出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(10)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.93-102、2003年3月

球の体積の公式指導に関する授業研究
―アルキメデス「方法」を題材として―

筑波大学大学院修士課程教育研究科
小林　真人

章構成

要約

本研究は、解説－練習型の指導が多い現状に対して、「ユークリッド原論」、アルキメデス「方法」を題材とした授業を行い、生徒ががが公式や、数学に対して、新しい見方や考え方を得ることができるかどうかを目的として行った。授業研究の結果生徒からは、ギリシア時代の数学の追体験を通して、数学観の変容を見ることができ。また、数学史を用いることに対しても、生徒は肯定的な意見が多かった。

キーワード：幾何学的思考、アルキメデス、解釈学的営み、論証、追体験、

１．はじめに

国立研究所の基礎学力調査（1993）によると、高校生の正答率が「技能・知識」に関する問題については８０％台であるのに対し、「理解・思考・態度」に関する問題については５０％台であるという結果が出ている。現在、学校で行われている指導は、解説－練習型の指導が多いように思われる。生徒自身が、自分なりに学習の意味付けをできていないと、その内容を消化し、理解することは困難である。理解が得られないと、「これを覚えておけば、問題も解けそうだな。」というように、公式を暗記いておこうという考えにいたってしまう。その結果、公式が思い出せないというだけで、問題を解こうという意欲さえなくなり、その問題に対して何も手がつけられないという生徒が生まれてしまうのではないかと考える。そこで、その公式はどんな意味を持っているのか、またどのような論理から導かれるのかということを生徒が認識できるような指導が求められているのではないだろうか。

「中学校指導書　数学編」（平成元年　文部省）には、「球の表面積及び体積を求める公式を数学的に導くことは困難である。そこで、どのようにしたら求積できるかを模型を用いたり、実験したりする過程を通して考えさせ，求積公式の意味が生徒に納得のいく方法で指導することが望ましい。」とある。平成 15 年実施の学習指導要領から、「球の体積」は高校の数学Ｉへと移行になった。「高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編」には、「球の表面積と体積については、単に公式を示し、それを利用するという技術的な扱いだ

けに終わることのないようにする。」とある。

ただし、教科書のみを利用しての学習では、どうしても生徒は「まずは問題を解けるように、公式を暗記しよう。」という考えになってしまう恐れがある。この考えは、普段の数学の授業を通して作られたものであるから、その考えを変える必要もある。そのためには、普段の教科書の数学に収まらずに、生徒が、「なぜ、そうなるの？」という疑問をもつような授業・指導が必要である。教師側にとっても、既存の教科書教材のよさを知るだけでも、著者のなぜそのような教材を入れたのかという、著者の立場になって考えてみることが求められる（2000 礒田）。

Luis Radford（1999）は、「数学の歴史についてよく知っている教師は、生徒がどこで困難を感じているのか予想するであろう。」と述べている。また、礒田・土田（2001）は、「他者の身になって考えて見ることは、数学と自分自身との関係に自分を映し出す機会となる。」と述べている。つまり、数学における発見がなされた時代までさかのぼることによって、生徒たちに問題に対する疑問を持たせ、自分の数学に対する考えを振り返ることができると考える。

アルキメデスの「方法」を題材として用いた先行研究には、薬師寺（1997）がある。薬師寺は作図ツールを用いた探求の有効性について述べている。本研究では、作図ツールを用いずとも、その論証過程を追体験する有用性について述べていく。また、図形を幾何的に捉えていくよさを示した授業実践については、アポロニウスの円錐曲線論を用いた中嶋(2001)がある。中嶋は「作図が図形の理解を助けること」、「手による作図方法を考えたことにより、理解が深まること」を述べている。

本研究では、球の体積の発見法を追体験することにより、生徒の数学観の変容を見ることができるかを、「ユークリッド原論」、アルキメデス「方法」を用いた授業実践により考察していく。

２．研究目的・研究方法

（１）研究目的

暗記した公式に対して疑問をもち、体積を導き出すための単なる道具として用いてきた公式についての理解を深めることによる、生徒たちの変容をみる。

目的達成のために、以下の課題を設定する。

課題１　球の体積の公式について、単に暗記することに終わらず、その意味、発見過程を理解することの必要性を感じることができるかどうかをみる。

課題２　アルキメデスの発見方法を追体験することにより、数学に対する新しい考えを得ることができるか考察する。

（２）研究方法

「球の体積の求積」を題材とした、授業を行う。事前アンケート、事後アンケートの生徒の反応、授業を記録したビデオの生徒の反応の様子から考察する。

３．「ユークリッド原論」、「方法」の教材化

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(10)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.93-102、2003年3月

