出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.215-225、2002年3月

「ロルの定理」を利用した授業による生徒の数学観の変容に関する実践例
～「数学基礎」を見据えた数学史を活用した授業～

筑波大学大学院修士課程教育研究科
小澤　真尚

1．　はじめに
2．　目的と方法
　（1）目的
　（2）方法
3．　授業概要
　（1）教材開発
　（2）授業環境
　（3）授業展開
4．　結果と考察
5．　おわりに

要約

2003 年度から高等学校数学科で「数学基礎」が新しく実施されるが、その内容の一つとして「数学と人間の活動」、具体的には数学史を扱うことが提案されている。そこで、本研究では、その実践例の一つとして「ロルの定理」を扱った授業を行い、生徒にどのような数学観の変容が見られるかについて調査した。その結果、数学史を扱った授業によって、生徒は数学の発展が人間の活動と深くかかわっていることを認識したことが示された。

1．はじめに

2003 年度から高等学校数学科で「数学基礎」が新しく実施されるが、「高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編」（文部省,1999）[1] によると、「数学基礎」の目標は、次のように示されている。

『数学と人間とのかかわりや、社会生活において数学が果たしている役割について理解させ、数学に対する興味・関心を高めるとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し数学を活用する態度を育てる。』

その内容の一つとして「数学と人間の活動」、具体的には数学史を扱うことが提案されている。しかし、一口に数学史といってもそれが歴史である以上、扱うことが可能な内容は数学者の数以上に多岐にわたっている。どのような内容をどのような教材として生徒に提示し授業を行うのが適しているのかという実践例は教育の現場ですぐに役立てるためにも非常に重要であり必要である。先行研究として「世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育―代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開―」（保坂・松本他,2001,pp99－244）[2] には様々な数

学者にスポットを当てた数学史を扱った授業を行うことで生徒に数学観の変容が見られたという多くの実践例が挙げられている。そこで本研究では、それらのような実践例の一つとして、まだ扱われていないであろう数学者ミシェール・ロル（Michel Rolle,1652‐1719）にスポットを当てて、「ロルの定理」の一次文献を扱った筆者によるオリジナルの教材を使用した授業を行い、生徒にどのような数学観の変容が見られたかについて調査した。

2．目的と方法

（1）目的

「学習指導要領」に沿って、以下の課題を設定し、数学史として「ロルの定理」を扱った授業を行うことで課題を達成できるかどうかを本研究の目的とする。

課題：数量や図形についての概念等が人間の活動にかかわって発展してきたことを理解し、数学に対する興味・関心を高める。

（2）方法

一次文献を利用したオリジナルの教材を作り、授業を行う。授業前と授業後のアンケート、及び授業後の感想から生徒の反応を見て、生徒の数学観の変容を調査する。

3．授業概要

（1）教材開発

本研究では、できるだけ訳者の解釈を入れないようにするために筆者が「ロルの定理」を扱ったオリジナルの教材を開発し、それを授業で使用した。原典としてロルの著作「Traite dalgebra」を扱いたかったが、手に入れることができなかったため、それをまとめた「A source book in mathematics」(David Eugene Smith,1929)[3]のなかの「ROLLE'S THEOREM」（pp253－260）を利用した。これは、礒田（2001,pp223－226）[4]による解釈学的営みを重要視するためである。また、授業時の参考文献として「Ways of thought of great mathematicians」(Herbert Meschkowski,1964,pp57－59)[5]と「数学の歴史４」(ボイヤー,1984,pp64－66)[6]及び「Notable mathematicians」(Robyn V. Young,1998,pp423－424)[7]を利用した。

数学の歴史において 17 世紀から 18 世紀にかけて“微分”や“無限

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.215-225、2002年3月

小”という考え方が出現した。「ロルの定理」自体が世間に知られるようになったのは 1910 年とまだ最近のことであるが、「ロルの定理」は今では解析学の多くの本に載っているほど微分の重要な定理として挙げられ、今日の数学に与えた影響は非常に大きい。しかし面白いことに「Ways of thought of great mathematicians」の中のヴァリニョンからライプニッツへの手紙によるとロルが最初は“微分”や“無限小”という考え方に批判的だったことがわかる。では、いったい何をきっかけにして批判的な立場であったロルが自分の名前が付くような非常に重要な微分の定理を発見することになったのだろうか。生徒たちが、このことについて自分なりに考え、発言し、他の生徒と意見を交換することで、ロルの心情が変化していくその人間臭さや、数学の定理が誕生するまでの背景等を感じ取ることができれば、本研究の課題が達成できるはずである。

