出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.165-177、2002年3月

フェルマの軌跡論を用いた授業に関する一考察
―原典解釈による生徒の数学観の変容について―

筑波大学大学院修士課程教育研究科
辻山　洋介

要約

本研究は、生徒の数学観の変容を促すことを目的に、数学史上の原典を解釈する活動を中心とした教材を開発し、その効果を検証するものである。教材化に際し、フェルマの「平面及び立体の軌跡論入門」をその時代の状況を合わせて解釈し、方程式を図形に表現するフェルマの考え方を体験することが、現代の数学の新たな価値付けをする機会を与えるかどうかに着目した。アンケート等の結果から、生徒の数学観に変容が見られた。

1. はじめに

IEA[1]・PISA[2]等の調査によると、我が国の児童・生徒は数学の好き・嫌い等の情意面が国際的に低水準であり、また「再現[2]」や「関連付け」のプロセスを要する問に対する完全正答の数が多く、「熟考」を要する問に対する無答の数が多いという結果が残っている。このことは、既知の解法を用いて手続き的に問題を解くことには秀でている反面、多くの生徒が数学に対する学習意欲や目的を失っている状況があること、そして数学的な考え方を柔軟に生かす力の育成という点に大きな問題があることを示唆しているのではないか、と筆者は考える。

---

[1] The International Association for the Evaluation of Educational Achievement（国際教育到達度評価学会）　第3回国際数学・理科教育調査の第2段階調査（1999年実施）によると我が国は数学が「大好き」「好き」と答えた生徒の割合が48%（国際平均値は72%）で、第1段階調査（1995年）と比較して5%減少している。

[2] OECD Programme for International Student Assessment（OECD生徒の学習到達度調査）
2000年調査国際結果報告書によると、各問の数学的プロセスは次の3つの力量クラスに分類される。
「再現」：簡単な計算を行うこと、定義を思い出すこと。　「関連付け」：数学的アイデアや手順を用いてやや見慣れた問題を解くこと。　「熟考」：数学的な考え方、一般化、洞察。

一方、高等学校において 2003 年から施行される学習指導要領では、新設科目「数学基礎」において数学史的な話題を取り上げることがうたわれ[3]、数学に対する興味・関心を高め意欲・態度を育てるという目的において数学史の果たす役割が重要視されている。礒田(2001a)[4]はそのような要請に対し「数学を人の文化的営みとして理解し、数学観の変容を促す上で異文化体験が貢献し得る」と述べている。

生徒の数学する心はその生徒の数学観に支えられ、数学観は経験によって変容する(礒田 2002)[5]。本研究は、異文化体験をもたらすものとして数学史教材に注目し、それが生徒の数学観の変容に及ぼす効果を検証する。また、中村(1981)[6]は「数学を、たんにそこにあるものとしてみるのではなく、数学をその形成において考え、その形成のメカニズムを明らかにすること」に数学史の主眼をおいている。それを受け筆者は、数学を特にその形成過程において解釈することを通じて、現代の自分たちの数学の位置付けを再定義する活動の重要性を指摘する。その活動の中で、生徒は数学を学ぶことの新しい価値を見出し、そしてそれが「数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを積極的に活用する態度を育てる」という高等学校数学科の大きな目標の一つを担い得るのではないかと考える。そこで、形成過程を認識し、数学を人間の営みとして体験するという観点から、歴史的テキスト（原典）を解釈する活動を中心とした教材を開発し、授業の実践例を通して以下の研究目的の成果について検証する。

2. 研究目的と方法

研究目的　数学史上の原典をその時代の文脈において解釈することを通じて、生徒の数学観が変容するかを明らかにする。

本研究における教材化の視点については、「歴史的テキストを、単に数学として考えるのではなく、それを記した他者の身になって考えてみる」ことが「自ら

---

[3] 学習指導要領解説 数学編理数編(1999)によれば、「数学と人間とのかかわりや、社会生活において数学が果たしている役割について理解させ、数学に対する興味・関心を高めるとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し数学を活用する態度を育てる(pp31)」を目標とし、内容(1)「数学と人間の活動」を「数量や図形についての概念等が人間の活動にかかわって発展してきたことを理解し、数学に対する興味・関心を高める(pp32)」とし、その取扱いには「数学における概念の形成や原理・法則の認識の過程と人間や文化とのかかわりを中心として、数学史的な話題を取り上げるものとする(pp32)」とある。
[4] 礒田正美(2001a) 異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒に関する一考察 ―隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて―，筑波大学数学教育研究室，第 20 号，pp39-48
[5] 礒田正美(2002) 数学的活動を楽しむ心を育てる ～数学を文化的営みとして教える数学教育論～，礒田正美編 課題学習・選択数学・総合学習の教材開発～数学する心を育てる～，明治図書出版，序章
[6]中村幸四郎（1981） 数学史―形成の立場から―，共立全書，pp181-185