本授業では、題材として「ユークリッド原論」、アルキメデス「方法」を取り上げた。球の体積に直接的に関する定理を、歴史的に最初に発見したアルキメデスの発見方法を中心とし教材を構成した。「方法」に示されている証明は、図形同士の比を用いて論証を進めていくものである。これを題材として扱うことにより、普段の授業では、図形に関しても代数的に処理することが多い現状に対して、幾何的に処理していくことができる。それと同時に、生徒が論理的に説明することの大切さを見出すことができる。また、代数的に処理をすることにより、見えにくくなる図形の性質を改めて考えることができる。

「ユークリッド原論」は、ギリシアにおける論証数学として、最初に完成されたものであるが、これはユークリッドが先人たちの多くの研究成果を学問体系としてまとめたものである。

アルキメデスの活躍した時代（紀元前３世紀ごろ）は、平面図形に関しては正方形に等積変形し、直接比較する方法が基本であった。それ以前の球の体積に関する定理は、「ユークリッド原論」の中に記されている、球の体積同士を比較したものである。

アルキメデスの導き出した定理は、球の体積を円錐の体積と比較したものであった。しかし、そのままアルキメデスの方法を示しても、πを用いた公式が既習の生徒たちにとっては、なぜこのような方法をとったのかを解釈することはできない。そのため、「ユークリッド原論」も教材として取り入れた。ユークリッド原論の中に示されている命題を通して、与えられた図形を既知のものに帰着させて考えるという発想を生徒がもち、アルキメデスの発見方法を生徒がより解釈しやすくなると考えたからである。

アルキメデスの発見方法とは、「方法」に示されているものであり、平面に重さがあると考えて、理想化された天秤につるし、釣り合いを利用して求めたものであると考えることができる。「方法」からは、アルキメデスは、立体の不可分量が面であると考えていたということが読み取れる。しかし、不可分量の考えも、平面に重さがあるという考えもギリシア時代は認められていなかった。しかし、アルキメデスは「方法」に示した発見方法に関して、確証を得ていたと考えられる。これは、「方法」の序文にもあたる『エラトステネス宛ての手紙』からも読み取ることができる。

４．授業概要

（１）授業環境

Ⅰ対象　国立大学付属高校２年生

Ⅱ準備　コンピュータ（Windows）、プロジェクター、Microsoft Power Point、事前アンケート、事後アンケート、授業資料、ワークシート

（２）授業展開

【１時間目】

事前アンケートにより生徒の考えは聞いていたが、もう一度球の体積の公式を学習したときの、感想を聞くことから授業を開始した。生徒の反応としては、「係数（$\frac{3}{4}$）が、不思議だった。」、「覚えるのが大変だと思った。」などという意見が上がった。

導入として、図１の二つの三角形のどちらの面積が大きいか、またどのようにして考えるかをたずねた。生徒の反応としては、「辺の長さを測る。」という意見が出た。そこで、球の体積の公式が最初に示されたときには、現在のように長さの単位は定められていなかったことを説明し、ユークリッド原論を紹介した。

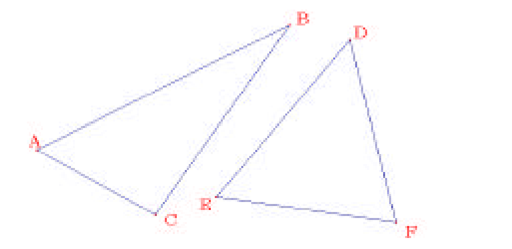


図１　どちらが大きいだろう。

ユークリッド原論が作成された時代は、作図に用いる道具は、定木とコンパスであった。定木とは、直線を引くことができるものであったが、現在のような目盛りはなく、前述したように長さの単位は定められておらず、長さを測るという使い方はしていなかった。生徒は、定木とコンパスを用いて、下記の命題の作図を行った。

ユークリッド原論
Ⅰ巻ー命題４４
　与えられた線分上に与えられた三角形に等しい平行四辺形を与えられた直線角に等しい角の中につくること。
Ⅱ巻ー命題１４
　与えられた直線図形に等しい正方形をつくること。