（２）授業環境

Ⅰ．日時：平成 13 年 12 月６日、７日（計 50 分×２回）

Ⅱ．対象：筑波大学附属高等学校　第２学年（18 名）
整関数の微分に関して未習であったが、授業のはじめと１時間目終了後の課題により補った。

Ⅲ．準備：コンピュータ（Windows）、ビデオプロジェクター、Microsoft Power Point、事前アンケート、事後アンケート、課題（１時間目終了後）、授業資料

（３）授業展開

《一時間目》

①微分の指導

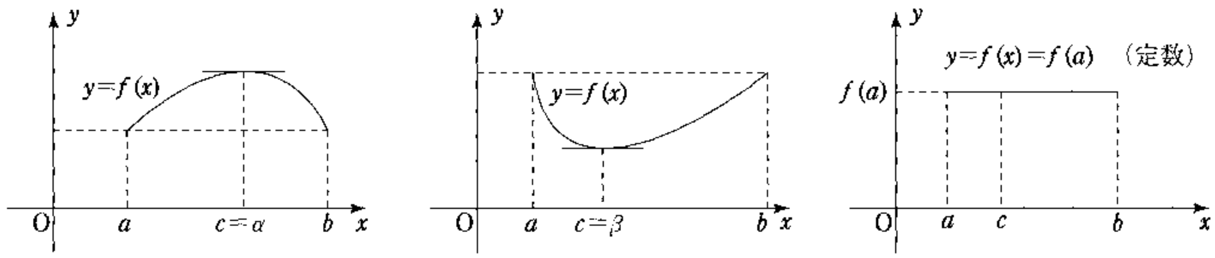
18 名中２名ほど整関数の微分について既知の生徒もいたが残りの生徒は聞いたことがあるだけか、あるいは全く知らない生徒であった。そのため、まず始めに準備として整関数の微分について学習させた。今回の授業では高等学校における微分の厳密な定義について知っている必要はなく、また与えられた時間が２時間という制約付きであったために、接線の傾きを「導関数」といい、「導関数」を求めることを「微分する」と教え、ここでは整関数の微分の計算方法についてのみ指導した。

＜授業風景＞

②「ロルの定理」の紹介

①を踏まえて「ロルの定理」(下図参照)について説明し解説した。「ロルの定理」とは「関数 $f(x)$が閉区間［a, b］で連続、開区間（a, b）で微分可能であり、$f(a)=f(b)$ならば$f'(c)=0$（$a<c<b$）をみたすcが存在する。」というものである。

ここでは特に「ロルの定理」で“微分”が使われていることを意識させるようにして解説をした。実際、中にはすぐに「微分が使われている！」と気がついた生徒もいた。



(1)　(2)　(3)

③ヴァリニョンからライプニッツへの手紙の紹介

②で「ロルの定理」に微分が使われていることを生徒に意識させたところで、すかさず「Ways of thought of great mathematicians」の中にあるヴァリニョンからライプニッツへの手紙を紹介する。この手紙の中には以下のような記述がある。

Varignon to Leibniz

Paris, November 28, 1701

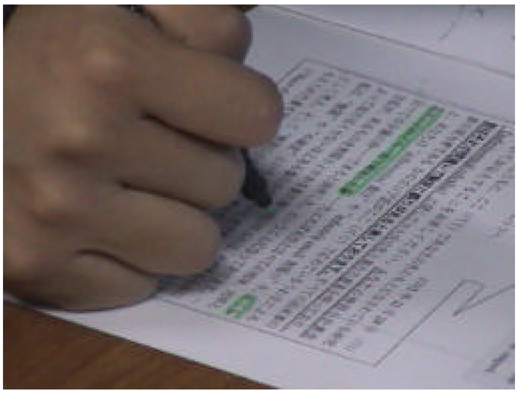
Permit me to assure you of my deepest respect and at the same time to inform you of a work which is being circulated here under your name. <u>It concerns the disagreement between Mr. Rolle and myself, of which you know, regarding your infinitesimal calculus, which he terms false and to which he attributes errors in reasoning</u>. The Abbé Galloys, who is really behind the whole thing, is spreading the report

『あなたの無限小計算法（infinitesimal calculus）に関してロル氏は私と異なる意見を持っており、彼はそれが間違いで論証に誤りがあると称しております。』（下線部日本語訳）

ここでは、ロルがはじめ微分に対して批判的であったことについて生徒に気づかせることを意識した。なぜ、微分に批判的であったロルが微分を使った「ロルの定理」を発見することになったのか。生徒一人一人に自分がロルになった気持ちで、どのようなことがあれば立場を変える