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.165-177、2002年3月

の営みを客観的に観察し直す視野」を提供するとする礒田・土田(2001)[7]、「それぞれの数学を、その数学が使われた時代の文脈において、解釈し、そのよさを相対的に認める活動、そして、そのような解釈、吟味を通じて、現在我々の学ぶ数学が一つの文化であることを認める活動は、数学を人間の文化的営みとして体験する活動の典型である。その解釈、吟味の対象に出来るのでは、真正の歴史資料である一次文献、そしてその時代の道具（言語表現、用具など）なのである」とする礒田(2001b)[8]の考えを採用する。

また Jahnke(2000)[9]は、新しい問題や概念を研究する際に生じる疑問や誤りについて議論することの重要性を受け、「原典は数学が作られる過程の営みを生きいきとした記録として伝え、それを読むことによってその営みを認め、人間味あふれるものとして捉えうる」と主張し“有名な数学者がしていたのだから自分もそうすべき”といった考えを生むと述べている。

以上をふまえ、以下の下位課題を設定する。

課題１　生徒は、数学をその形成過程において考えることを通じて、数学を人間の営みであると認識できるか。

課題２　生徒は、歴史上の数学者の努力を体験することを通じて、数学することに対する自信を得ることができるか。

上記の目的・課題に対し、本研究では以下の方法をとる。

方法　数学史上の原典をとりあげた教材を開発し、それを用いた授業実践を行う。授業前後のアンケート、ビデオ・カメラによる授業の記録及び生徒のワークシートをもとに考察する。

3. 授業概要

3. 1. 対象

埼玉県立高等学校普通科第 2 学年の生徒（2 クラス 85 名）

3. 2. 実施期間

平成 13 年 11 月 6 日、7 日、8 日（各クラス 65 分授業 2 回）

3. 3. 授業目標

フェルマの著作「平面及び立体の軌跡論入門」の原典を当時の状況も合わせて解

7 礒田正美、土田知之(2001) 異文化体験を通じての数学の文化的視野の覚醒；数学的活動の新たなパースペクティブ，第 25 回日本科学教育学会年会論文集，pp497-498

8 礒田正美(2001b) 文化的営みとしての数学教育 ～その方法としての数学史上の一次文献の利用～，数学教育，2001 年 7 月号(No.524)，明治図書出版，pp106-109

9 Hans Niels Jahnke(2000), The Use of Original Sources in the Mathematics Classroom, History in Mathematics Education ed. John Fauvel and Jan van Maanen, The ICMI Study, Kluwer Academic Publishers, pp291-322

釈し、方程式を図形に表現するフェルマの考え方を体験する。

3. 4. 教材開発

原典解釈の主な対象としてフェルマ[10]の著作「平面及び立体の軌跡論入門[11]」を取り上げる。これは方程式[12]を図形に表現することでその幾何的な性質を表そうとしたもので、座標幾何学の幕開けと位置付けられている書物のひとつである。フェルマは 2 つの未知量をある一定の角をなす 2 つの線分の長さに表現することで、2 次以下の 2 つの未知量を含む方程式が直線または円錐曲線に一般的に表現できることを示した。授業ではそのうち DA=BE（A と E を 2 つの未知量とする）の形のものが直線を描くこと、$AE=Z^2$ の形のものが双曲線を描くこと[13]についてのフェルマの考えを解釈することを主な活動とする。

フェルマの同書を用いた授業研究として、土田(2001)[14]がある。土田は代数的表現と幾何的表現の融合に着目し、現代の座標幾何からはじめて、同書の DA=BE のものとユークリッド「原論」との比較を通じ、歴史視点を加えてその有用性を感得することに主眼を置いている。本研究における教材開発は、フェルマの時代の数学において彼の営みを解釈することを主な目標とし、現代の座標等との関わりは生徒それぞれが解釈の中で発見すべきものと位置付ける。そのため、フェルマ以外の原典として、当時議論が盛んに行われ[15]この軌跡論に密接な関わりを持つアポロニウスの「円錐曲線論」を用いる。このうち双曲線についての議論をとりあげ、フェルマがどのように考えたのかをより豊かに解釈することをねらう。

授業においては模範的解答を導き出すことを目的とはせず、生徒一人ひとりが自分で考えて活動することを強調し、教師は生徒の解釈を妨げないよう、生徒の議論を促すことに重点を置く指導を心がける。また、原典をその時代の状況において、またそれを記した人間の身になって味わう活動を円滑に行うため、原典に記されていない現代的な言葉の使用を極力回避する。