ここでは、授業者と生徒の間に以下のようなやりとりがあった。

Ｓ：「等しいっていうのは、面積が等しいってことですか？」
Ｔ：「うん、そうだね。さっき、長さの単位が定められていなかったということは言ったよね。面積についても今のように、何ｃｍ^{2}という単位はなかったんだよね。」
Ｓ：「へー。」
Ｔ：「だから、ここでの『等しい』っていうのは、言ってくれた通り、与えられた三角形に面積が等しい平行四辺形を作図しなさいっていうことなんだね。」

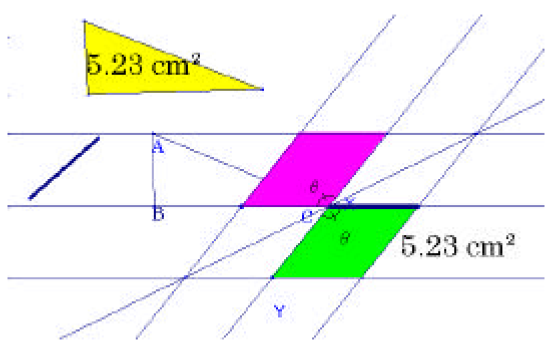
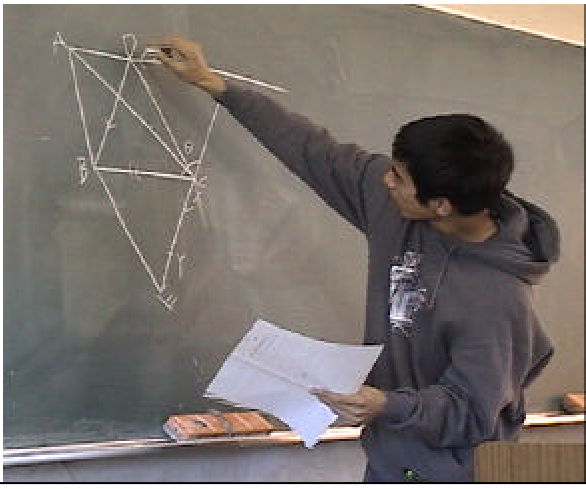


図２「ユークリッド原論」
Ⅰ巻ー命題４４

ここであらためて、生徒は「単位が定められていなかった」ことを解釈することができた。

出典：中学校·高等学校数学科教育課程開発に関する研究(10)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.93-102、2003年3月



生徒の発表（Ⅱ巻ー命題１４の発表）

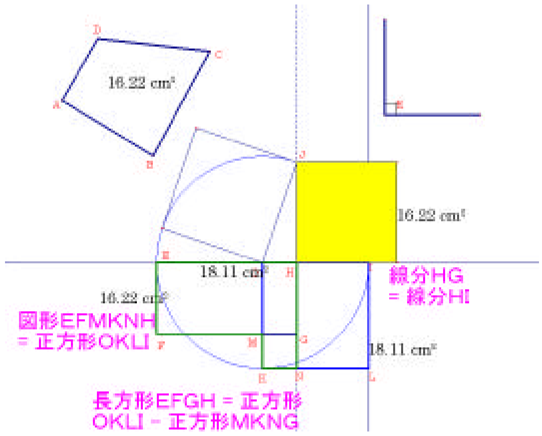


図３　「ユークリッド原論」
Ⅱ巻ー命題１４

この命題によって、どのような考えを得ることができたかを最初に与えた二つの三角形の問題（図１参照）もふまえて生徒に考えてもらった。

生徒は、『当時は求めたいものを、わかりやすいもの・既知のものに帰着させて考えていたこと』を確認した。ただし、円に関しては生徒が行ったような変形は不可能であった。

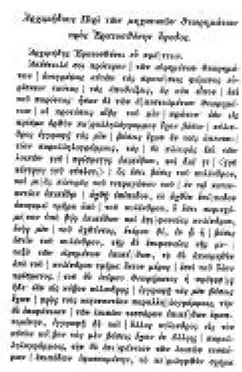
次に、「ユークリッド原論」の中の、立体に関する命題を紹介し、考えてもらった。

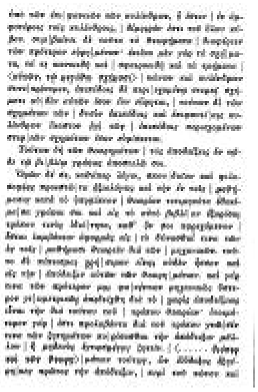
ユークリッド原論
ＸⅡ巻ー命題５
　同じ高さをもち三角形を底面とする角錐は互いに底面に比例する。
ＸⅡ巻ー命題６
　同じ高さをもち多角形を底面とする角錐は互いに底面に比例する。

