出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究 (10)
題名：アルマゲストを原典とした弦の表に関する授業実践-天文学とのかかわりを踏まえて-
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.68-80、2003年3月

アルマゲストを教材とした授業実践

―他教科とのかかわりを踏まえて―

筑波大学大学院修士課程教育研究科
中村　友也

章構成

要約

本稿では、数学史を取り入れた授業研究として、天動説の創始者の一人であるといわれるプトレマイオスの一次文献を解釈することにより、三角比の始まりといわれる「弦の表」に焦点を当てた授業を実践した。そして、自然現象を解釈するために有効に働く数学についての理解を深め、数学に関する興味・関心を持つかを検討した。その結果、多くの生徒から、数学と自然の係わり合いや、その歴史についての興味・関心の高まりと、数学に関する考え方の変容が見られた。その結果から、数学史を用いた授業が有用であると考えられる。

キーワード：学際的、数学のよさ、自然現象の解明、天動説、数学史

１、はじめに

生徒が数学に関して抱いている印象でよく聞かれるものは、「数学は役に立たない学問だ。」、「数学は自分の将来には役に立たないと思う。」などが挙げられる。多くの生徒は数学に関して楽しさ、よさを感じていないのではないのか。このようなことを受けて、今日学際的な教育が重視されている。Lucia, Leo(2000, p.61)は「生徒は、教科間の歴史的接触、共鳴、相互目的を通して、豊富になった数学と他の教科の両方に対する理解を見つけるであろう。」、(Lucia, Leo, 2000, p52)「他の分野と密接に関係して刺激され発展された数学の概念や方法の直接的経験をすることに生徒は興味を抱いているかもしれない。」と述べている。数学と物理、化学は密に関連しているが、その関連が授業にはあまり見られず、数学と他教科を関連させた教材が充実していないのが現状である。三輪（1993, p.122）は、応用という名の教材は学校数学に存在したが、真に重要な本質的な部分は数学そのものであり、そういうものだけが学校数学の応用であるとすれば、数学が持っている威力は全く現れてないのではないかと述べている。また、礒田(2001, p.43)は「普段与えられることのない課題を投げかけて異文化体験をさせて、生徒自身が学んでいる数学文化を自覚できない状況、学んでいる数学から阻害されている状況から脱して、その意味を自覚し、それ以降の数学の認識への新たな視野を提供する」と述べる。

そこで、数学と天文の結びつきに注目した。なぜなら、天文における生徒の学習は、現象の暗記のみで、その現象の理由を知ることや分析をするために、数学の知識が有効に働いていることを学んでいないからである。そのような理論がない表面の暗記のみの教材を生徒に与えるだけでよいのだろうか。自然現象を理論的に考え

ていくことは、自ら考える生徒を育てるためにも必要である。天文に幾何学、三角比の考えなどが有効に働くことを知ることは、生徒の数学に対する考えに大きく影響を及ぼすと考えられる。生徒が現在学校で学んでいる式、計算を主体とした数学ではなく、数学が現実世界に見事に応用され、その理解に有効に働いていることを体験することによって、現在感じている数学を見直し、数学の新たな一面を感じ取ることが出来ないかと考える。また、数学史の利用に関して、礒田(2002, p.8)は、「共感と教訓を導く原典解釈を取り入れるならば、解釈学的営みを通じて、生徒は、自らその数学内容とそれを生み出した人間とのかかわりを知る活動に取り組むことになる」と述べる。そこで、本研究では数学と現実との結びつきという観点から、歴史的テキスト(原典)を解釈する活動を中心とした教材を開発し、授業の実践例を通して以下の研究目的の成果について検証する。

2. 研究目的・研究方法

研究目的：生徒は、自然現象の分析をテーマとした原典を解釈する活動を通して、数学が現象の理解、分析に有効に働くことを学ぶことによって、数学観が変容するかを考察する。

目的達成のため、以下を課題とする。

課題１：生徒は、天体観測の結果から惑星の軌道などを決定するような、自然現象を分析するために数学を用いる活動を通して、数学の重要性、必要性を感じ取ることが出来るか考察する。

課題２：アルマゲストを題材とした天文学を授業教材に用いることによって、生徒は、自然と数学とのかかりを見出すことができるか考察する。

課題３：生徒は、数学史を用いた学習によって、数学と人間のかかわりを通して、数学のよさを感じ取ることができるか考察する。

研究方法：原典を用いた歴史的教材を開発し、それを用いた授業研究を行う。授業の事前・事後に数学に対する意識を問うアンケート、各授業ごとに授業に対する感想を問うアンケート及び授業を撮影したビデオをもとに考察する。

3. 天動説の教材化

齋藤（2002, pp.262-275）は、他教科とのかかわりを持った数学の教材を開発するために“Brachistochrone Problem―最速降下曲線問題―”を扱った。最速降下曲線問題とは、任意の 2 点間を物体が最も早い速度で落下するための曲線を求める問題である。そこで、物理と数学との係わり合いを取り上げており、「数学史は教科間のつながりを持つことのできる教材であると言うことができる。」と報告している。本研究では天文学と数学の結びつきに注目して、原典にプトレマイオスの著した『アルマゲスト』を用いた。この原典は紀元後 2 世紀ごろ書かれたといわれるものである。そして、それ以前の天文学についてまとめ、さらに彼独自の理論を付け加えること