なお、幾何的な表現や性質をよりよく味わうためのテクノロジーツールとして、動的作図ソフト「Cabri Geometry II（以後 Cabri）」を活用する。

---

10 Pierre de Fermat，1601～1665

11 AD LOCOS PLANOS ET SOLIDOS ISAGOGE，1679 年にその息子の手により出版された。

12 フェルマの用いた代数はヴィエタの省略的代数であり、同次元性を守り正の数を表すものであった。

13 現代的に言えば、それぞれ y=ax が直線を描くこと、xy=c が双曲線を描くこと。ただし直交の座標系ではない。

14 土田知之(2001) 一次文献を用いた授業による生徒の数学観の変容に関する一考察 ～ユークリッド『原論』，フェルマー『平面及び立体の軌跡論入門』の解釈を通して～，世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育 ―代数・幾何・微積 ForAll プロジェクトの新展開―，中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(8)，筑波大学数学教育学研究所，pp214-221

15 フェルマ自身もアポロニウス「平面の軌跡」の復元を試みている。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.165-177、2002年3月

3．5．授業展開

1．事前課題

授業１週間前に、事前課題としてユークリッド「原論」第２巻命題14[16]を簡略化したものを与え、穴埋め式で挑戦させた。「原論」は当時そして現代においても最も大きい影響力をもつと言われるギリシア時代の書物である。紀元前の時代から数学があったこと、その数学において幾何学が非常に重要な意味を持っていた[17]ことを感じることをねらいとした。

授業は、この確認とギリシアの数学についての簡単な説明からはじめた。

2．フェルマの人物紹介


写真１

教師「フェルマがなによりすごかったのは、余暇の大半をお気に入りの数学に費やしたってこと」

生徒たち「え〜、まじかよ〜」（写真１）

人物紹介とともに、フェルマが何を考えたのかをなるべくそのままの形で感じてほしいのでラテン語の原典を用意したことを伝えた。

3．「軌跡論入門」序文のフェルマの言葉

> 古代の数学者が軌跡について論著をあらわしたことは確かなことである。（中略）われわれは、この理論を１つの解析論に下属させようと思うのである。この解析論というのは、特に軌跡の研究に対して一般的な見通しを与えるのに適したものである。
>
> <u>最終の段階の方程式に未知量が２つ含まれている場合には、そのうちの１つの量（線分）の端点が直線あるいは曲線を描き、かくして軌跡が得られる。</u>直線はただ１種類でかつ単純である。曲線の種類は無数にあり、円、放物線、双曲線、楕円などがある。
>
> 未知量の端点が直線または円を描くとき、この軌跡を「平面的」といい、放物線、双曲線、楕円を描くとき「立体的」という。そのほかの曲線を描くとき、これを「曲線的」という。（中略）
>
> 方程式を立てるために、２つの未知量を定まった角をなすように取るのが便利である。そして普通には、角としては直角をとり、かつその位置が与えられたものとし、また２つの未知量のうちの一方についてはその端点の１つは定点であるとする。２つの未知量のいずれもが平方を越えないときは、後で明らかにされるように、軌跡は平面的または立体的となる。（下線は筆者）

左記の文章[18]を生徒に読ませた。（事前課題にて提示済み）

教師「フェルマは何を言ってる？」

生徒Ａ「…」

教師「何か知ってる言葉はない？」

生徒Ｂ「方程式」

生徒Ｃ「軌跡」

生徒Ｄ「方程式と軌跡の話？」

難解な文章の読解に生徒は困惑したが、この授業ではフェルマがどのように考えたかを一人ひとりが考えること、フェルマの生の主張が詰まっている序文はその助けとなるので頻繁に読み返すことを強調した。

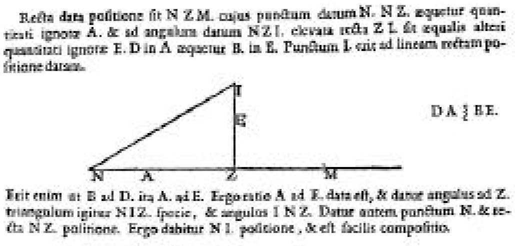
---

[16] 原題は「与えられた直線図形に等しい正方形をつくること」。アポロニウスの円錐曲線論を含む古代ギリシア時代の数学において重要な概念であった「面積あてはめ」を含む問題である。

[17] 古代ギリシア時代には、線分の長さ等を文字でおくという意味での代数は発達していなかった。

[18] 和訳は中村幸四郎（1981）「数学史—形成の立場から—」pp127-128 による。

4. フェルマの軌跡論：DA=BE


Recta data positione sit N Z M. cujus punctum datum N. N Z. aequetur quantitati ignotae A. & ad angulum datum N Z I. elevata recta Z I. sit aequalis alteri quantitati ignotae E. D in A aequetur B. in E. Punctum I. erit ad lineam rectam positione datam.