これらの命題を紹介することにより、生徒は「(体積の考え方は、）ギリシア時代には単位図形を比較して、比を使って表されていた。」ということを理解した。

【２時間目】

「方法」の序文にもなっている、エラトステネス宛の手紙（図４）を紹介する。





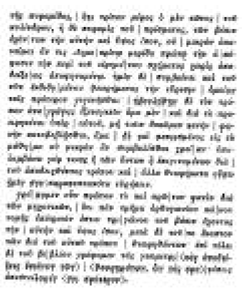


図４：エラトステネス宛の手紙

アルキメデス「方法」における、球の体積の発見方法を追体験する。

球の体積に関する「命題２」を取り上げ、穴埋め形式で追体験を行った。

> 「方法」命題２
>
> すべての球は、球の大円に等しい底面と、球の半径に等しい高さをもつ円錐の４倍である。

ここで、「『ＡＢ、ＢＣに囲まれる長方形』は、『ＸＹ、ＹＺに囲まれる長方形』に等しい」という表現や、「ＡＢがＢＣに対するように、ＸＹがＹＺに対するという表現は、時間の制約もあり、生徒が理解しやすいように、現代風に「『ＡＢ・ＢＣ＝ＸＹ・ＹＺ』」「『ＡＢ：ＢＣ＝ＸＹ：ＹＺ』」というふうに表現することにした。

