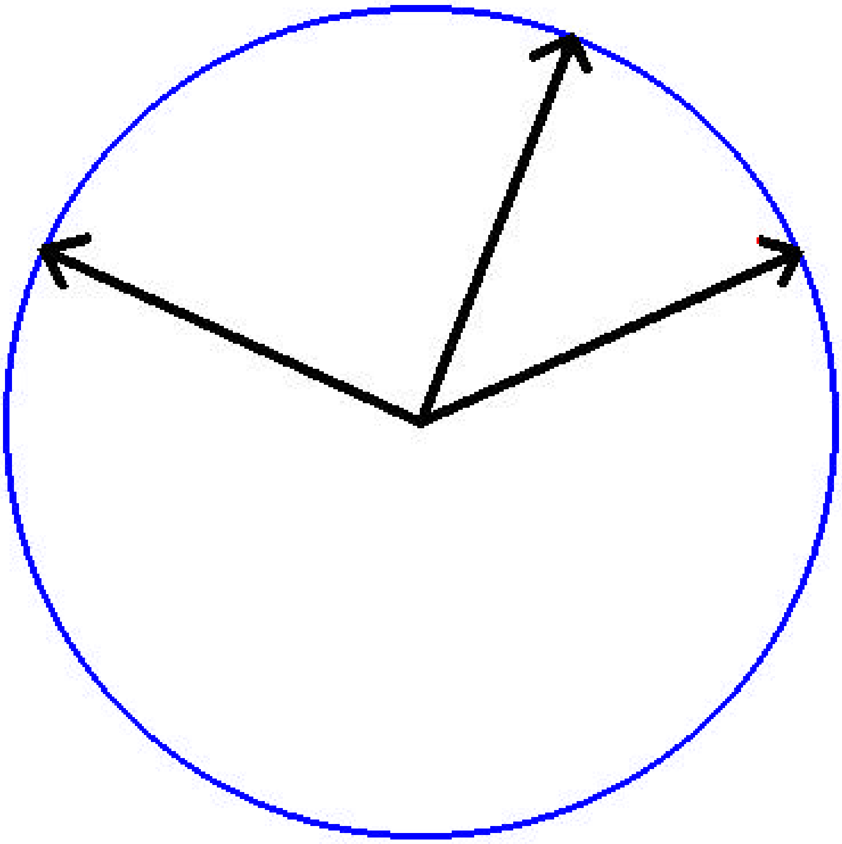
　今日の授業を受けての感想を書いてください.