D A ⅔ B E.

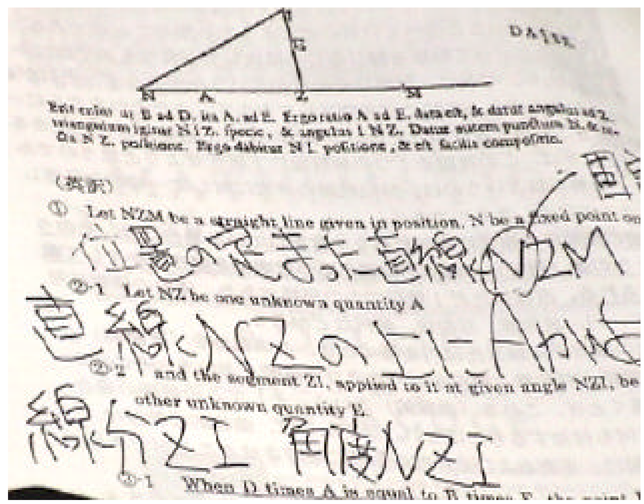
Erit enim ut B ad D. ita A. ad E. Ergo ratio A ad E. data est, & datur angulus ad Z. triangulum igitur N I Z. specie, & angulus I N Z. Datur autem punctum N. & recta N Z. positione. Ergo dabitur N I. positione, & est facilis compositio.

原典（ラテン語）

Let NZM be a straight line given in position, N be a fixed point on it. Let NZ be one unknown quantity A and the segment ZI, applied to it at given angle NZI, be equal to the other unknown quantity E. <u>When D times A is equal to B times E, the point I will describe a straight line given in position</u>, <u>since B is to D as A is to E</u>. Hence the ratio of A to E is given, and, since the angle at Z is given, the form of the triangle NIZ, and with it the angle INZ is given. But the point N is given and the straight line NZ is given in position; hence NI is given in position and it is easy to make the synthesis.

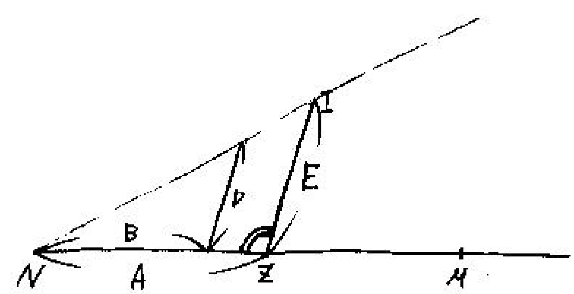
英訳（下線は筆者）

原典[19]（ラテン語）および英訳[20]を読んで、フェルマがどのような主張をしているのかを考え、あとで発表するように指示した。この際、生徒の自由な解釈が行われるよう、教師側からはフェルマが何についての話をしているのかに関し、情報あるいは先入観を与えずに取り組ませた。英語の文章がラテン語の訳であること、フェルマの説明には図が含まれていることに注意を促した。また、議論を活発にするため、グループでの討論を許した。



生徒のノート 1

話し合う生徒たち



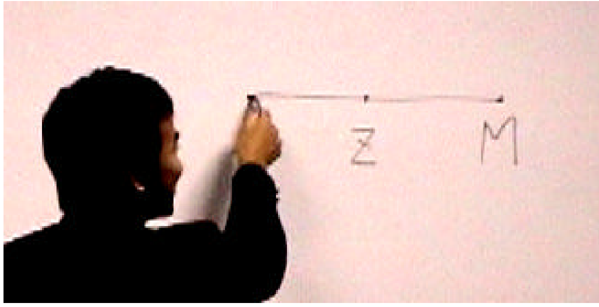
生徒のノート 2

---

[19] Petri de Fermat, AD LOCOS PLANOS ET SOLIDOS ISAGOGE , Varia Opera Mathematica

[20] Fermat, Coordinate Geometry, A Source Book in Mathematics 1200-1800 ed.D.J.Struik, Harvard University Press, 1969, pp145

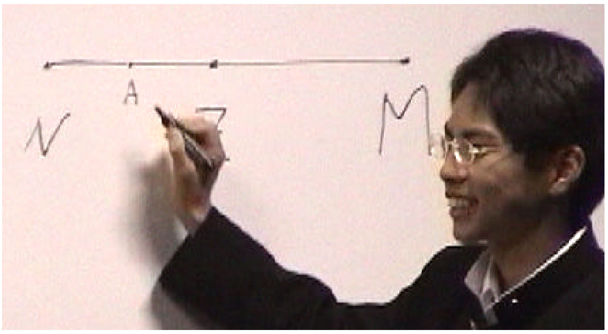
出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.165-177、2002年3月



