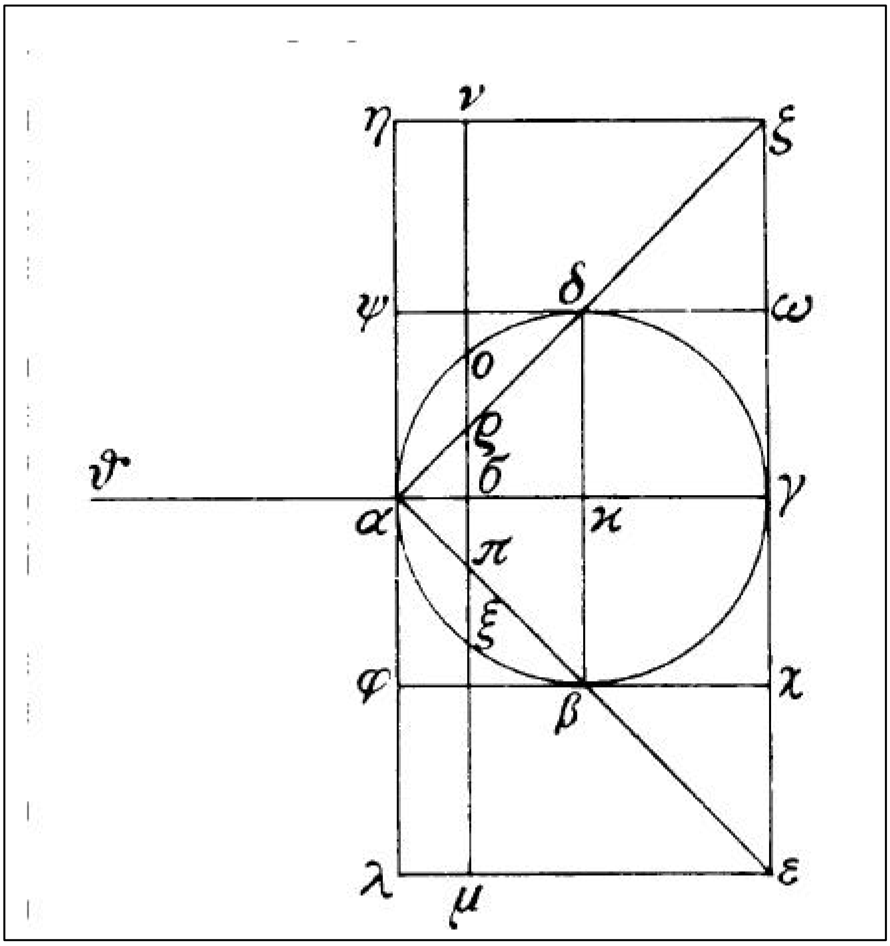
授業資料



２年１組　＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

授業者　筑波大学大学院教育研究科１年

小林　　真人

紀元前３００年ごろ・・・

　　球の体積についてどのようなことが考えられていたのでしょう。

当時の数学にすこしふれてみましょう。

ユークリッド（紀元前３００年ごろ）

　ムセイオン（高等教育施設）の、最初の教師の一人で、最高の教師の一人であった。

ユークリッド『原論』（紀元前３００年ごろ）

　『原論』は全部で 13 巻から構成され，４６７もの命題を含みギリシア古典期の初歩的な数学的知識をすべて見いだすことができる。

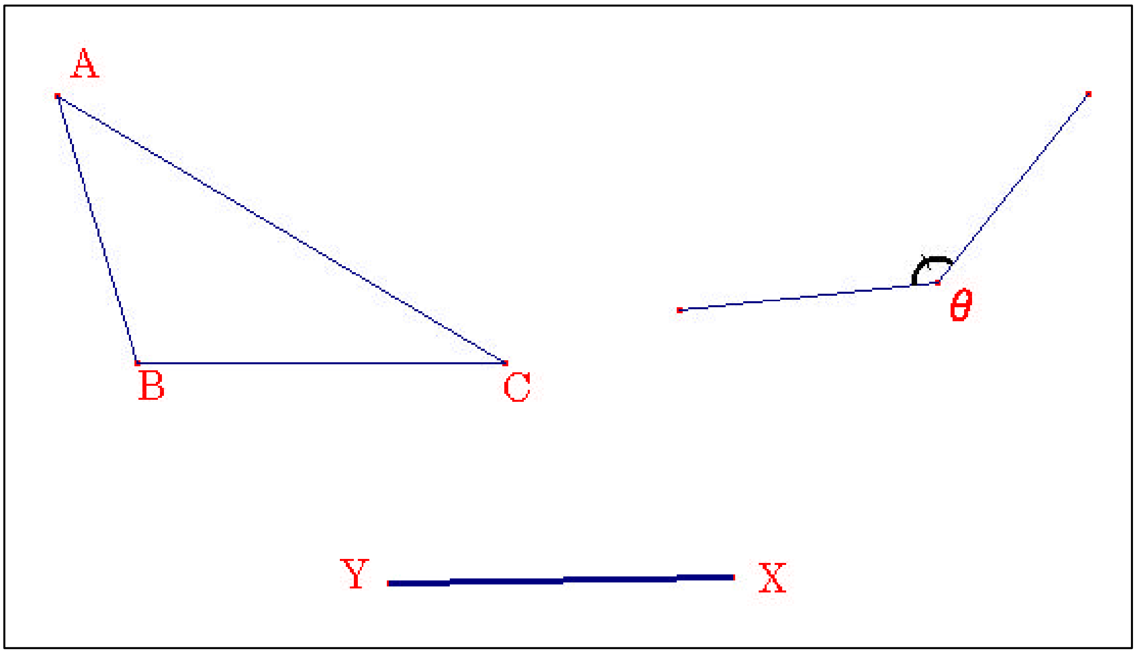
　エウドクソス、テアイテトス、ピュタゴラスなどの業績を、総合し体系化した著作である。