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.215-225、2002年3月

ようなことになるだろうかと考えさせた。そして生徒同士で意見、考えを議論、討論させた。



④当時の時代背景とロルの紹介

当時の時代背景として、新しい考えであった微積分に反対の人々のほとんどが，古代の総合幾何学を賛美していた。両者の対立は，その時代における“古代人対現代人”の対決の一つを思わせるものであった。当時、ロルは幾何学者であったために微分を批判していた。これらを示した。

＜手紙を読む＞

⑤再びヴァリニョンからライプニッツへの手紙を読む

ロルはなぜ微分否定派から微分肯定派へ移っていったのか。当時の時代背景も考慮させて、再び生徒に考えさせ、議論、討論させた。

⑥“cascade の方法”の紹介

では、そもそも「ロルの定理」はどこから生まれてきたのか。ここで「ロルの定理」の元になった考え方が含まれている“cascade の方法”について示した。しかし、次の時間へつなげるために、ここでは名前だけを示した。

⑦課題（宿題）の配布

最後に、整関数の微分を習得するための計算問題と「ロルの定理」を確認するための課題を出して一時間目を終了した。特に「ロルの定理」で重要なところは「$f(a)=f(b)$ならば$f'(c)=0$（$a<c<b$）をみたすcが存在する。」という部分で、これは条件を強くすると「$f(a)=f(b)=0$ならば$f'(c)=0$（$a<c<b$）をみたすcが存在する。」と考えることができる。すなわち$f'(x)=0$を満たす点cが$f(x)=0$を満たす点aとbの間にあるということである。これは“cascade の方法”と大きく関係している。

《二時間目》

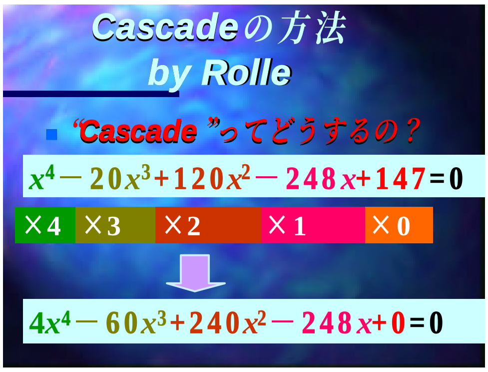
⑧一時間目の復習及び課題の確認

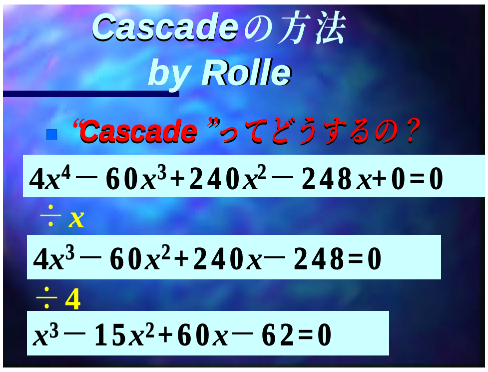
「ロルの定理」で微分が使われていたこと、そして当時、ロルは微分に対して批判的であったことを復習し、微分の計算問題と「ロルの定理」の課題に関して確認をした。

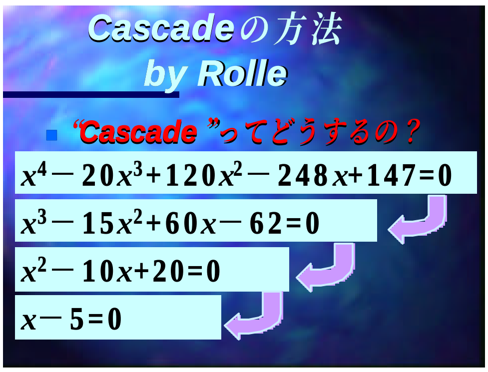

＜復習及び課題の確認＞

⑨「ROLLE'S THEOREM」を読む

“cascade の方法”が載っているのはロルの著作「Traite d'algebra」であるが、手に入れることができなかったため、ここではそれをまとめた「A source book in mathematics」のなかの「ROLLE'S THEOREM」を読んだ。“cascade の方法”とは、方程式の解を近似するための方法である。方程式 $f(x)=a+bx+cx^2+\cdots=0$ で $f(x)$ の低い次数から数列0、1、2、3、…をかけて（これはロルが好んで使った数列であるが）$bx+2cx^2+\cdots=0$ を得る。これを x でわり、商を0と等しくした $b+2cx+\cdots=0$ を最初もしくは直前の“cascade”という。