授業資料

年　　組　　番　氏名

「$\sqrt{-1}$ は描けるのか!?」

Vol. 3



授業者：筑波大学大学院教育研究科１年
小松　孝太郎

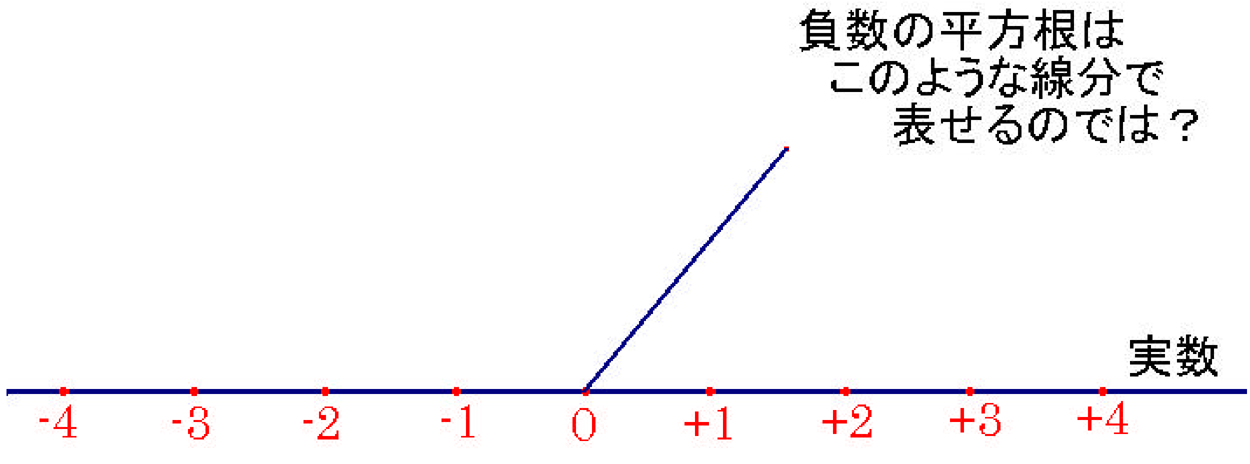
１時間目からの復習

18 世紀末期の主要な問題は，$\sqrt{-1}$ の図的表示とその説明とであった．負数の場合のように，$\sqrt{-1}$ もこれを目の前に図示できるまでは，その理論を十分に展開することはできなかった．それで，ニュートン，デカルト，オイラー時代には，$\sqrt{-1}$ はやはり代数的虚構とされていたのである．

（参照：カジョリ著，小倉金之助補訳『初等数学史』）

私たちは負数の平方根の図示に最初に挑戦したウォリスの考えを考察しました．ウォリスの考えは不完全であり，当時の数学者にはほとんど受け入れられませんでした．

それにもかかわらず，ウォリスは以下のことを主張しました．「負数の平方根は実数を表す数直線の頭上にある!!」と。



5．　$\sqrt{-1}$ の図示への挑戦（ヴェッセル）

負数の平方根の図示に関するウォリスの提言は当時の人々にはあまり受け入れられませんでした．その理由としては，以下の２点が挙げられます．

① 彼の提言は非常に複雑で混乱したものであったこと

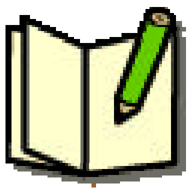
② 負数の平方根同士の演算（足し算や掛け算）の図示に関して何も触れていなかったこと

しかし，ウォリスが自分の考えを示した 1685 年からは 100 年近く経っても負数の平方根が図示されることはありませんでした．そして，1797 年になって負数の平方根の図示に成功したと公表した人が現れました．それはヴェッセルという人物です．

名前：Caspar Wessel
年代：1745 年～1818 年
出身：デンマーク

ヴェッセルは専門的な数学者ではなく，測量技師であった．毎日地図を作っており，平面図形や球面図形をよく取り扱った．論文はデンマーク語で書かれており，当時デンマーク語は全く読まれていなかったため、負数の平方根の図示に関する彼の考えは長く注目されなかった．1897 年にフランス語の翻訳が出たことでようやく多くの注目を浴びた．

ウォリスのまわりくどい図示とは違った
ヴェッセルの方法を見てみよう‼



Om

Directionens analytiske Betegning,

et Forsøg,

anvendt fornemmelig

til

plane og sphæriske Polygoners Opløsning.

Af

Caspar Wessel, Landmaaler.

Nærværende Forsøg angaaer det Spørgsmaal, hvordan Directionen analytisk bør betegnes, eller hvordan rette Linier burde udtrykkes, naar af een eeneste Ligning mellem een ubekiendt og andre givne Linier skulde kunne findes et Udtryk, der forestillede baade den ubekiendtes Længde og dens Direction.

For nogenledes at kunne besvare dette Spørgsmaal, lægger jeg til Grundvold to Sætninger, der synes mig uneqtelige. Den første er: at den Directionens Forandring, der ved algebraiske Operationer kan frembringes, ogsaa bør ved deres Tegn at forestilles. Den anden: at Direction er ingen Gienstand for Algebra, uden for saavidt den ved algebraiske Operationer kan forandres. Men da den ved disse ei kan forandres (i det mindste efter den sædvanlige Forklaring), uden til den modsatte, eller fra positiv til privativ, og omvendt: saa skulde disse to Directioner alene kunne betegnes paa den bekiendte Maade, og i Hensigt til de øvrige Problemet være uopløseligt. Dette er vel

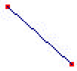
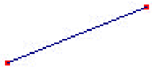
 ogsaa

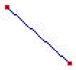
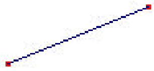
ヴェッセル, *Om Directionens analytiske Betegning*, 1797 年