　この中には、結論が一連の命題（証明すべき「定理」と、直線定規とコンパスだけを用いて作図できる「問題」）として提示されている。

古代ギリシアの数学

古代ギリシアでは，現代のように長さ，面積，体積を単位として定めて数値によって表すようなことはない。

ユークリッド原論　Ⅰ－４４
与えられた線分上に与えられた三角形に等しい平行四辺形を与えられた直線角に等しい角のなかにつくること

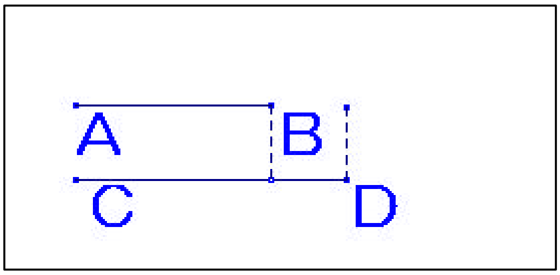


ユークリッド原論　Ⅰ－４５
与えられた直線角のなかに与えられた直線図形に等しい平行四辺形をつくること

ユークリッド原論　Ⅱ－１４
与えられた直線図形に等しい正方形をつくること

なぜこのような変形を考えたのだろう。

例えば、線分であれば・・・

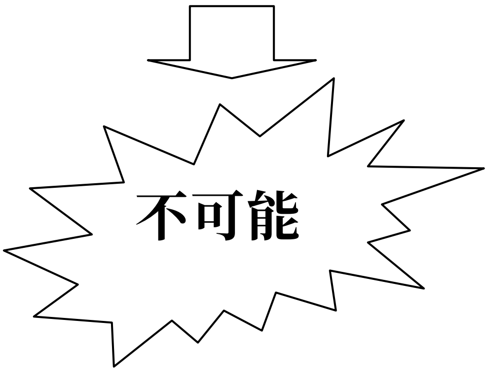


「線分ＡＢより、線分ＣＤの方が
その差の分だけ小さい」
というような考え方をしていた。

•図形の大小は, 図形そのものによって比較するのが基本だった。

ここで、曲線について考えてみよう。

円に等しい正方形を作る！



ここで言う、－不可能－とは・・・、
「定木とコンパスだけでは作図することができない」ということである。

円に関しては、「ユークリッド原論」の中に、次のような命題がある。

ＸⅡ－２　円は互いに直径上の正方形に比例する。

立体に関する定義，命題を見てみよう。

- 同じ高さをもち、多角形を底面とする角錐・円錐は互いに底面に比例する。
- 同じ高さの円錐および円柱はそれぞれ互いに底面に比例する。
- すべての角錐・円錐はそれと同じ底面、等しい高さをもつ角柱・円柱のそれぞれ３分の１である。

これらの命題から考えると、当時は面積、体積をあるものとの＿＿＿＿の関係を利用して、求めていたと考えられる。

「ユークリッド原論」の中にある、球に関する命題は次のようなものがある。

ＸⅡ－18 球は互いにそれぞれの直径の３乗の比をもつ。

しかし、これは球の体積を求めるには、十分ではない。

Ἀρχιμήδους Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος.

Ἀρχιμήδης Ἐρατοσθένει εὖ πρά|ττειν.

Ἀπέστειλά σοι· πρότερον | τῶν εὑρημένων θεωρημάτων | ἀναγράψας αὐτῶν τὰς προτά|σεις φάμενος εὑρίσκειν ταύτας | τὰς ἀποδείξεις, ἃς οὐκ εἶπον | ἐπὶ τοῦ παρόντος· ἦσαν δὲ τῶν ἀ|πεσταλμένων θεωρημάτων | αἱ προτάσεις αἵδε· τοῦ μὲν | πρώτου· ἐὰν εἰς πρίσμα ὀρθὸν πα|ραλληλόγραμμον ἔχον βάσιν | κύλινδρος ἐγγραφῇ τὰς μὲν | βάσεις ἔχων ἐν τοῖς ἀπεναν-|τίον παραλληλογράμμοις, τὰς | δὲ πλευρὰς ἐπὶ τῶν λοιπῶν τοῦ | πρίσματος ἐπιπέδων, καὶ διά τε | ⟨τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου,⟩ | ὅς ἐστι βάσις τοῦ κυλίνδρου, καὶ μι|ᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου τοῦ | ἐν τῷ κατεναντίον ἐπιπέδῳ | ἀχθῇ ἐπίπεδον, τὸ ἀχθὲν ἐπί|πεδον ἀποτεμεῖ τμῆμα ἀπὸ | τοῦ κυλίνδρου, ὅ ἐστι περιεχόμε|νον ὑπὸ δύο ἐπιπέδων καὶ ἐπι|φανείας κυλίνδρου, ἑνὸς μὲν | τοῦ ἀχθέντος, ἑτέρου δέ, ἐν ᾧ ἡ | βάσις ἐστὶν τοῦ κυλίνδρου, τῆς δὲ ἐπιφανείας τῆς με- | ταξὺ τῶν εἰρημένων ἐπιπέ|δων, τὸ δὲ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ | κυλίνδρου τμῆμα ἕκτον μέρος | ἐστὶ τοῦ ὅλου πρίσματος. | τοῦ δὲ ἑτέρου θεωρήματος ἡ πρότασ|ις ἥδε· ἐὰν εἰς κύβον κύλινδρος | ἐγγραφῇ τὰς μὲν βάσεις ἔχων | πρὸς τοῖς κατεναντίον παραλλη|λογράμμοις, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν | τῶν λοιπῶν τεσσάρων ἐπιπέ|δων ἐφαπτομένην, ἐγγραφῇ δὲ καὶ | ἄλλος κύλινδρος εἰς τὸν αὐτὸν κύ|βον τὰς μὲν βάσεις ἔχων ἐν ἄλλοις | παραλληλογράμμοις, τὴν δὲ ἐπι|φάνειαν τῶν λοιπῶν τεσσάρων | ἐπιπέδων ἐφαπτομένην, τὸ πε|ριληφθὲν σχῆμα ὑπὸ τῶν ἐπι|φανειῶν τῶν κυλίνδρων, ὅ ἐστιν | ἐν ἀμφοτέροις τοῖς κυλίνδροις, | δίμοιρόν ἐστι τοῦ ὅλου κύβου. συμ|βαίνει δὲ ταῦτα τὰ θεωρήματα | διαφέρειν τῶν πρότερον εὑρη|μένων· ἐκεῖνα μὲν γὰρ τὰ σχή|ματα, τά τε κωνοειδῆ καὶ | σφαιροειδῆ καὶ τὰ τμήματα | ⟨αὐτῶν, τῷ μεγέθει σχήμασι⟩ | κώνων καὶ κυλίνδρων συνε|κρίναμεν, ἐπιπέδοις δὲ περι|εχομένῳ στερεῷ σχήματι οὐ|δὲν αὐτῶν ἴσον ἐὸν εὕρηται, | τούτων δὲ τῶν σχημάτων τῶν | δυσὶν ἐπιπέδοις καὶ ἐπιφανεί|αις κυλίνδρων ἕκαστον ἑνὶ τῶν | ἐπιπέδοις περιεχομένων στερ|εῶν σχημάτων ἴσον εὑρίσκεται.