によって、その後 1500 年近くも天動説についての理論の基礎となったものである。そこには、天体観測において、角度から距離を求めるための、単位円において中心角に対する弦の長さの表が取り扱われている。細かい観測結果にも対応できるように、0.5°ずつの間隔で弦の長さを求めているのだが、中心角の和、差、積に対する弦の長さは単純に弦の和、差、積で求めることができない。そのためプトレマイオスは、ユークリッド原論、プトレマイオスの定理、はさみうちの原理などを用いて、弦の長さの和、半角、積を求めているのだが、それは現在の三角比の加法定理、半角、倍角などと同じ方法である。定理の証明のために、ギリシャ時代の特徴であるコンパスと定木のみを用いて証明を行っている。この本の数学史上の意義は、角度から距離を求めるために、角度を中心角と弦の長さに対応させて表を作り、後に体系化される三角比の基礎を築いた点である。生徒は、その証明など彼の考えを追体験することによって、現在学んでいる数学との比較、人の営みとしての数学を感じ取れると考えられる。

そして、天体の軌道を決定する際には、当時の思想から等速円運動を用いて全ての惑星（水星、金星、火星、木星、土星）、月の軌道を表さなければならなかった。そのため、惑星の軌道半径、惑星間の距離を求めるために、弦の表を用いて数値を決定した。プトレマイオスは、等速円運動のみを用いるという難題で惑星の軌道を決定するために、円周上にもう一つの円の中心をおく周転円と惑星の軌道の中心が地球と外れる離心円の考えを組み合わせることによって、惑星の軌道を決定した。彼の理論は、現象をかなり正確に記述できたので、これが後の長い間理論が覆されることがなかった理由の 1 つである。

今回は弦の表と、周転円、離心円を用いた惑星のモデルの２つに焦点を当てて教材開発をした。その際、数学、物理、天文の本を参考にし、その思想なども交えながら、プトレマイオスの世界観を、数学を中心に生徒に伝えられるよう配慮した。そして、惑星の運動を視覚的に理解できるよう Cabri Geometry を活用した。

4. 研究概要

⑴授業環境

対象：埼玉県立高校　希望者 8 名（1 年生 2 人、2 年生 6 人）

日時：平成 14 年 11 月 26 日（火）・27 日（水）放課後
（１時間を１コマとして 26 日に２コマ、２７日に１コマ）
（事前（平成 14 年 11 月 25 日放課後）に
Cabri GeometryⅡ（以下「カブリ」と呼ぶ）の指導会実施）

準備：コンピュータ（Windows）、作図ツール「カブリ」、Microsoft Power Point、ビデオプロジェクター、事前事後アンケート、ワークシート、授業資料、作図用ファイル

⑵授業展開

１時間目

【図ｉ】16 世紀のティコブラーエの観測の様子

プトレマイオス（アルマゲストより抜粋）

> １、地面と垂直にたっている木がある。この木の長さを測ったら、棒の影が 20ｃm、木の影が３mだった。木の高さを求めなさい。
> ２、半月のとき、月と太陽の○○○であった。このことから、月から太陽までの距離は地球から月までの距離の何倍であるといえるか。

【図ⅱ】日常と天文における問題の特徴

目標：天文の歴史の中で、「角度をどのように長さに変えようとしたのか」を学び、様々な角度に対する長さを求める方法を理解する。

①生徒の天動説観について

はじめに、指導前と指導後の生徒の考えがどのように変わるのかを知るために、天動説に対してどんな意識を持っているのかを聞くことからはじめた。予想通り、ほとんどの生徒の回答としては、「今では間違いであるし、なぜあんな考え方が支持されていたかが不思議である。」といった内容の答えが帰ってきた。

次に当時の観測風景から入った。

教師　「これ（図ｉ）を見て、どんな観測をしているか分かる？」

生徒１「指差している人の先に星があって、それを分度器みたいなもので測ってる。」

教師　「その通りだね。ほかに気付くことはないかな？観測機器が大きいと思うんだけど。」

生徒２「小さいと目盛りが大雑把になってしまうから。」

教師　「そうだね。観測機器は大きくしようと努力がなされました。あと、分度器で測るって言ったけど、何で物差しで測らないの？」

生徒３「物差しじゃ角度は測れないから。」

教師　「なんで測れない？」

生徒４「物差しで測るとうまく大きさが対応しないから目盛りを打つのが大変。」

教師　「そうだね、弧だと角度が 2 倍になれば弧の長さも 2 倍になるけど、線分の長さだとそうはいかないよね。」

ここでは、角度は線分と対応させることは困難で、弧の長さに対応させるほうがよいといったこと、誤差を少なくするために大きな観測機器を使うようになっていったことを生徒に考えてもらった。

②人物紹介

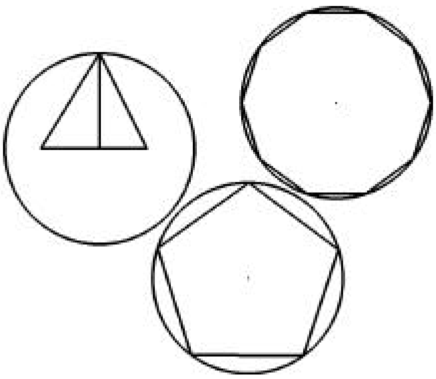
プトレマイオスの著作の多さや、その著作の内容に対して触れた。その中でも、今回の主題である「アルマゲスト」を中心に取り上げた。