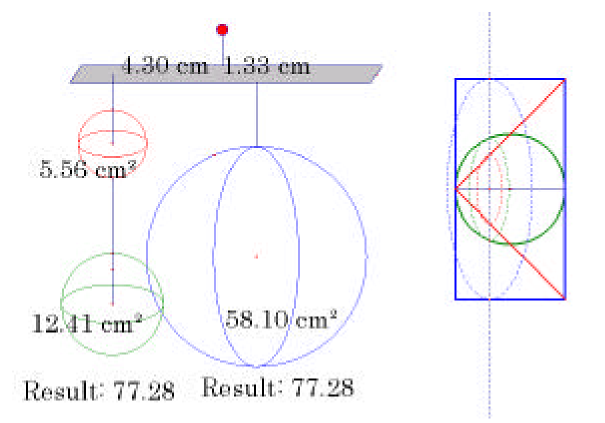


図５：生徒に示した天秤の図

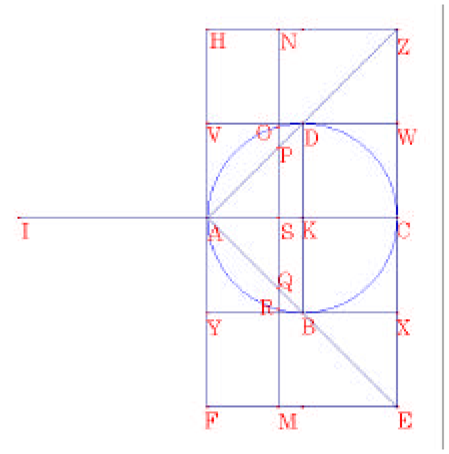


図６：生徒のワークシートに示した図

参考資料：ワークシート

アルキメデスの発見方法をおってみよう！

方法「命題２」

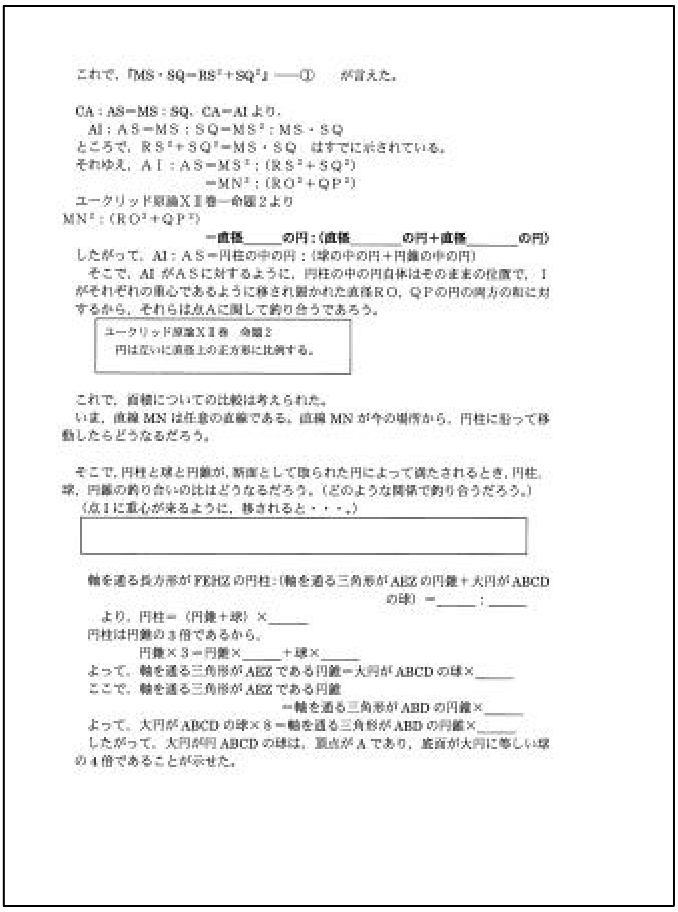
大円が円 ABCD である任意の球があるとせよ。いま，球の中に，円 ABCD に垂直な，直径が BD の円があるとする。この円を底面とし，頂点が A の円錐が描かれたとせよ。そして，その側面が延長されてできた円錐が，C を通って底面に平行な平面によって切られたとせよ。すると，AC に垂直な円ができて，その直径は EZ である。この円を底面として，AC に等しい軸を持つ円柱が描かれたとせよ。また，AC が延長され，AI が AC に等しくとられたとせよ。

いま，CI が天秤の横木であると想定されて，その中点が A であるとする。

BD に平行な，任意の直線 MN が引かれたとする。MN と AC との交点を S とする。また，直線 MN 上に AC に垂直な平面を描くと，円柱の中に直径 MN の円を，球の中に直径 OR の円を，円錐の中に直径 PQ の円を作るであろう。

まずは，立体の断面の関係について調べていこう。

「ＭＳ，ＳＱに囲まれた長方形は，ＲＳ上の正方形とＳＱ上の正方形との和に等しい。」　（$MS \cdot SQ = RS^2 + SQ^2$）　を証明してみよう。



これで，『$MS \cdot SQ = RS^2 + SQ^2$』――①　が言えた。

CA : AS＝MS : SQ，CA＝AI より，

AI : AS＝MS : SQ＝MS^2 : MS・SQ

ところで，$RS^2 + SQ^2$＝MS・SQ　はすでに示されている。

それゆえ，AI : AS＝MS^2 : ($RS^2 + SQ^2$)

＝MN^2 : ($RO^2 + QP^2$)

ユークリッド原論XII巻―命題２より

MN^2 : ($RO^2 + QP^2$)

＝直径_____の円 : (直径______の円＋直径______の円)

したがって，AI : AS＝円柱の中の円 : (球の中の円＋円錐の中の円)

そこで，AI が AS に対するように，円柱の中の円自体はそのままの位置で，I がそれぞれの重心であるように移され置かれた直径 RO，QP の円の両方の和に対するから，それらは点 A に関して釣り合うであろう。

> ユークリッド原論XII巻　命題２
> 円は互いに直径上の正方形に比例する。

これで，面積についての比較は考えられた。

いま，直線 MN は任意の直線である。直線 MN が今の場所から，円柱に沿って移動したらどうなるだろう。

そこで，円柱と球と円錐が，断面として取られた円によって満たされるとき，円柱，球，円錐の釣り合いの比はどうなるだろう。（どのような関係で釣り合うだろう。）

（点 I に重心が来るように，移されると・・・。）

軸を通る長方形が FEHZ の円柱：(軸を通る三角形が AEZ の円錐＋大円が ABCD の球) ＝_____ : _____

より，円柱＝（円錐＋球）×_____

円柱は円錐の３倍であるから，

円錐×３＝円錐×_____＋球×_____

よって，軸を通る三角形が AEZ である円錐＝大円が ABCD の球×_____

ここで，軸を通る三角形が AEZ である円錐

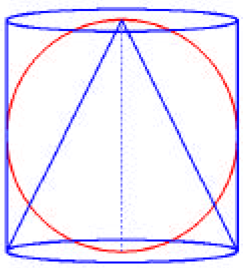
＝軸を通る三角形が ABD の円錐×_____

よって，大円が ABCD の球×８＝軸を通る三角形が ABD の円錐×_____

したがって，大円が円 ABCD の球は，頂点が A であり，底面が大円に等しい球の４倍であることが示せた。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(10)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.93-102、2003年3月