例）$x^4-20x^3+120x^2-248x+147=0$

⇒$4x^4-60x^3+240x^2-248x=0$（それぞれの項に定数項から 0、1、2、3、…をかける）

⇒$4x^3-60x^2+240x-248=0$（x でわる）

→これを“cascade”という。

⇒$x^3-15x^2+60x-62=0$（両辺を4でわって整理する）

以下これを繰り返す。

$x^3-15x^2+60x-62=0$

→$x^2-10x+20=0$

→$x-5=0$

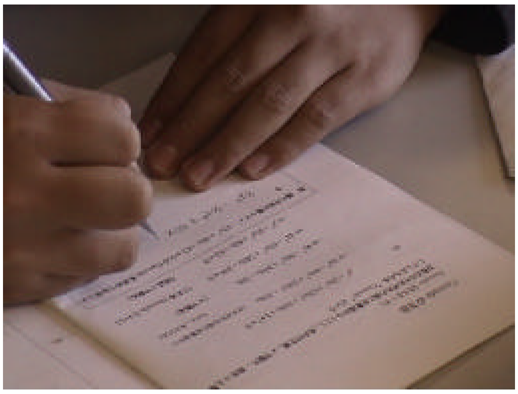
こうして次数を下げていく。

また“上限・下限”というものが定義されている。方程式の解を近似するために、その上限と下限を定めるためのものである。“上限”とは、

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.215-225、2002年3月

方程式の絶対値が最も大きい負の係数をとり、未知数の最も高い冪の係数でわり、その商に１を加えた数である（根拠は定かではないがロルは独自にこれを考え使用していた。）。“下限”とは、ロルは正の解に限定して求めようとしたため、必ず０である。

例）$3x^2-30x+60=0$ の係数のうち絶対値の最も大きいものは-30。この絶対値 30 を最も高い冪の係数３で割った 10 に１を加えたもの 11 が上限である。よってこの方程式の上限は 11、下限は０である。

＜“cascade の方法”にチャレンジ!!＞

さらに、“limits”という定義がある。“limits”とは２数ａ、ｂが $f(x)$ の x に代入され、$f(a)$ と $f(b)$ が異符号であるとき、ａとｂの間に $f(x)=0$ の解がある。その時のａとｂのことである。

例）$2x-10=0$ の解は $x=5$

$f(x)=x^2-10x+20=0$ の上限は 11、下限は０であるから

$f(11)=31>0$、$f(5)=-55<0$、$f(0)=20>0$

$x^2-10x+20=0$ の解は０と５の間と５と 11 の間にある。

この時０、５、11 を $x^2-10x+20=0$ の“limits”という。

同様にすると $x^3-15x^2+60x-62=0$ の limits は０、３、７、63。

$x^4-20x^3+120x^2-248x+147=0$ の limits は０、２、４、９、249。

こうして limits を考慮して $f(x)=0$ の根（近似根を含む）と上限、下限を書き出してみると次図のようになる。（注：根を近似して整数で図示しているものもあるので同値なように見えるが厳密には次図のような位置関係になる。）

ここで“cascade の方法”を実際に行ってみた生徒の中から「これって微分してるのと同じじゃない？」と「ロルの定理」との関連性について気がついたと思われる発言があった。

$f(x)=x^4-20x^3+120x^2-248x+147=0$

0　1　2　5　11

$f(x)=x^3-15x^2+60x-62=0$

0　2　4　9　249

$f(x)=x^2-10x+20=0$

0　3　7　63

$f(x)=x-5=0$

0　5　11

⑩再び「ロルの定理」へ戻る

「ロルの定理」で重要なところは $f'(x)=0$ を満たす点 c が $f(x)=0$ を満たす点 a と b の間にあるということであった。上図を見れば、これはまさしく“cascade の方法”である。