③天文における観測の特徴

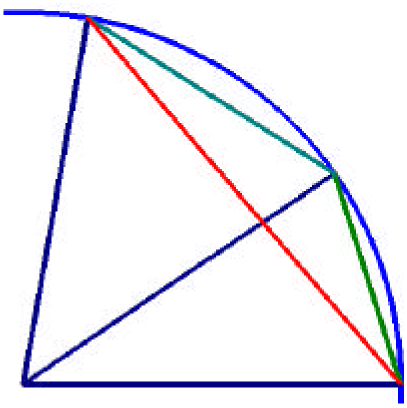
天文においては角度しか測れないということを強調するために、日常で観測できる数値を扱ったものと天文の問題の比較をした。(図ⅱ）天文の問題は後に詳しく扱うため、

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（10）
題名：アルマゲストを原典とした弦の表に関する授業実践-天文学とのかかわりを踏まえて-
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.68-80、2003年3月

【写真ⅱ】カブリを行う生徒



【図ⅲ】円に内接する正五、十角形の作図



【図ⅳ】中心角の和が弦の和と対応しない例

具体的な数値を入れず、問題の○○○に何が入るのかを予想するのみにした。

教師　「この二つの問題の違いって何？」

生徒１「天文の問題には角度が入る。」

教師　「そうだね、天文は長さが測れず、角度しか測れないんだけど、（惑星間の）距離はどう測る？」

生徒２「…」

教師　「最初の頃にやったけど、角度ってうまく何かに対応させられないかな？」

生徒３「弧の長さに対応させる。」

天文において、唯一測ることができる角度を長さに対応させるために、弧の長さと弦の長さを対応させて考える必要があることを示した。

④弧の長さに対応する弦の長さ

弧の長さを弦の長さに対応させるために、円に内接する正多角形を考えることで、いくつかの中心角に対する弦の長さを求めることができる。コンパスと定木しか使えないというギリシャ時代の時代背景にしたがって、円に内接する正五角形、正十角形をカブリを用いて原典にしたがって作図を試みた。

2 時間目

目標：0.5 度ずつの弦の長さを求めるための方法を理解する。また、実際に原典に従って、幾何学的な方法で弦の長さを求めてみる。

①中心角の和、差、倍角、半角に対応する弦の長さ

1 時間目で、長さが分かるようになった弦の長さを使って、他の角度に対する弦の長さも求めようとした。

教師　「前の時間で求めた弦の中心角の倍の中心角に対する弦を求めたいんだけど、弦の長さって 2 倍してあげればいい？つまり 60°に対する弦の長さが分かってれば、120°に対する弦の長さって 2 倍してあげればいいかな？」

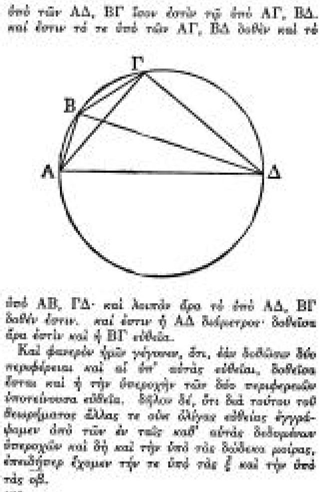
生徒１「駄目。」

教師　「何で駄目？」

生徒１「弦は角度に比例しないから。」

教師　「そうだね。そのことは右図（図ⅳ）を見れば明らかだよね。」

ここでは、中心角の和、差に対する弦の長さが単純に弦の長さの和、差では求められないことを示した。そこで、中心角の和、差に対する弦の長さを求めるために、プトレマイオスの定理を証明し、そこから中心角の差、半角に対

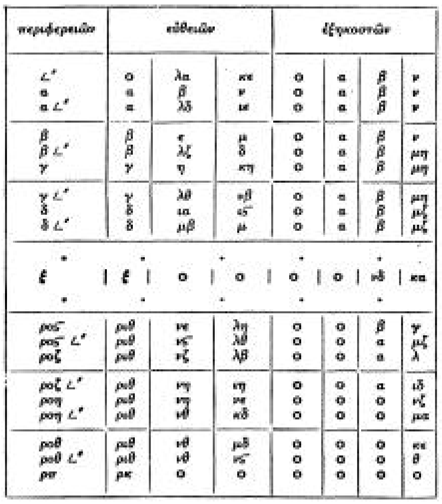

ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ. καί ἐστιν τό τε ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ δοθὲν καὶ τὸ

ὑπὸ ΑΒ, ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΒΓ δοθέν ἐστιν. καί ἐστιν ἡ ΑΔ διάμετρος· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΒΓ εὐθεῖα.

Καὶ φανερὸν ἡμῖν γέγονεν, ὅτι, ἐὰν δοθῶσιν δύο περιφέρειαι καὶ αἱ ὑπ᾽ αὐτὰς εὐθεῖαι, δοθεῖσα ἔσται καὶ ἡ τὴν ὑπεροχὴν τῶν δύο περιφερειῶν ὑποτείνουσα εὐθεῖα. δῆλον δέ, ὅτι διὰ τούτου τοῦ θεωρήματος ἄλλας τε οὐκ ὀλίγας εὐθείας ἐγγράψομεν ἀπὸ τῶν ἐν ταῖς καθ᾽ αὐτὰς δεδομέναις ὑπεροχῶν καὶ δὴ καὶ τὴν ὑπὸ τὰς δώδεκα μοίρας, ἐπειδήπερ ἔχομεν τήν τε ὑπὸ τὰς ξ καὶ τὴν ὑπὸ τὰς οβ.