◎　方向つき線分

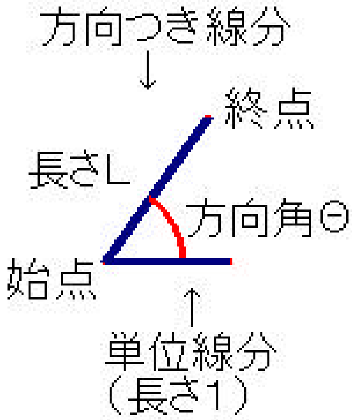
　測量家で普段から平面図形を取り扱っていたヴェッセルは，方向つきの線分の計算を取り扱おうと考えました．

　たとえば，

 という線分と  という線分を足したらどうなるのか？

 という線分と  という線分を掛けたらどうなるのか？

　方向つき線分とは，長さと単位線分（長さ１）からの方向角（傾斜）をもつものです．

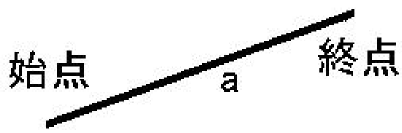


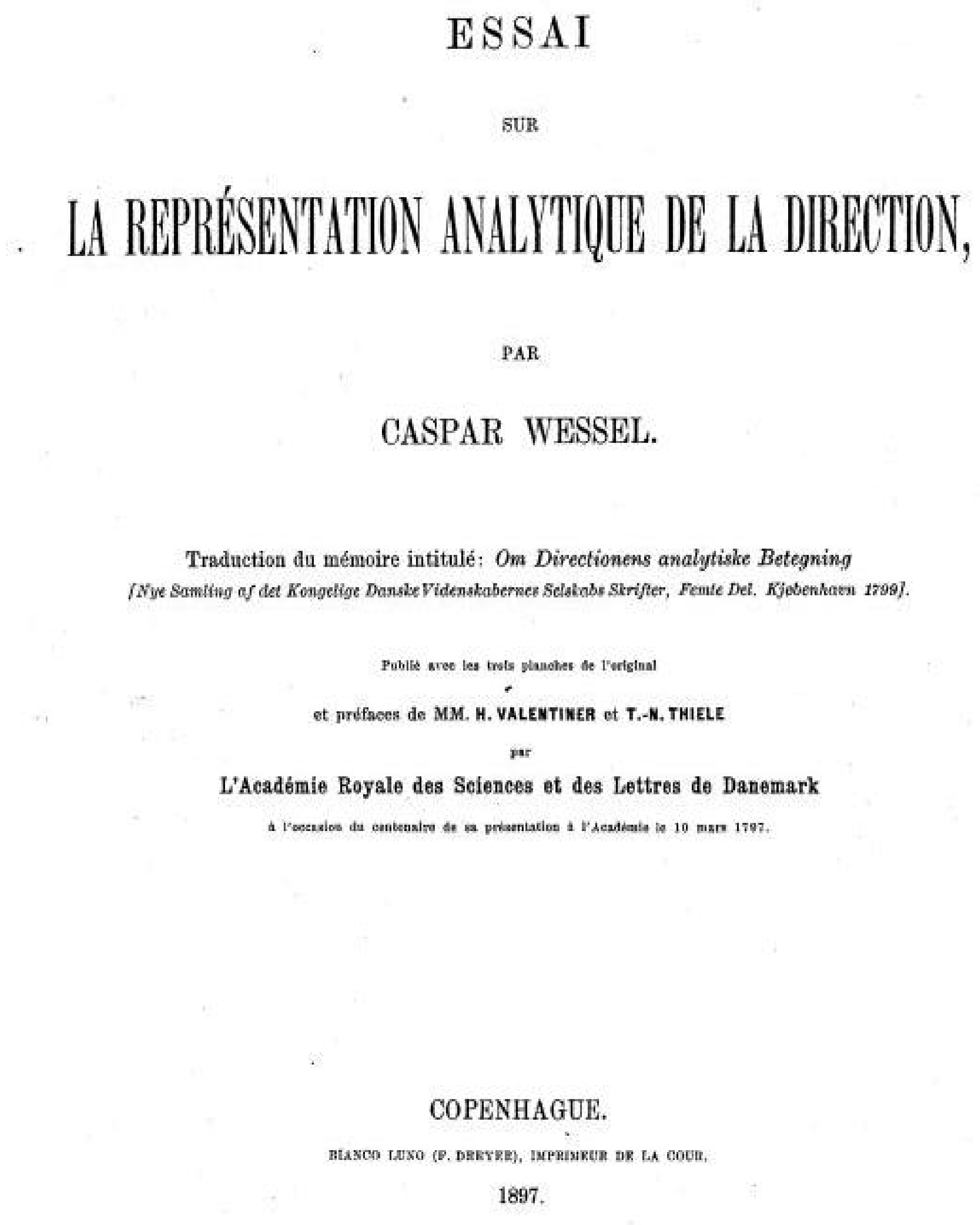
◎　方向つき線分の演算に関する定義

定義①

　a という方向つき線分に対して－ a という方向つき線分は，a と長さが同じで a とは反対向きのものである．

　以下の方向つき線分 a に対して，－ a という線分を書いてみよう．





ESSAI

SUR

LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DE LA DIRECTION,

PAR

CASPAR WESSEL.

Traduction du mémoire intitulé: *Om Directionens analytiske Betegning*
[Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, Femte Del. Kjøbenhavn 1799].

Publié avec les trois planches de l'original

et préfaces de MM. H. VALENTINER et T.-N. THIELE

par

L'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark

à l'occasion du centenaire de sa présentation à l'Académie le 10 mars 1797.

COPENHAGUE.

BIANCO LUNO (F. DREYER), IMPRIMEUR DE LA COUR.

1897.

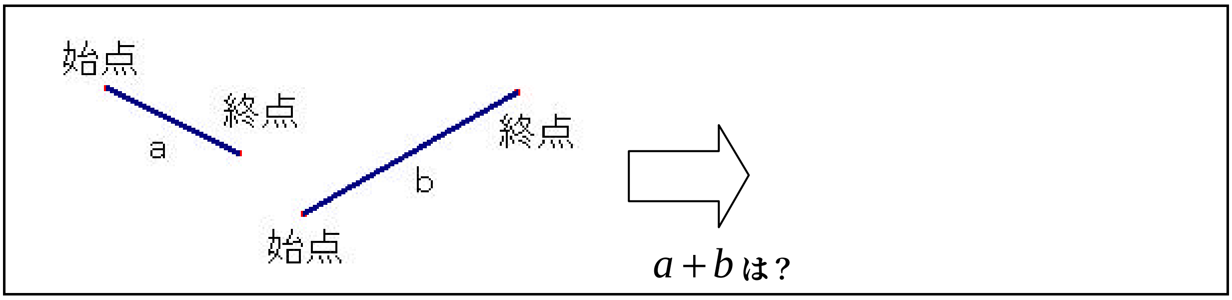
ヴェッセル, フランス語訳, 1897 年

定義②

２つの方向つき線分に対してその和は以下のように決める．

１つ目の線分が終わったところから２つ目の線分が始まるように結合させたら，それは加えられ，結合された線の最初の点から最後の点まで直線を結ぶ．この線分が和の線分である．