Τούτων δὴ τῶν θεωρημάτων | τὰς ἀποδείξεις ἐν τῷδε τῷ βι|βλίῳ γράψας ἀποστελῶ σοι.

Ὁρῶν δέ σε, καθάπερ λέγω, σπου|δαῖον καὶ φιλοσοφίας προεστῶ|τα ἀξιολόγως καὶ τὴν ἐν τοῖς | μαθήμασιν κατὰ τὸ ὑποπίπτον | θεωρίαν τετιμηκότα ἐδοκίμα|σα γράψαι σοι καὶ εἰς τὸ αὐτὸ βιβλί|ον ἐξορίσαι τρόπου τινὸς ἰδιό|τητα, καθ' ὅν σοι παρεχόμενον | ἔσται λαμβάνειν ἀφορμὰς εἰς | τὸ δύνασθαί τινα τῶν ἐν τοῖς | μαθήμασι θεωρεῖν διὰ τῶν | μηχανικῶν. τοῦτο δὲ πέπεισμαι χρή|σιμον εἶναι οὐδὲν ἧσσον καὶ εἰς τὴν | ἀπόδειξιν αὐτῶν τῶν θεωρη|μάτων. καὶ γάρ τινα τῶν πρότερον μοι φα|νέντων μηχανικῶς ὕστερον γε|ωμετρικῶς ἀπεδείχθη διὰ τὸ | χωρὶς ἀποδείξεως εἶναι τὴν διὰ τούτου τοῦ | τρόπου θεωρίαν· ἑτοιμότερον γάρ | ἐστι προλαβόντα διὰ τοῦ τρόπου γνῶ|σίν τινα τῶν ζητημάτων πο|ρίσασθαι τὴν ἀπόδειξιν μᾶλλον | ἢ μηδενὸς ἐγνωσμένου ζητεῖν. | ⟨...... διόπερ καὶ τῶν θεωρη⟩|μάτων τούτων, ὧν Εὔδοξος ἐξηύρη|κεν πρῶτος τὴν ἀπόδειξιν, | περὶ τοῦ κώνου καὶ τῆς πυραμίδος, | ὅτι τρίτον μέρος ὁ μὲν κῶνος | τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ πυραμὶς τοῦ | πρίσματος, τῶν βάσιν ἐχόν|των τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον, οὐ | μικρὰν ἀπονείμαι ἄν τις Δημο|κρίτῳ μερίδα πρώτῳ τὴν ἀ|πόφασιν τὴν περὶ τοῦ εἰρημέ|νου σχήματος χωρὶς ἀποδείξε|ως ἀποφηναμένῳ. ἡμῖν δὲ | συμβαίνει καὶ τοῦ νῦν ἐκδιδο|μένου θεωρήματος τὴν εὕρεσιν | ὁμοίαν ταῖς πρότερον γεγενῆσθαι· | ἠβουλήθην δὲ τὸν τρόπον ανα|γράψας ἐξενεγκεῖν ἅμα μὲν | καὶ διὰ τὸ προειρηκέναι ὑπὲρ | αὐτοῦ, μή τισιν δοκῶμεν κενὴν | φωνὴν καταβεβλῆσθαι, ἅμα | δὲ καὶ πεπεισμένος εἰς τὸ μάθη|μα οὐ μικρὰν ἂν συμβαλέσθαι χρεί|αν· ὑπολαμβάνω γάρ τινας ἢ τῶν ὄντων ἢ ἐπιγινομένων διὰ | τοῦ ἀποδειχθέντος τρόπου καὶ | ἄλλα θεωρήματα οὔπω ἡμῖν συν|παραπεπτωκότα εὑρήσειν.