【原典】
角の差に対する弦の長さの定理の証明

【写真iii】プトレマイオスの定理の証明時の生徒のノートの様子



περιφερειῶν	εὐθειῶν			ἑξηκοστῶν			
∠′	ο	λα	κε	ο	α	β	ν
α	α	β	ν	ο	α	β	ν
α ∠′	α	λδ	ιε	ο	α	β	ν
β	β	ε	μ	ο	α	β	ν
β ∠′	β	λζ	δ	ο	α	β	μη
γ	γ	η	κη	ο	α	β	μη
γ ∠′	γ	λθ	νβ	ο	α	β	μη
δ	δ	ια	ις	ο	α	β	μζ
δ ∠′	δ	μβ	μ	ο	α	β	μζ
ξ	ξ	ο	ο	ο	ο	νδ	κα
ροϛ	ριθ	νε	λη	ο	ο	β	γ
ροϛ ∠′	ριθ	νϛ	λθ	ο	ο	α	μζ
ροζ	ριθ	νζ	λβ	ο	ο	α	λ
ροζ ∠′	ριθ	νη	κη	ο	ο	α	ιδ
ροη	ριθ	νη	νε	ο	ο	ο	νζ
ροη ∠′	ριθ	νθ	κδ	ο	ο	ο	μα
ροθ	ριθ	νθ	μβ	ο	ο	ο	κε
ροθ ∠′	ριθ	νθ	νϛ	ο	ο	ο	θ
ρπ	ρκ	ο	ο	ο	ο	ο	ο

【図ｖ】原典の弦の表

・春分から夏至、夏至から秋分の間隔が、94 と 1/2 日、92 と 1/2 日と違う。
・見かけ上の早さが、早くなったり遅くなったりする。
・見掛けの大きさが大きくなったり小さくなったりする。

【図vi】つじつまが合わない例

する弦を求める方法を証明した。時間の関係で和、倍角に対する弦の長さの求め方はテキストに証明方法、求め方を載せておくのみに終わった。

②実際に弦の長さを求めてみる

上で学んだ証明により、実際に７２°と 60°に対する弦の長さから、１２°に対する弦の長さを求めてみた。数値が複雑なため計算機を用いて計算を行った。

③1／2°の中心角に対する弦の長さ

最後に、1／2°に対する弦の長さが分かれば和の公式により 1／2°ずつの弦の長さが分かるが、その弦の正確な値を求めることはできないのではさみうちによる証明で値を求めたことをテキストに証明を載せ、紹介した。

④天文の問題への応用

当時行われた観測結果から、地球から月までの距離は、月から太陽までの距離の何倍であるかを先ほど学んだ弦の表を使って求めた。これによって自分たちの作った弦の表が天体観測の分析に役に立つことを示した。また当時の観測技術の精度の問題から現代の精度で距離が求まらないことも示した。

⑤弦の表の分析

弦の表には差の１／30 という項目がある。これは、0.5°ずつの表ではまかないきれない部分について対処するために作られた項目である。この意味について説明した。

3 時間目

目標：プトレマイオスの天動説の理論的説明を当時の考えに立って理解し、現代との比較を試みる。そして、当時の考えである等速円運動のみを用いて、惑星の運動の天動説のモデルを考える。

①プトレマイオスの天文に関する考え方

原典の日本語訳を読んで、プトレマイオスがなぜ地球が丸いと思ったのか、地球が宇宙の中心であると思ったのかを解釈した。

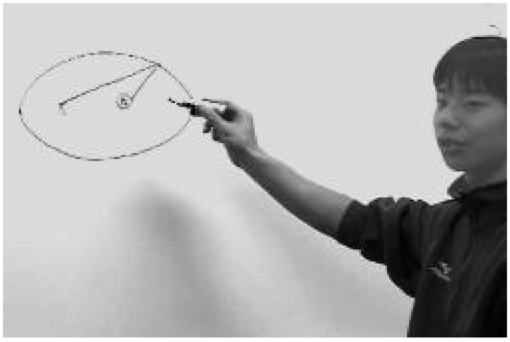
教師「どんなことが書いてあった？」
生徒「地球が球形であること以外はありえないといったことです。」
教師「なんでですか？」
生徒「全ての人が同時に日の出を見ないなどといった理由からです。」
教師「そうだね。」

また、プトレマイオスは背理法を用いて、地球が平面で

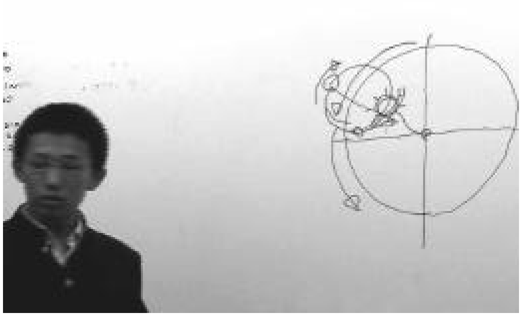
出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（10）
題名：アルマゲストを原典とした弦の表に関する授業実践－天文学とのかかわりを踏まえて－
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.68－80、2003年3月