では，以下の線分 a と線分 b を足した線分を書いてみよう．



この和の定義，どこかで見たことないかな？

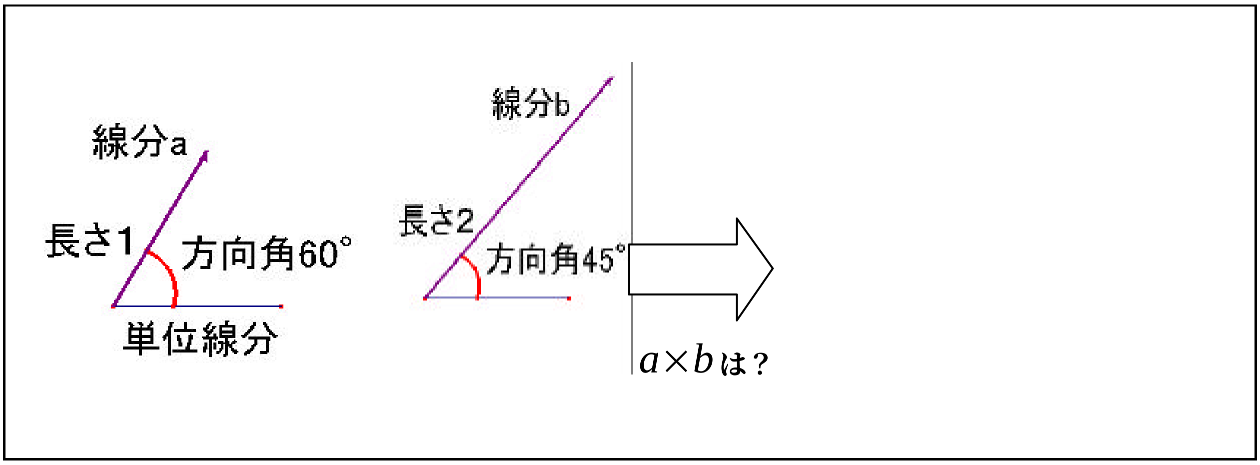
定義③

２つの方向つき線分に対してその積によってできる方向つき線分を以下のように決める．

まず，２つの線分の始点が両方一致するように移動する．そして，以下の長さと方向角をもつ線分が２つの線分の積である．

- 長さ：２つの方向つき線分の長さの積
- 方向角：２つの線分と単位線分とのそれぞれの方向角の和

では，同様に以下の線分 a と線分 b を掛けた線分を書いてみよう

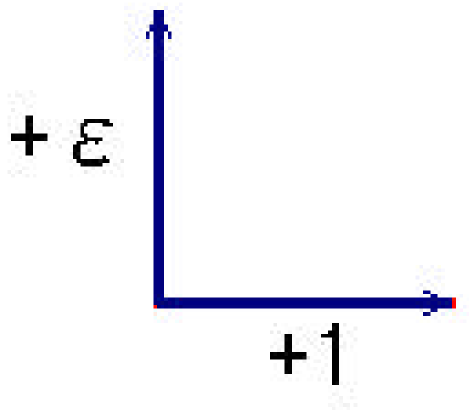


二つの方向つき線分の長さが１である場合の積を

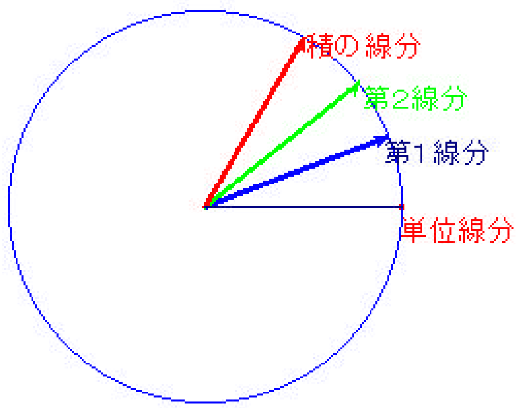
Cabri で見てみよう!!

◎　負数の平方根の図示への道

　彼はこのように和と積を定義したあと，単位線分とそれに垂直な線分を以下のように決めました．
＋１：単位線分
＋ε：長さが１，単位線分とは垂直で始点が同じ
つまり，＋１：方向角０°，＋ε：方向角９０°です．
　また，例えば，＋３を＋１と同じ方向で長さ３の線分，＋２εを＋εと同じ方向で長さが２の線分などとしました．



では次のことを考えてみよう!!
① Cabriで考えた図で＋１，＋εはどこにあるでしょうか？
② ２つの方向つき線分とも＋εに合わせると積の線分はどうなるでしょうか？また，Cabriだけでなく方向つき線分の積の定義に基づいて計算するとどうなるでしょうか？