生徒 E

5. 生徒の発表

ある程度生徒の考えがまとまってきたところで、随時生徒に前に出て説明させた。はじめは和訳のみを読み上げていた生徒も、図を用いて説明をするようになった。



生徒 F

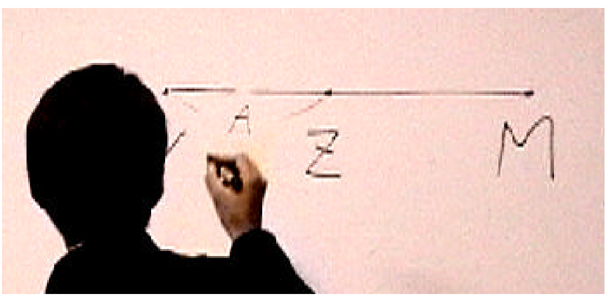
生徒 E「直線 NZM は位置の定まった直線で、点 N をその位置に固定します」

生徒 F「ここに未知量点 A をおく」

生徒 G「NZ の長さを A とおくんじゃないの？」

教師「みんなどう？」

生徒 H「NZ=A だと思う」



生徒 G

生徒 I「辺 NZ の長さを A と置くんだと思う」

生徒 J「それで、NZI に角度をつけて、ZI と未知量 E を等しくする」

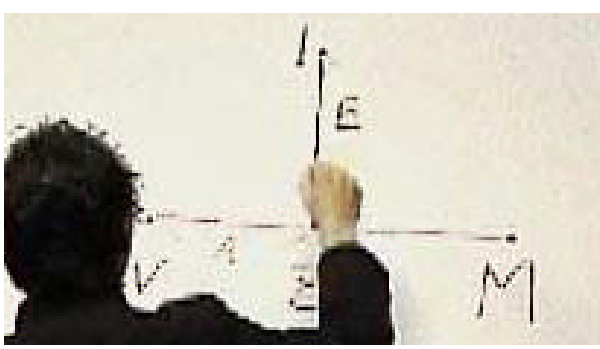
次々に考えを発表する中で、生徒たちは自分たちの考えを深め、整理をしたようであった。最終的には次の生徒 K および L のような発表がなされた。

生徒 I

生徒 K「N を固定して、N から半直線 NZM がのびてて、NZ を未知量 A、IZ を未知量 E とおいて、線分でつなげたら三角形 NZI ができた。D×A が B×E に等しくなっていて、A:E=B:D になるから、直線を描く点は位置を固定する」

教師「DA=BE のとき、点 I はどうなるって？」

生徒 L「位置の定まった直線を描く」

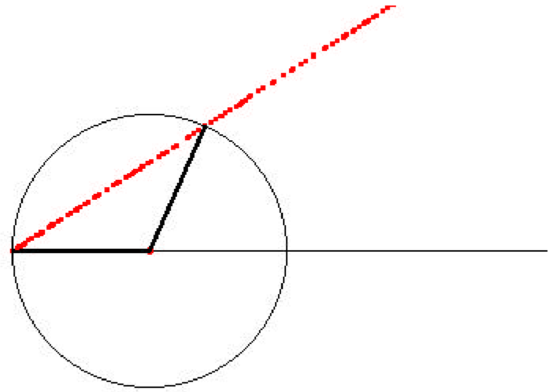


生徒 J

6. **動的作図ツールの利用**

フェルマの主張は一般的に DA=BE の形の方程式が直線を表すことであったが、簡単のために D も B も 1 に等しいとき、すなわち A=E の場合について、Cabri を用いて軌跡の表現を試みさせた。

Cabri **の様子に驚く生徒たち**



生徒の作成した Cabri **ファイル**

多くの生徒がこの様子に驚き・感動を覚えたようだが、フェルマはコンピュータでなくて手で紙に書いて説明していることを強調し、フェルマがどのようにして説明しているのかをもう一度よく考えて読み進めること、その上で具体的な方程式 3A=E をフェルマの手法で図形に表現することを課題として 1 時間目を終えた。