【写真iv】地動説における太陽の説明について相談する生徒

【写真ｖ】地動説の太陽についての生徒のノート



【写真vi】太陽の動きの地動説による説明をする生徒



【写真vii】周転円を用いて説明する生徒（生徒１）

ある、凹型である、円柱型であるという他の考えを否定していることなども取り上げた。そして、彼の考えを理解しながら、当時の思想の中で特に重要な、重いものほど早く落ちると思われていたなども同時に説明した。そして、今回の核となる考え方である天体の運動は等速円運動か、等速円運動の組み合わせで説明されるという考えを押さえた。

②観測結果の分析について

プトレマイオスは、等速円運動を用いて、太陽の運動の分析を試みた。歳差運動（地球は公転、自転とさらにコマのように回る運動をしている）などの、厳密な話になると授業の方向が変わってしまうので、それらは無視することとした。そして、天動説において多くの人が考えていると思われる、太陽は単に地球の周りを等速円運動しているといった考えから始まり、その考え方とはつじつまが合わないような考え方を示した（図vi）。生徒にとってはじめから天動説に関して考えていくことは難解であると思い、この条件を満たすような天動説のモデルを考える前に、地動説を使って考えることからはじめた。ある程度考えた後、前に出て説明してもらった。（写真vi）

生徒「地球の公転軌道は楕円形をしていて、太陽はその楕円のどちらかの焦点に合って、地球がこっち側にあるときとこっち側にあるときは大きさが違います。」

教師「他の早くなったりとか、日にちの間隔が違うとかといったことは？」

生徒「…」

教師「さっき（考えているとき）面積とか言ってたけど。」

生徒「確か、惑星が一定時間に運動する面積が等しいので、速度が変わると思います。」

教師「なるほど。何か質問はないかな？」

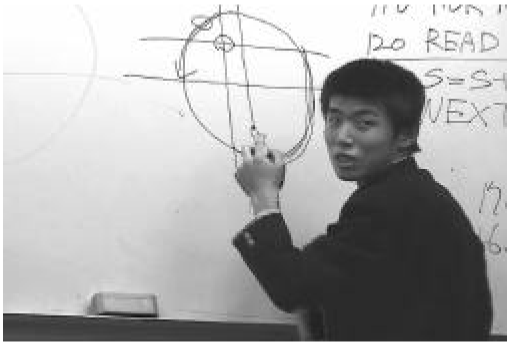
生徒「…」

教師「さっき焦点って言ったけど、１ 年生理解したかな？焦点って何？」

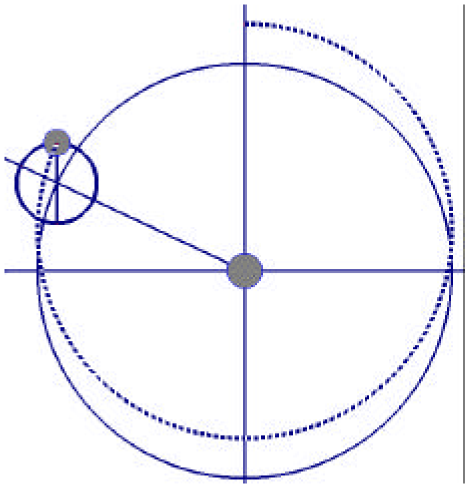
生徒「楕円上の点をとったときに、その点からの距離の和が一定になるような点です。」

教師「そうだね。ありがとう。」

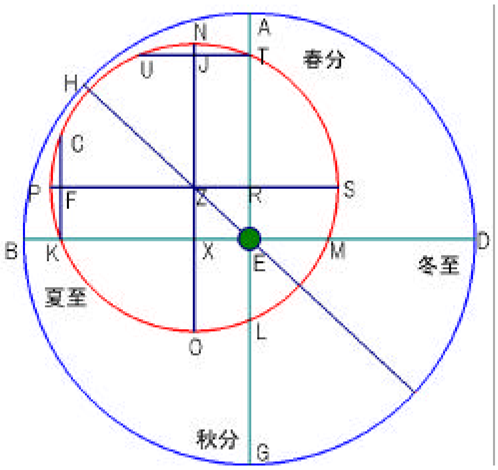
次に、等速円運動のみを用いて、地球を中心に図viの観測結果をもとにモデル化してみた。課題が難解なため、生徒も考えにくそうだったが、考えが思いついていた生徒に前で発表してもらった。（写真vii、viii）



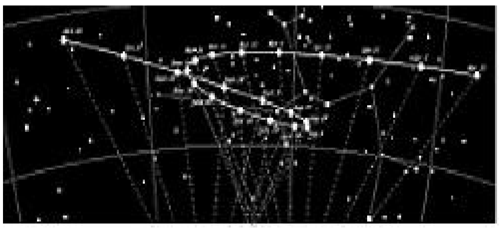
【写真viii】離心円を用いて説明する生徒（生徒３）



【図vii】周転円が離心円と同じ軌跡をとること



【図viii】太陽のモデルの数値決定



【図viii】火星の逆行運動について

生徒１「太陽は地球を中心とした円上に中心を持つ円軌道上を運動をしていて、ここにいるときは地球に近く、ここにいるときは地球から遠いです。また、ここにいるときは早さが重なって早くなり、ここは相殺されて遅くなる。」