③ ①，②より何がわかるでしょうか？

◎　負数の平方根と２次方程式の解の図示

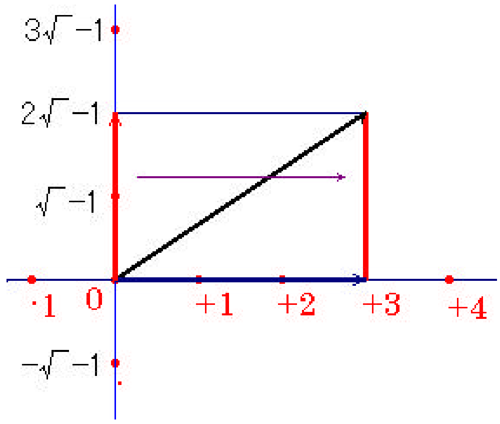
ヴェッセルは負数の平方根を含むような数を図示するとき以下の手順を踏みました．（例．$3+2\sqrt{-1}$）

①実数を表す直線とそれに垂直な負数の平方根を表す直線を設定する．

②負数の平方根を含む数について，実数の部分と負数の平方根の部分に分ける．

（3，$2\sqrt{-1}$ を表す方向つき線分をそれぞれ考える）

③実数を表す方向つき線分と負数の平方根を表す方向つき線分との和として図示する．　（3と$2\sqrt{-1}$ の方向つき線分を加える）



では，ヴェッセルの方法でデカルトもウォリスも成し遂げることができなかった負数の平方根を含む２次方程式の解を図示することができるだろうか？

— 20 —

aura

$$\overline{KP} = \overline{KN} + \overline{NP}.$$

On aurait pu également tirer PM parallèle à KA, et on aurait eu

$$\overline{KP} = \overline{KM} + \overline{MP};$$

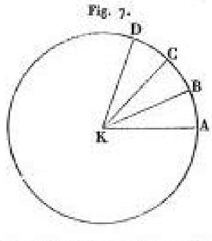
mais ces deux expressions sont identiques, car $\overline{KM} = \overline{NP}$ et $\overline{KN} = \overline{MP}$. Ainsi, comme il n'y a que ces deux manières d'opérer la décomposition proposée, on en conclut que, si A et A' sont de l'ordre a, B et B' de l'ordre b, a étant différent de b, et que l'on ait l'équation

$$A + B = A' + B',$$

il en résulte les deux équations $A = A'$, $B = B'$.

11. Passons à la multiplication des lignes dirigées, et proposons-nous d'abord de construire le produit $\overline{KB} \times \overline{KC}$

Fig. 7.



(*fig.* 7), dont les facteurs sont des unités non primes. Soit pris angle $\overline{CKD}$ = angle $\overline{AKB}$.

— 21 —

D'après ce qui a été dit plus haut, n° 4, note (*), on aura

$$\overline{KA} : \overline{KB} :: \overline{KC} : \overline{KD},$$

d'où

$$\overline{KA} \times \overline{KD} = \overline{KB} \times \overline{KC};$$

mais

$$\overline{KA} = +1,$$

donc

$$\overline{KB} \times \overline{KC} = \overline{KD}.$$

Ainsi, pour construire le produit de deux rayons dirigés, il faut prendre, à partir de l'origine des arcs, la somme des deux arcs qui appartiennent à ces rayons, et l'extrémité de l'arc-somme déterminera la position du rayon-produit : c'est encore une multiplication logarithmique. Il n'est pas nécessaire de montrer que cette règle a lieu pour un nombre quelconque de facteurs.

Si les facteurs ne sont pas des unités, on pourra les mettre sous la forme $m.\overline{KB}$, $n.\overline{KC}, \ldots$, $m, n, \ldots$ étant des coefficients ou lignes primes positives; et le produit sera

$$(mn\ldots).(\overline{KB}.\overline{KC}\ldots) = (mn\ldots).\overline{KP}.$$

Or le produit de la ligne prime positive $(mn\ldots)$ par le rayon $\overline{KP}$ n'est autre chose que cette même ligne tirée dans la direction de ce rayon.

La division s'opérera par une marche inverse, qu'il serait superflu de détailler.