7. 3A=E

課題についての発表をさせた。発表においては「フェルマになったつもりで」説明をするよう指示した。

生徒 M「FG **の方向と** GH **の方向に、それぞれ** 2cm **と** 6cm **の線を引いて、端点を結んだ直線になる」**

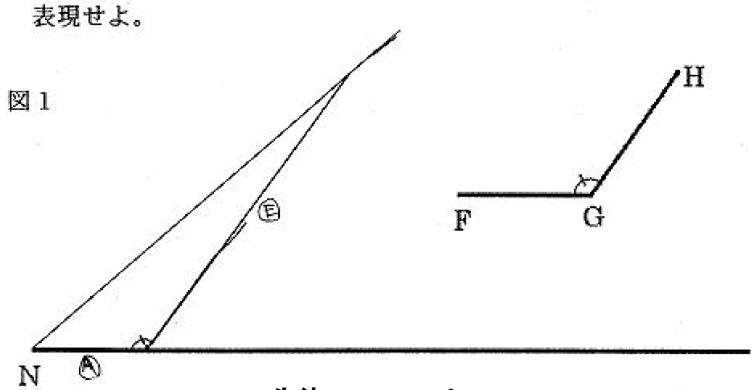


図１において直線上Nが固定されている。与えられた角度を∠ＦＧＨとして、フェルマの方法で“３Ａ＝Ｅ”を図形に表現せよ。

生徒 M **のノート**

教師「なんでそうなるの？」

生徒 M **「相似だから」**

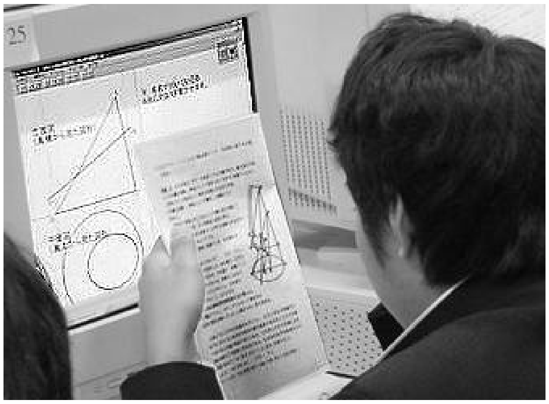
教師「何と何が？」

生徒 M「A **と** E **を辺に持つ三角形と、** B **と** D **の三角形が」**

教師「みんなどう？」

生徒 N「∠NZI **が一定で、**A:E=1:3 **だから三角形** NZI **はいつでも相似になるから、直線を描く」**

出典:中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行:筑波大学数学教育学研究室、pp.165-177、2002年3月



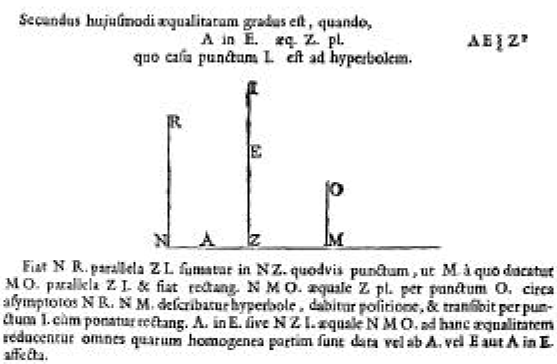
アポロニウスの円錐曲線論と Cabri とを見比べる生徒

8. 序文ふたたび〜アポロニウス

DA=BE の形のものについて一通りの議論を終え、改めてフェルマが序文で何を言っていたのか振り返った。下線部において「直線または曲線を描き」とある。フェルマの時代には、円錐を平面で切った断面にできる曲線についての議論が盛んに行われていたこと、その議論が古代ギリシアのアポロニウスに端を発していることを伝えた。双曲線の定義を示すとともに Cabri により曲線の様子を観察させ、その円錐曲線論に触れさせた。(生徒は 2 次曲線は未習)

9. フェルマの $AE=Z^2$

原典および和訳[21]を読んで、フェルマの主張を解釈させた。



Secundus hujusmodi æqualitatum gradus est, quando,
A in E. æq. Z. pl.
quo casu punctum I. est ad hyperbolem.

AE ½ Z²

Fiat N R. parallela Z I. sumatur in N Z. quodvis punctum, ut M. à quo ducatur M O. parallela Z I. & fiat rectang. N M O. æquale Z pl. per punctum O. circa asymptotos N R. N M. describatur hyperbole, dabitur positione, & transibit per punctum I. cùm ponatur rectang. A. in E. sive N Z I. æquale N M O. ad hanc æqualitatem reducentur omnes quarum homogenea partim sunt data vel ab A. vel E aut A in E. affecta.

原典(ラテン語)

第2種の方程式は、*A in E. aeq. Z pl.* (A と E をかけると Z の平方に等しい)の形のものであるが、このとき点 I は双曲線を描く。

NR を ZI に平行に引き、NZ 上に任意の点 M をとり、MO を ZI に平行に引く。そして長方形 NMO を Z pl に等しくする。O を通り漸近線 NR,NM の間に双曲線を描けばこれは位置が与えられたものであり、A in E すなわち長方形 NZI が長方形 NMO に等しいとき、この曲線は点 I を通る。