生徒は、当時の与えられた条件のみを使っての証明に真剣に取り組んでいた。追体験を通して、図形のみに注目して論証を進めるという方法に、難しさを感じながらも、アルキメデスの考えのすごさも感じていた。



円錐：球：円柱＝

図７

アルキメデスが自分の墓に彫らせたという図７について、考えた。最初は普段見慣れない問題に戸惑っていたようであるが、「円錐：球：円柱＝１：２：３」であることに気付くと、不思議議に感じている様子の生徒や、驚いた生徒など様々であった。

５．結果・議論

事前アンケート、事後アンケートより課題について考察していく。

課題１　球の体積の公式に関して、単に暗記することに終わらず、その意味を解釈すること、過程を理解することの必要性を感じることができるか。

事前「球の体積を授業で学んだとき、どのようなことを感じましたか。

- まじで！？
- （$\frac{4}{3}$ とかが）球は考えにくい。
- この世界からかけ離れたところに存在している式みたいに感じた。
- 意味のわからない公式だと思った。
- 数字だけ見たらわけわかんなかった。
- どうしてそうなるのかがわからない。
- $\frac{4}{3}$ という数字が真新しかった。
- 本当にそれでいいのかと思った。
- $\frac{4}{3}$ という数字が不思議。

（生徒のそのままの記述である。）

授業前は、$\frac{4}{3}$ という係数に関して、疑問に思ったり、驚きを感じたりしていたようである。しかし、そのように感じながらも公式を暗記し、解答を導き出す道具として利用して

いたといえる。

事後アンケートの結果には、以下のような回答が得られた。

事後「球の体積について、授業を受ける前と、受けた後で「その公式に対する考え、印象」などは変わりましたか。変わった人はどのように変わったかも書いてください。

- 球がこの円錐の４倍というイメージはいままでなかった。
- 過程を学ぶことも大切であるとわかった。
- 球の体積はこれなんだって感じ（暗記した）が、ふーんって感じになった。
- このように証明してこそ数学なのだと思った。
- つい覚えきってしまうことを改めて考えたことに意味があった。

（生徒のそのままの記述である。）

公式を暗記し、解を導くために公式を利用することが重要なのではなく、公式の意味や、その証明を数学的に理解することの必要性を感じたといえる。

また、球の体積の公式に関しても、数値として覚えるという考えをするのではなく、その公式が導かれた過程を考えることによって、公式の係数の表す意味を理解し、さらなる公式の理解につながるということを生徒自身が実感することができたといえる。「球の体積が円錐の４倍であるというイメージ」を身につけたことなど、今までの授業では身に付かなかった幾何学的な解釈をすることができるようになったことなどは、その典型的な例である。

課題２　アルキメデスの発見方法を追体験することにより、数学に対する新しい考えを得ることができるか考察する。

事後

- 図形のみを使って論証していったところがすごい。
- 図形の性質に注目したことにより、基本図形の性質が更に見えた。
- 簡単な考えから発展させて行ったところ。
- 面積を直接求めようとせずに、論証して行く考えがすごい。
- あらかじめ予想して図形をおいたところがすごい。
- 全てを図形的に処理しているところが真新しい考えだった。
- 代数的な方法を用いず、図形的な思考だけで解き進めていった。
- 図形だけを発展させて目に見える形で動かして行ったところ。
- 図形での具体的な説明がよかった。
- 距離などをはかることなく、図形の移動だけで、全てを解決しようとしたところがすごい。
- 面積比から体積比を導き出したところがすばらしい。
- 断面積から球と円錐の体積を比較することを思いついたことがすごい。

以上のように、普段の授業では、得ることのできない発想が生徒たちには身に付いた。当時の立場にたったことで、生徒は自然と文化的営みを認め、公式に対して新しい解釈を

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(10)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.93-102、2003年3月