教師　「何か質問はないかな？」

生徒２「太陽の重さの中心は？」

教師　「それは思想に関わるから答えるけど、太陽など地球以外には重さがありませんでした。」

生徒２「なるほど。」

教師　「ほかに何か質問はないかな？じゃあ、ありがとう。ほかにいい意見が思いついたっていう人は。」

生徒３「弧の長さが同じではなくて…。つまり、地球は太陽の円運動の中心ではなく、このようにずれている。すると、こっちとこっちでは速さも大きさも違う。」

教師　「ありがとう。」

ここで、生徒１は地球を中心とした円上をもう一つの円が回る周転円の考えであり、生徒３は円の中心が地球とはずれた離心円の考えである。そして、プトレマイオスの考えの太陽の場合においては、二人の考えが実は同じである。生徒１の太陽の軌跡をとってみると生徒３と同じ軌跡をとることになる。周転円の軌跡は、離心円の軌跡になることをカブリを用いて示した。（図viii）

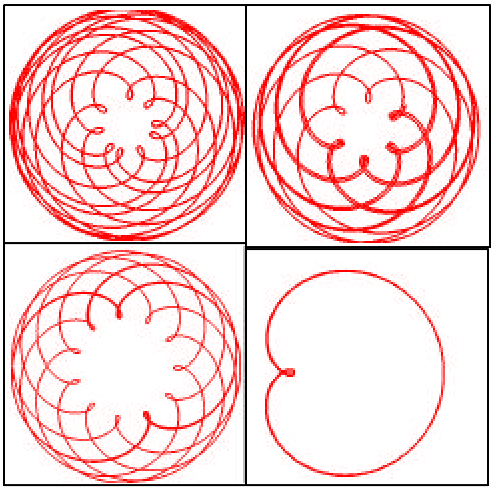
③モデルの数値決定

次に、太陽の運動の中心がどのくらい地球から離れているかを原典に沿って数値を求めた。生徒がたてたモデルで、図viの観測結果を用いて数値を算出した。1 年は 365,25 日と考えられていたので、春分から夏至の 94 と 1/2 日と、夏至から秋分の 92 と 1/2 日を、太陽の軌跡の弧の長さと対応づけるために、94.5×（360÷365.25)、92.5×（360÷365.25）と数値を変えて、弧の長さに対応させた。数値算出のために、１, ２時間目で学習した弦の表を使って数値を算出し、弦の表が惑星の分析のために重要であることを強調した。

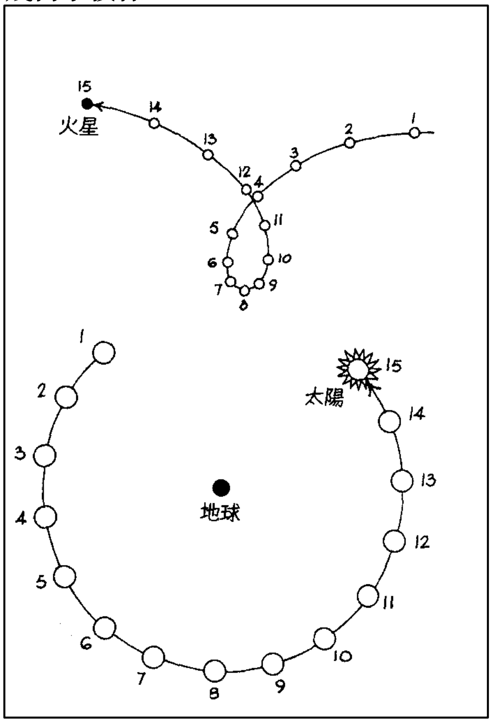
④火星の運動について

火星はケプラーによって地動説が確信されるきっかけとなった惑星であり、外惑星の例として用いた。火星の運動についての原典を、生徒が解釈し、理解することは困難であると思い、授業では細かい数値までは踏み込まずに、現象を説明できるようなモデルを立てたものを紹介した。火星の運動の特徴として、逆行運動（図ix）というのがある。

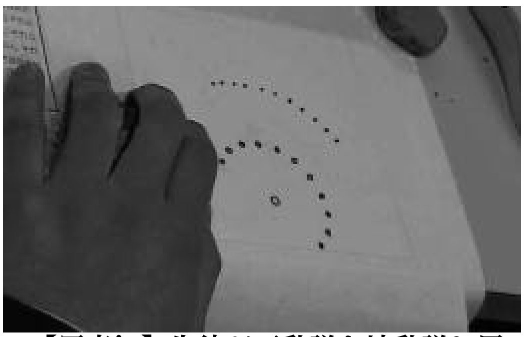
出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（10）
題名：アルマゲストを原典とした弦の表に関する授業実践-天文学とのかかわりを踏まえて-
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.68-80、2003年3月



【図ix】カージオイドによって描ける幾何学模様



【図ｘ】天動説を地動説に対応付けるための図（プロジェクト物理ｐ７８より抜粋）



【写真ix】生徒が天動説を地動説と置き換えた図

プトレマイオスはこの火星の運動を説明するために、周転円を用いた。生徒には、プトレマイオスが考えた説明を、カブリファイルで見てもらった。その火星の軌跡を取ることで、カージオイドがあらわれ、これによって火星の運動は説明できることを示した。また、この周転円の半径を変えていくと、様々な幾何学模様が描けることも確認した。

⑤まとめ

プトレマイオスの惑星に関する理論のよさをまとめた。それは、ｉ天体の動きをかなり正確に予想できたことⅱギリシャ初期の思想にあっていたことなどがあげられる。また、問題点として、惑星の距離が問題に出来なかったことも示した。そして、生徒に彼の理論について感想を聞いてみた。