和訳

教師「フェルマはどんなことを言ってる?」

生徒 O「$AE=Z^2$ のときは曲線を描く」

教師「どんな曲線?」

生徒 P「NR と MN を漸近線にもつ双曲線」

フェルマの説明のみを順に追っていくことはせず、$AE=Z^2$ をみたしながら、A と E とが変化するにつれて点 I がどのような曲線を描くかを Cabri で動かしながら観察させた。

生徒 Q「反比例のグラフみたい」

生徒 Q の考えをみなに伝え、なぜそうなるのかという問題を提示した。生徒たちは Cabri ファイルや序文を参考にしながら、フェルマの説明の解釈を試みていた。

---

21 脚注 20. pp141 をもとに筆者が和訳したもの。

生徒の中には、与えられた角度が直角の場合に、AE が A と E を辺に持つ長方形を、Z^2 が一辺 Z の正方形を表すことに気付いたものや、すでに未知量を図形に表すフェルマの手法が現代の座標上にグラフを書くことに通じると認識したものもいた。それらの発表とともに討論がなされる中で、授業を終了した。

4. 結果と考察

授業が生徒の数学観にどのような変容を及ぼしたかを考察するために、授業前後にアンケートを実施した。以下、その結果をもとに各課題ごとに効果を検証する。

課題１　生徒は、数学をその形成過程において考えることを通じて、数学を人間の営みであると認識できるか。

授業後のアンケートにおいて、フェルマの軌跡論について生徒の中から以下の感想が得られた。

(1) 今自分たちが関数としてやっているようなことを図形によってそれを示すのは、すごいと思う。
(2) 発想力がすばらしいと痛感した。僕らが単なる線分としているのを未知量としていたりして、完全なる定義といえる思う。
(3) まだそんなに数学が発展していなかったのに今でも有名な証明もたくさんしているのがすごい。
(4) アポロニウスは未知量などを文字におきかえたりするのがなかったので、証明がフェルマよりもずっと複雑だった。

彼らはフェルマの生きた時代の数学を解釈した上で、方程式を図形に表現するフェルマの考え方のよさを見出している。(1)や(2)は現代の自分たちの数学と相対化することで彼の考えを評価している。また、(3)や(4)は彼の考えが当時の数学において新しい発見であるという認識をもって当時の数学における彼の考えの価値を認めている。これらは、フェルマの解釈をアポロニウスの円錐曲線論と合わせて行うことで、当時の文脈においてフェルマの営みを解釈するという活動が有効に行われたことを示していると考えられる。

ある生徒はこの授業を「いつも授業でやっている数学とは別物」とした上で、「昔の人は今よりずい分難しいことをやっていたのだなぁ。4 ページの[22]は証明なんかやらなくてもだいたい分かったけど、こんなのよく考えるなぁと正直思った」と感想を述べている。そして自分の数学を振り返って「数学の公式は、昔の人が 0 から始めて見つけ出したものなのだと思い知らされた」と述べている。彼は当時の状況や彼らの数学を解釈し、それを通じて現代の数学の価値を再認識し

[22] 筆者註：フェルマの軌跡論　DA=BE が直線を描くことについて。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.165-177、2002年3月

ている。現代的に座標を用いれば DA=BE の形の方程式が直線を描くことは自明であるが、当時の状況においては幾何的な厳密性が求められたということから発生した異文化体験により、方程式を幾何的に表現するフェルマの手法や、文字すら用いることなく曲線を語ろうとするアポロニウスの手法が画期的であったことを実感し、自分の普段やっている数学を振り返っている。

またある生徒は、この授業のタイトルを「数学の歴史をふりかえって近代数学の成り立ちを知る」と位置付け、「今までの数学で簡単に学んできたことがらは、それが確立されるまでに大変な努力がされているのだなぁ」、「日頃普通に使う数学の公式は、昔の人たちによる努力のすえできたのだということをしっかり認識しなければいけない」と述べている。彼は形成過程の認識から数学が人間の営みとして存在し、それにより発展してきたことを認識し、自らの数学を反省している。

課題２　生徒は、歴史上の数学者の努力を体験することを通じて、数学することに対する自信を得ることができるか。

この効果を検証するため、生徒の数学することに対する意識を問う選択型アンケートを授業前後に同じ内容で実施し、リカート尺度（5:大賛成～1:大反対）を用いて調査した。項目ごとに平均数値を授業の前後で比較したところ、質問「数学の問題を解くのに新しい考えが入る余地はほとんどない」においては授業前 2.82 が授業後には 2.41 と低下し、逆に「数学では決まりきったやり方を使わなくても問題を解くことができる」においては授業前 3.74 が授業後 4.00 と上昇している。