つまり、この授業でのポイントは以下である。

（ｉ）ロルはあくまで代数方程式の解を近似するために超技巧的な手法を用いた。そしてその方法は純代数的。しかも当時、微分（無限小的手法）に対して批判的だった。

＜互いの考えを話し合う＞

（ii）それにもかかわらず、その手法は当時の微分の考え方よりもはるかに今日の考え方に通じるものであり、しかも今日では微分の世界で非常に重要な性質を含んでいた。

以上のことから生徒は“cascade の方法”を考え出したロルが後に微分を認めるようになったことをそれぞれに納得することができた。

4．結果と考察

以下は授業後の生徒の感想である。

①今まで知らなかった事なので、普段の授業よりもおもしろかったです。

②ふつうの授業よりもおもしろかった。数学の歴史にふれることができ

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.215-225、2002年3月

て、ちょっと興味をもった。ロルは、最初、微分に反対していたのですね。「定理」をつくりあげる人の苦労がよくわかった。

③凄く面白かった。ロルをめぐる物語自体もとても楽しかったです。ますます数学が面白いと思った。

④昔の数学の見方がかわった。昔からこんなことを考えていたのだと思うとすごいと思う。

⑤昔からこのような事がおこなわれていたとは驚いた。

⑥ロルみたいに考えが変わる数学者もいることに驚きました。もう何百年も前に定められた定理が今も使えるっていうのが不思議です。

⑦数学の中でも、ある定理について、反対派とかがあるのにおどろきました。数学の考え方で、あってる間違っているということがあるんだなーと不思議です。

本授業での目的は、まだ先行研究では扱われていないであろう「ロルの定理」を元にオリジナルの数学史教材を作り、それを使った授業によって生徒に数量や図形についての概念等が人間の活動にかかわって発展してきたことを理解させ、数学に対する興味・関心を高めさせることであった。その際、ロルの人間臭さや心情の変化、さらには定理の誕生などについて自分たちなりに考え追体験してほしかった。

授業前のアンケートからは数学と人間とのかかわりに関する記述はまったく見られなかったのに対して、上記の感想から授業後には生徒全体のうちの約半数が今回の授業によって「今まで知らなかったことを知ることができて面白かった。」「数学の歴史にふれることができて楽しかった。」「昔からこのようなことがあったことに驚いた、不思議だ。」と数学と人間とのかかわりについて意識して、それぞれに意見、感想を持ったのがわかる。よって、「ロルの定理」を利用したオリジナルの数学史教材による授業は、生徒の数学観の変容に影響があったといえる。つまり、本研究での目的は達成できたといえる。

5．おわりに

本研究の目的は、「数学基礎」を見据えた数学史を扱った授業の実践例の一つとして「ロルの定理」を題材にしたオリジナルの数学史教材で生徒に数学観の変容が見られるかどうかを調査するというものであった。授業後の感想を見ると、普段の授業では学ぶことができない内容に多くの生徒が驚き、感動したのがわかる。よって、「ロルの定理」を利用した授業が生徒の数学観の変容を促すことは示され

た。

しかし一方では、まだ学習前の内容であったためか、「微分は難しい」という微分そのものに対する感想も少なくなかった。今回は微分未習の生徒を対象に授業を行ったため、得られたデータは決して十分に満足できるものではなかった。おそらく微分既習の生徒を対象にして授業を行うことで、よりよい変容が見られるだろう。

謝辞）　研究授業に際して，国立筑波大学附属高等学校の川崎宣昭先生，利根川誠先生をはじめ，多くの方々から貴重なご意見，ご指導をいただきました。深く御礼申し上げます。

註１）　本研究は、筑波大学学内プロジェクト研究（助成研究Ｂ：研究代表者礒田正美）「インターネット上の数学博物館の開発・評価研究」の一貫として行われた。

註２）　授業の詳細、並びに資料は次に掲示している。
http://www.mathedu-jp.org

引用・参考文献

【１】文部省（1999）．「高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編」

【２】保坂高志・松本晃一他（2001）．「世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育―代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開―」中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（８），筑波大学数学教育学研究室．pp99－244

【３】David Eugene Smith（1929）．「A source book in mathematics」Dover Publications．pp253－260

【４】礒田正美（2001）．「数学的活動論、その解釈学的展開　人間の営みを構想する数学教育学へのパースペクティブ」第 34 回数学教育論文発表会論文集，日本数学教育学会．pp223－228

【５】Herbert Meschkowski（1964）．「Ways of thought of great mathematicians」Holden-Day．pp57－59

【６】ボイヤー（1984）．「数学の歴史４」朝倉書店．pp64－66

【７】Robyn V. Young（1998）．「Notable mathematicians」Gale．pp423－424

【８】礒田正美（2001）．「文化的営みとしての数学教育―その方法としての数学史上の一

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.215-225、2002年3月

次文献の利用―」中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（８），筑波大学数学教育学研究室．pp95－98

【９】礒田正美(2001).「異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒に関する一考察　―隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて―」筑波数学教育研究　第 20 号.

【10】基礎数学研究会（1998).「基礎微分積分学」東海大学出版会．pp65－68