身につけたといえる。

薬師寺（1997）は、作図ツールを用いた探求によって、「(幾何学的における）条件による推論が可能になる。」「探求が探求を生み出していくこと、つまり、問題がオープンであること。」などの、有効性を述べている。しかし本研究を通して、作図ツールに限らず、数学史を用い歴史的背景を解釈しながら論証を進めていくことは、生徒の公式に対する見方・考え方に収まらず、数学に対する見方・考え方の変容をねらうことにおいて、非常に有効であることが示された。

また、中嶋（2001）は、アポロニウスの円錐曲線論を用いて、図形を幾何的に捉えることの有用性を述べたが、本研究では代数的に表された表現に対しても、幾何的に捉えることにより更なる理解を促すことがいえた。

課題１、２の回答以外の感想には以下のようなものもあった。

「あらかじめ目標を授業の最初に言ってもらえたのでそれに向かって考えられた。」というものもあった。

課題１、２を通して、目的は達成することができたといえるのではないだろうか。また、記述していない生徒の意見の中には、「昔の人はすごい。」「普段は考えないような考えなので面白い。」などの、数学史に対する純粋な感想もあった。

題材として、数学史を用い生徒が当時の思想も含め解釈していくことは、今回の授業において非常に有効であったといえる。

６．おわりに

本研究は、公式を理解が不十分のまま暗記してしまうことが多い現在の状況に対して、公式を理解することの必要性を生徒が感じ、そのなかで、数学に対して新しい発想を得ることができるかどうかを目的として行った。アンケートなどの結果からも分かるように、生徒自身が、今までの知識と比較して数学に対して、また、公式に対して違った視点から見ることができるようになった。

生徒の感想には、「日本語がむずかしかった。」などという、表現形式についての問題を訴えている生徒もいた。

本研究における授業では、図形について論証を進める部分に注目をした解説を行った。アルキメデス「方法」の中でも、異なった視点に立ち、アルキメデスの時代には認められていなかった、立体の不可分量は面であるという考えに注目した授業展開なども考えることができる（2000 白田)。このように、一つの題材を通しての、様々な目的を持った授業展開の考案が今後の課題として上げられる。

謝辞

今回の研究授業を行うにあたり、国立筑波大学附属駒場高等学校の牧下英世先生はじめ、多くの方々から貴重なご意見、ご指導をいただきました。深く御礼申し上げます。

注：本研究は平成14年度科学研究費「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」（基盤研究Ｂ、研究代表者礒田正美　NO.14380055）の一貫として行われた。

引用文献・参考文献

【１】Luis Radford．（1999） Histrical Formation And Student Understanding of Mathematics. In．J．Fauvel&J．V．Maanen *History In Mathematics Education*

【２】礒田正美　文化的営みとしての数学教育－その方法としての数学史上の一次文献の利用

【３】礒田正美・土田知之（2001）異文化体験を通じての数学の文化的視野の覚醒；数学的活動の新たなパースペクティブ

【４】薬師寺將二（1997）解析の歴史的変遷を踏まえた曲線の探究に関する一考察－作図ツールの使用を前提に－　平成９年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

【５】臼田要介（2000）生徒の数学観を変容させるための数学史の活用について～「カバリエリの原理」の教材を通して～　世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育－代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開－　中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（8）平成13年3月筑波大学数学教育研究室

【６】中嶋俊朗（2001）接線の幾何的作図に関する授業実践－アポロニウスの円錐曲線論を用いて－　教育評価の転換と歴史文化志向の数学教育－ADDING IT UP:Helping Children Learn Mathematics　中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（9）平成14年3月筑波大学数学教育研究室

【７】片野善一郎著（1992）シリーズ・課題学習の教材開発　数学史を活用した教材研究　明治図書

【８】根本博著（1996）新学力観に役立つ数学科の授業改善－考える心を育てる　明治図書

【９】中学校指導書　数学編（1989）文部省

【10】高等学校学習指導要領解説　数学編理数編（1999）文部省

【11】アルキメデス著　佐藤徹訳・解説（1990）「アルキメデス方法」東海大学出版会

【12】スチュアート・ホリングデール著　岡部恒治監訳（1993）数学を築いた天才たち（上）」講談社

【13】上垣渉著　（1999）「アルキメデスを読む」日本評論社

【14】伊達文治著　（1993）「アルキメデスの数学：静力学的な考え方による求積法」森北出版

【15】アルキメデス著　伊東俊太郎責任編集　（1981）科学の名著：9「アルキメデス」朝日出版社

【16】片野善一郎著（1995）教職数学シリーズ実践編７　数学史の利用　共立出版