12. Avec ces règles, on opérera une construction quelconque des lignes dirigées, comme on pratique celles des

アルガン，*Essai sur une maniere de representer les quantites imaginaries dans les constructions geometriques*，1806 年

172 ANZEIGE.

plexen Zahlen vier Einheiten $+1$, -1, $+i$, $-i$. *Zusammengesetzt* heisst eine complexe ganze Zahl, wenn sie das Product aus zwei von den Einheiten verschiedenen ganzen Factoren ist; eine complexe Zahl hingegen, die eine *solche* Zerlegung in Factoren nicht zulässt, heisst eine complexe Primzahl. So ist z. B die reelle Zahl 3, auch als complexe Zahl betrachtet, eine Primzahl, während 5 als complexe Zahl zusammengesetzt ist $= (1+2i)(1-2i)$. Eben so wie in der höhern Arithmetik der reellen Zahlen spielen auch in dem erweiterten Felde dieser Wissenschaft die Primzahlen eine Hauptrolle.

Wird eine complexe ganze Zahl $a+bi$ als Modulus angenommen, so lassen sich $aa+bb$ unter sich nicht congruente, und nicht mehrere, complexe Zahlen aufstellen, von denen einer jede vorgegebene ganze complexe Zahl congruent sein muss, und die man ein vollständiges System incongruenter Reste nennen kann. Die sogenannten kleinsten und absolut kleinsten Reste in der Arithmetik der reellen Zahlen haben auch hier ihr vollkommenes Analogon. So besteht z. B. für den Modulus $1+2i$ das vollständige System der absolut kleinsten Reste aus den Zahlen $0, 1, i, -1$ und $-i$. Fast die sämmtlichen Untersuchungen der vier ersten Abschnitte der *Disquisitiones Arithmeticae* finden mit einigen Modificationen, auch in der erweiterten Arithmetik ihren Platz. Das berühmte Fermatsche Theorem z. B. nimmt hier folgende Gestalt an: Wenn $a+bi$ eine complexe Primzahl ist, und k eine durch jene nicht theilbare complexe Zahl, so ist immer $k^{aa+bb-1} \equiv 1$ für den Modulus $a+bi$. Ganz besonders merkwürdig ist es aber, dass das Fundamentaltheorem für die quadratischen Reste in der Arithmetik der complexen Zahlen sein vollkommenes, nur hier noch einfacheres, Gegenstück hat; sind nemlich $a+bi$, $A+Bi$ complexe Primzahlen, so dass a und A ungerade, b und B gerade sind, so ist die erste quadratischer Rest der zweiten, wenn die zweite quadratischer Rest der ersten ist, hingegen die erste quadratischer Nichtrest der zweiten, wenn die zweite quadratischer Nichtrest der ersten ist.

Indem die Abhandlung nach diesen Voruntersuchungen zu der Lehre von den biquadratischen Resten selbst übergeht, wird zuvörderst anstatt der blossen Unterscheidung zwischen biquadratischen Resten und Nichtresten eine Vertheilung der durch den Modulus nicht theilbaren Zahlen in vier Classen festgesetzt. Ist nemlich der Modulus eine complexe Primzahl $a+bi$, wo immer a ungerade, b gerade vorausgesetzt, und der Kürze wegen p statt $aa+bb$ geschrieben wird, und k eine complexe durch $a+bi$ nicht theilbare Zahl, so wird allemal $k^{\frac{1}{4}(p-1)}$

THEORIA RESIDUORUM BIQUADRATICORUM. COMMENTATIO SECUNDA. 173

einer der Zahlen $+1$, $+i$, -1, $-i$ congruent sein, und dadurch eine Vertheilung sämmtlicher durch $a+bi$ nicht theilbarer Zahlen in vier Classen begründet, denen der Reihe nach der biquadratische Character 0, 1, 2, 3 beigelegt wird. Offenbar bezieht sich der Character 0 auf die biquadratischen Reste, die übrigen auf die biquadratischen Nichtreste, und zwar so, dass dem Character 2 zugleich quadratische Reste, den Charactern 1 und 3 hingegen quadratische Nichtreste entsprechen.