生徒１「今までは間違っていてどうでもいいやって思ってたけど、きちんと説明されていて、なるほどと思いました。しかし、間違った理論だと思います。」

生徒２「当時の考え方とかを踏まえて当時では完璧な説明をして、1500 年も続いたのは凄いことだと思います。理論も一応合っていると思います。」

生徒３「今までは、宗教のみのめちゃくちゃな考えだと思っていたけど、こう見るといかに体系化されてしっかりしたものかと思いました。理論は正しいと思います。」

最後にこの天動説の考え方がどのように地動説に変わっていったのかを生徒が体験できるようにした。コペルニクスの紹介をして、天動説の理論から与えられる軌跡の図（図ｘ）を使って、地動説への変換が可能なことを体験してもらおうと考えた。まず、真っ白な紙を用意し、中心に太陽を置く。紙の中心の太陽を図ｘの１の太陽に置き、その位置で、地球と、太陽と同じ番号の火星をなぞる。これを２，３と繰り返していく。すると、この図が太陽中心の図に変わることで、天動説が地動説に変わることを体験した。これにより、天動説がいかに正しい説明をしていたのかを感じ取れることを期待した。

教師「どんな図形が出てきた？」

生徒「太陽の周りを地球と火星が円運動をしている様子。」

プトレマイオスは、当時の思想から地球中心と等速円運動しか使えなかったけれども少し視点を変えてみると、地動説の考えと同じモデルが浮かび上がってくることを示し、授業を終了した。

5. 考察

事前事後のアンケートから、課題１，２，３について考察していく。

課題１：天体観測の結果から惑星の軌道などを決定するような、自然現象を分析するために数学を用いる活動を通して、数学の重要性、必要性を感じ取ることが出来るか。

「自然界の現象を数学的に解明していくような授業について、どう思いますか？」についての感想について、生徒の感想をそのまま抜粋

・非常に興味を持ちました。現象が式になっていくさまが面白かったです。特に今回はコンピュータを使いましたが、複雑な幾何についてそれらが式になる様子を今後調べるなどしてもっと知りたい。

・自然界を理解する上での数学の大事さを改めて知りました。

・数学は、問題を解くだけの学問だと感じてる人も多いはずなので、数学の様々な分野への応用の仕方、また、数学のおかげで、どのように分野が発達していったか等を知ることができ、数学を知る上でよいと思います。

・楽しい。習ったことがすぐ実世界に応用できる。

・いままでなんとなく分かっていたようなことや、不思議に思っていたことがはっきりと分かって新しい発見もあり、とても面白かった。数学と天文学という２つの分野のつながりが見えてきた。

上のような結果は、3 時間目の、具体的な観測から天動説のモデルの数値を決定していく授業での、数学がいかに有効に働くかを学んだことでの感想であると思われる。１，２時間目で学んだ数学の内容がきちんと現象理解に使われていることを知ることによって、生徒は数学の重要性を感じ取ったようである。また、感想から生徒は数学に意欲的に取り組むことができ、そこに楽しさを見出しているので、自然という身近な問題を扱うことは動機づけにもなったと読み取れる。よって、課題１は達成されたといえる。

課題２：アルマゲストを題材とした天文学を授業教材に用いることによって、自然と数学とのかかりを見出すことができるか考察する。

「以下は自然界と数学のかかわりについてどう思いますか？」についての生徒の感想をそのまま抜粋したものである。

・自然界の運動は、ほとんどが数学的に説明されるので、それらは密接に関係している。

・自然界にはまだまだよく分からないことがたくさんある。数学はそれらをひも解く鍵となることだろう。

・数学は自然界を基盤としたものであり、逆に自然界における現象は数学的に説明されるものが多い。よって、自然界と数学の結びつきは非常に強いものだと思います。

・数学は便利な道具として扱われると思う。

・数学は自然界を調べるためのメスのようなもの。

・数学は自然界を解き明かしていく道具の一つで、対象があるメカニズムを持っていれば、ある視点から見たそのメカニズムを表現することができると思う。

以上の感想から、生徒は自然界を理解するために数学が有効に働くと感じていることが伺える。今回の授業において自然界の現象を数学の世界に移して考えることによって、惑星のモデルを決定するといった目的が見事に達成されたことを学び、様々な

分野で数学が有功に働くのではないかと生徒が感じ取っていると読み取れる。また、生徒の感想から、自然界のなぞを解くために数学が有効に働くとしており、他分野と数学との関連を生徒が感じ取れたのではないかと考えられる。

以上の結果から、課題２は達成されたといえる。しかし、数学と他分野を関連させて教材を開発することは、重きをどのように置くかによって生徒が感じるところも変わってくるので、バランスをうまくとり、数学と他分野ともに活きるような教材の開発を入念に行っていく必要がある。

課題３：数学史を用いた学習によって、数学と人間のかかわりを通して、数学のよさを感じ取ることができるか。

「授業の感想を何でもいいので書いてください」についての生徒の感想をそのまま抜粋

- 先人の苦労を部分的に体感して、数学の成り立ちのようなものを知ることができてよかった。
- その当時の人が、どのような段階を踏んで、どのように考えて、そのような結論に至ったか、自分たちもそれを追って推測し,計算しとやっていくと、自然界の現象を示すことの大変さや当時の人の発想の素晴らしさがわかった。
- 先人たちが自分たちの使える道具のみを用いて高度な自然界の現象を解明しようとる試みの一端をかいまみることができ、とても面白かった。
- いまから 2000 年も前に図形の問題として星の角度などをまとめようと考え始めたプトレマイオスの頭脳もすごいと思った。やはり、昔の人は偉かった。(笑)