γρά|φομεν οὖν πρῶτον τὸ καὶ πρῶ|τον φανὲν διὰ τῶν μηχανικῶν, | ὅτι πᾶν τμῆμα ὀρθογωνίου κώ|νου τομῆς ἐπίτριτόν ἐστιν τρι|γώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν | αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον, μετὰ δὲ τοῦ|το ἕκαστον τῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου | θεωρηθέντων· ἐπὶ τέλει δὲ τοῦ βι|βλίου γράφομεν τὰς γεωμετρι|⟨κὰς ἀποδεί-ξεις ἐκείνων τῶν⟩ | ⟨θεωρημάτων, ὧν τὰς προ⟩|τάσεις ἀπεστείλαμέν ⟨σοι πρότερον⟩.

アルキメデス（紀元前２８７頃～２１２頃）
**　シチリアのシラクサで生まれた。**
**　アルキメデスは、数学だけでなく、天文学、流体力学、など幅広い分野に関心をもっていた。**

釣り合いとは・・・

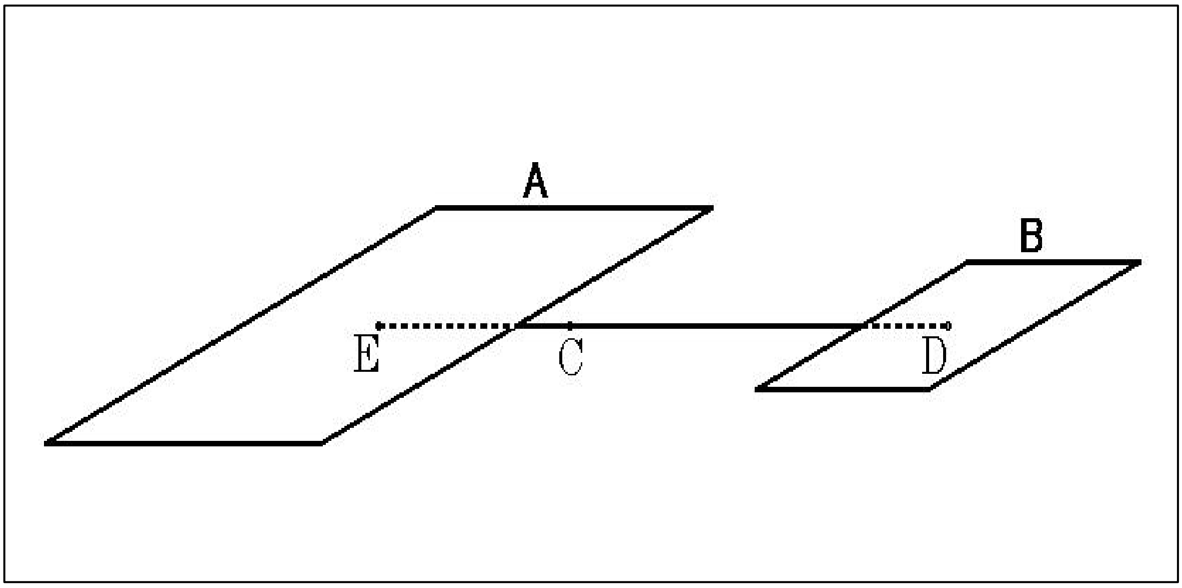
重心とは・・・

アルキメデスの著書「平面板の平衡」について見ていこう。

「二量は重量に反比例する距離において釣り合う。」

これは・・・

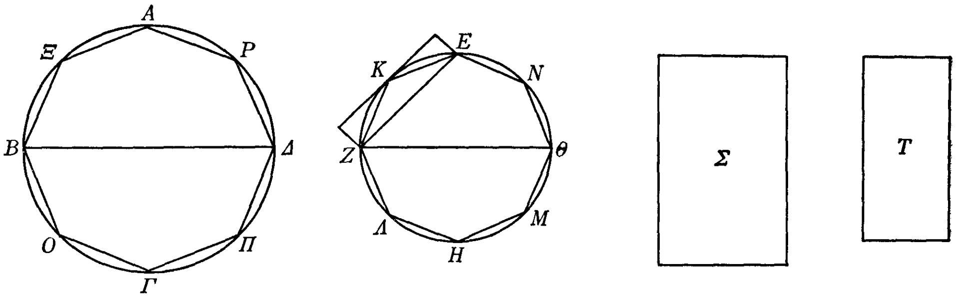
「それぞれの重量がａ，ｂの時、点Ａ，Ｂがそれらの重心であるとし、ＤＥはある長さの直線で、点Ｃにおいて分割されて、ａ：ｂ＝ＤＣ：ＣＥになるとする。そして、ＡとＢの結合された量の重心がＣであるということである。」



2

円は互いに直径上の正方形に比例する。

$AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ を円とし, $B\Delta$, $Z\Theta$ をそれらの直径とせよ。円 $AB\Gamma\Delta$ が円 $EZH\Theta$ に対するように, $B\Delta$ 上の正方形が $Z\Theta$ 上の正方形に対すると主張する。