Man erkennt leicht, dass es hauptsächlich darauf ankommt, diesen Character bloss für solche Werthe von k bestimmen zu können, die selbst complexe Primzahlen sind, und hier führt sogleich die Induction zu höchst einfachen Resultaten.

Wird zuerst $k = 1+i$ gesetzt, so zeigt sich, dass der Character dieser Zahl allemal $\equiv \frac{1}{4}(-aa+2ab-3bb+1)(\mathrm{mod.}\ 4)$ wird, und ähnliche Ausdrücke finden sich für die Fälle $k = 1-i$, $k = 1+i$, $k = -1-i$.

Ist hingegen $k = \alpha + 6i$ eine solche Primzahl, wo α ungerade und 6 gerade ist, so ergibt sich durch die Induction sehr leicht ein dem Fundamentaltheorem für die quadratischen Reste ganz analoges Reciprocitätsgesetz, welches am einfachsten auf folgende Art ausgedrückt werden kann:

Wenn sowohl $\alpha + 6 - 1$ als $a + b - 1$ durch 4 theilbar sind (auf welchen Fall alle übrigen leicht zurückgeführt werden können), und der Character der Zahl $\alpha + 6i$ in Beziehung auf den Modulus $a+bi$ durch λ, hingegen der Character von $a+bi$ in Beziehung auf den Modulus $\alpha + 6i$ durch l bezeichnet wird: so ist $\lambda = l$, wenn zugleich eine der Zahlen 6, b (oder beide) durch 4 theilbar ist, hingegen $\lambda = l \pm 2$, wenn keine der Zahlen 6, b durch 4 theilbar ist.

Diese Theoreme enthalten im Grunde alles Wesentliche der Theorie der biquadratischen Reste in sich: so leicht es aber war, sie durch Induction zu entdecken, so schwer ist es, strenge Beweise für sie zu geben, besonders für das zweite, das Fundamentaltheorem der biquadratischen Reste. Wegen des grossen Umfanges, zu welchem schon die gegenwärtige Abhandlung angewachsen ist, sah sich der Verfasser genöthigt, die Darstellung des Beweises für das letztere Theorem, in dessen Besitz er seit 20 Jahren ist, für eine künftige dritte Abhandlung zurückzulassen. Dagegen ist in vorliegender Abhandlung noch der vollständige Beweis für das erstere die Zahl $1+i$ betreffende Theorem (von welchem die an-

ガウス，*Theoria Residuorum Biquadraticorum, Commentatio Secunda*，1831 年

◎　負数の平方根の図示に成功した他の数学者

- Jean Robert Argand（ジャン・ロベール・アルガン）
  1806 年に公表

- Carl Friedrich Gauss（カール・フリードリッヒ・ガウス）
  1831 年に公表したが 1796 年には既に気付いていたのではないかと思われる．
  彼は負数の平方根を「complexe Zahlen (英語：complex number, 日本語：複素数)」と命名した．
  その後，彼は複素数の理論を発展させていき，以下の文に示されるように，複素数に対して市民権を与えたのである．

> ガウスの権威をもって初めて，ようやく複素数から神秘主義のヴェールがすっかり取り除かれた．数平面上の点としての，彼の単純明快な複素数の説明はこの仮想的数をすべての神秘と空想から解き放ち，この数に実数と並び数学における完全に同等な市民権を与えたのである．
>
> （引用文献：Remmert 著「複素数」，Lamotke 編『数』，成木勇夫訳）

　また，ガウスは複素数の図示を利用して古来 2000 年以上問題であった正 17 角形の作図可能性を証明しました．

正 17 角形の作図題に関する参考文献

- Gauss 著，高瀬正仁訳，「ガウス整数論」，朝倉書店
  ガウスの原典の日本語訳である．

- Stuart Hollingtale 著，岡部恒治訳，『数学を築いた天才たち（下）』，講談社
  ガウスの理論をわかりやすく解説している．

- 大野栄一著，『定木とコンパスで挑む数学』，講談社
  ガウスの理論を高校生にもわかりやすいように変えているが，実際の正 17 角形の作図法を示している．