以上の結果から、生徒は今の数学が、人々によって作りあげられてきたものであることを感じ取っていることが読み取れる。数学史を用いて、プトレマイオスの考えを追体験することによって、自分たちが学んでいる数学が作られていくさまを体験することができたようである。また、授業後に、「先人たちの苦労で、いまの自分たちの数学が成り立っているんだな」と述べる生徒がいた。生徒は、数学が人の営みとして積み上げられてきたということを感じ取ったようである。そして、生徒の「素晴らしさが分かった」、「すごいと思った」などといった感想から、数学に興味・関心を持ち、数学によさを感じ取っているのではないかと考えられる。

齋藤(2002, pp271)は、「学生は数学史の授業を通じて、数学は他分野、日常生活において土台となる教科であることを認識することができた。」と述べており、今回の研究においても同様の結果が得られたが、齋藤の研究は生徒にある程度の物理の能力が要求されたのに対して、今回の研究は、生徒の予備知識がそれほど必要ない点において扱いやすい教材といえる。また、はじめに天動説に関しての生徒の意見からよい印象を持っているような意見が聞かれなかったが、プトレマイオスの考えを追体験した事後のアンケートでは、好印象をもっていることからも、課題３は達成されたといえる。

6、おわりに

本研究では、数学を自然界と関連させることにより、その重要性、よさを改めて認識することを目的として授業を行った。その結果、生徒がそれらのことを感じとったということは、議論から明らかである。しかし、天文の内容が生徒にとって印象が大きかったようで、そのことは感想の多くが天動説と地動説の関係についてであったこ

とからもうかがえる。また、生徒の感想に「sin、cos についても少し触れてほしかったです。」とあった。今回は、弦の表が三角比と結びついていることを発見することは生徒の楽しみであると思い、その結びつきには触れなかったが、その結びつきに興味を持った生徒がいるので、三角比についての内容をもう少し出した教材も開発していきたい。内容のバランスについて更なる考察が必要である。

謝辞

研究授業に実施に際して、浦和高校の鈴木雅道先生、宇田昌司先生、韮塚哲夫先生、中村英夫先生をはじめ、数学科の先生方に貴重なご意見・ご協力をいただき、また浦和高校の諸先生方にもご協力いただきました。そして、筑波大学へ内地留学している川越高校の田端毅先生にも、段取りなどご協力いただきました。厚く御礼申し上げます。

本研究は平成 14 年度科学研究費「数学の分化的視野の覚醒と新文化創出のための教材指導法開発研究」（基盤研究 B、研究代表者礒田正美 No.14380055）の一環として行われた。

引用文献・参考文献

【1】 プトレマイオス(1982).*アルマゲスト*.藪内清訳.東京.恒星社厚生閣

【2】 礒田正美(2001).*異文化*体系から見つけた数学の文化的したの覚醒に関する一考察 - 隠れた分化としての数学間の意識と変容を求めて - .筑波数学教育研究.筑波大学数学教育研究室.第 20 号.pp.39-48

【3】 礒田正美(2002).*解釈学から見た数学的活動論の展開 - 人間の営みを構想する数学教育学へのパースペクティブ* - .筑波数学教育研究.筑波大学数学教育研究室.第 21 号,pp.1-10

【4】 齋藤康則(2002).*他教科との関連を踏まえた数学史の授業実践 - Brachistochrone Problem を題材に* - .教育評価の転換と歴史文化志向の数学教育 - ADDING IT UP: HELPING CHILDREN LEARN MATHMATICS - 中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（９）.筑波大学数学教育研究室. pp.262-275

【5】 Grugnetti, L., &Rogers, L. (2000). *Philosophical, multicultural, and interdisciplinary issues*. In Joan, F., &Jan, V. M (ed), *History in mathematics education*(pp. 39-62)

【6】 三輪辰郎(1983）.*数学教育におけるモデル化についての一考察*.筑波数学教育研究 2, pp117-125

上記以外の参考文献

【7】T.L.ヒース(1959-1960).*ギリシャ数学史*.東京:共立出版

【8】田村･松平責任編集(1972).*ギリシャの科学*.東京:中央公論社

【9】ユークリッド(1977).*ユークリッド原論*.中村幸四郎訳.東京:共立出版

【10】A.アボー(1971).*古代の数学*.中村幸四郎訳.東京:河出書房新社

【11】渡邊正雄ほか監修(1978).*プロジェクト物理２ - 天体の運動* - .東京:コロナ社

【12】日下実男(1980).*宇宙観史：人類と宇宙の 5000 年*.東京:東海大学出版会

【13】国立教育研究所(1991).*数学教育の国際比較:第 2 回国際数学教育調査最終報告*.東京:第一法規出版

【14】国立教育研究所(1997).*中学校の数学教育･理科教育の国際比較－第 3 回国際数学･理科教育調査報*

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（10）
題名：アルマゲストを原典とした弦の表に関する授業実践－天文学とのかかわりを踏まえて－
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.68－80、2003年3月

告書－.東京:東洋館出版社
【15】地学団体研究会編(1979).*新地学教育講座:12*.東京:東海大学出版会
【16】F.フント(1982).*思想としての物理学の歩み（上）*.井上健.山崎和夫訳.京都:吉岡書店