もし円 $AB\Gamma\Delta$ が $EZH\Theta$ に対するように, $B\Delta$ 上の正方形が $Z\Theta$ 上の正方形に対するのでないならば, $B\Delta$ 上の正方形が $Z\Theta$ 上の正方形に対するように, 円 $AB\Gamma\Delta$ が円 $EZH\Theta$ より小さい面積かあるいは大きい面積に対するであろう。まず小さい Σ に対するとせよ。そして円 $EZH\Theta$ に正方形 $EZH\Theta$ が内接するとせよ。そうすれば内接する正方形は円 $EZH\Theta$ の半分より大きい, なぜならもし点 E, Z, H, Θ を通り円の接線をひけば, 正方形 $EZH\Theta$ は円に外接する正方形の半分であり, 円は外接する正方形より小さいから。それゆえ内接する正方形 $EZH\Theta$ は円 $EZH\Theta$ の半分より大きい。弧 EZ, ZH, $H\Theta$, ΘE が点 K, Λ, M, N において2等分され, EK, KZ, $Z\Lambda$, ΛH, HM, $M\Theta$, ΘN, NE が結ばれたとせよ。そうすれば三角形 EKZ, $Z\Lambda H$, $HM\Theta$, ΘNE のおのおのはそれぞれをふくむ円の切片の半分より大きい, なぜなら点 K, Λ, M, N を通り円の接線をひき, 線分 EZ, ZH, $H\Theta$, ΘE 上に平行四辺形をつくれば, 三角形 EKZ, $Z\Lambda H$, $HM\Theta$, ΘNE のおのおのはそれぞれをふくむ平行四辺形の半分であり, それぞれをふくむ切片は平行四辺形より小さいから。それゆえ三角形 EKZ, $Z\Lambda H$, $HM\Theta$, ΘNE のおのおのはそれぞれをふくむ円の切片の半分より大きい。そこで残りの弧を2等分し, 線分を結び, これをたえずくりかえすと, 円 $EZH\Theta$ と面積 Σ との差より小さい何らかの円の切片を残すに至るであろう。なぜなら第10巻第1定理において, 二つの不等な量が定められ, もし大きいほうから半分より大きい量を引き去り, 残されたも