ある生徒は授業前の選択型のアンケートにおいて、上記のどちらの質問にも「どちらともいえない」と回答している。ところが、授業後にはそれぞれの質問に「大反対」「賛成」と回答するとともに「数学はやり方をおそわってそのやり方をやるだけだったけど、自分でやり方をみつけることができそうだと思った」と述べている。また、ある生徒はフェルマの考え方について「自分達が知っているようなことを使って証明していたのに驚いた」とした上で、「数学者の発見を見て、数学者が色々な、わけのわからない方法でやっているわけではないと思うようになった」と述べている。彼らはフェルマの営みを経験することを通じて歴史上の数学者の業績を身近に感じ、数学することに対する自分たちの考え方や態度を振り返って、数学を創造的なものとして捉えなおしている。これらは、現代的な表現でなく当時の表現のままにフェルマの考えを解釈することで、当時の新しい発見が現代の自分の数学の中に息づいていることを実感し、天才たちだけが数学ができ、またするべきだという数学観からの脱却に成功している。

またある生徒は、「難しかった。でも、昔の人に負けたくないから数学の勉強をもっとがんばりたい」、「誰も考えないようなことをした人が新しい発見をすることができる。教科書通りの解法だけではなく、新しい考え方を常に考えるべきだ」と述べている。彼は異文化体験をする中で当時の数学に困難を感じながら、数学する意欲に新しい要素を取り入れ、自ら創造することや新たな発想を生み出すことに価値を見出している。

5. おわりに

本研究では、数学史上の原典を解釈する活動が生徒の数学観の変容に効果を及ぼすかを検証した。授業実践を通して、自分たちの数学の新たな価値づけや、数学に対する考え方や取り組む態度等に変化が多く確認されたことから、十分な可能性がうかがえる。

今後の課題としては、原典を解釈する中で Cabri 等のテクノロジーをどのように利用していくか、ということがある。本授業実践においては、Cabri を使ったことがない生徒が大多数を占めたため、Cabri そのものの機能に感動してしまい、フェルマの立場に身を置けないままに原典を解釈しようとする生徒が少なからず見受けられた。事後アンケートにおいても「コンピュータを使うとわかりやすい」といった回答が多かったことから、原典を解釈するという数学的活動におけるテクノロジーの利用方法に対する考察が課題となるであろう。

謝辞

授業実践に際し、埼玉県立春日部高等学校の今西善徳先生、片野秀樹先生、福住譲先生をはじめ数学科の先生方には多大なるご協力と共に、貴重なご意見ご指導をいただきました。厚く御礼申し上げます。

註１　本研究は、筑波大学学内プロジェクト研究（助成研究Ｂ：研究代表者　礒田正美）「インターネット上の数学博物館の開発・評価研究」の一貫として行われた。

註２　授業の詳細、並びに資料は次に掲示している。

http://www.mathedu-jp.org

参考文献（引用文献を除く）

[1] Fermat, On Analytic Geometry, translated from the French by Joseph Seidlin(1929), Oeuvres de Fermat ed.Tannery and Henry(1896), A Source Book in Mathematics volume two ed. David Eugene Smith, Dover Publications Inc., pp389-396

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.165-177、2002年3月

[2] R.Catesby Taliaferro(1939) On Conic Sections by Apollonius of Perga, Great Books of The Western World(1952), Encyclopedia Britannica, University of Chicago, pp595-691

[3] Ｔ.Ｌ.Heath(1896) Apollonius of Perga Treatise on Conic Section, Cambridge University Press, pp1-14, 53-59

[4] 中村幸四郎・寺坂英孝・伊藤俊太郎・池田美恵訳(1996)　ユークリッド原論（縮刷版），共立出版，pp30-32

[5] 国立教育研究所(1997)　中学校の数学教育・理科教育の国際比較―第 3 回国際数学・理科調査報告書―，国立教育研究所紀要，第 127 集，東洋館出版社

[6] 国立教育政策研究所(2000)　数学教育・理科教育の国際比較―第 3 回国際数学・理科調査の第 2 段階調査報告書―，国立教育政策研究所紀要，第 130 集，ぎょうせい

[7] 渡辺良(1999)　OECD「生徒の学習到達度調査（PISA）」のフレームワーク，国立教育研究所紀要，第 129 集＜学力を考える＞，pp23-41

[8] 礒田正美(2001)　数学的活動論、その解釈学的展開　人間の営みを構想する数学教育学へのパースペクティブ，第 34 回日本数学教育学会論文発表会論文集，pp223-228

[9] 礒田正美(1987)　数学学習における数学史の利用に関する一考察，筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告，第 26 集，pp159-174

[10] 沖田和美(1996)　学校数学における数学史を生かした指導に関する一考察，平成 7 年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

[11] 後藤司(1997)　曲線の表現史と作図ツールをふまえた解析幾何学教材の刷新に関する一考察～ギリシャから微積分創成紀をふまえて～，平成 8 年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

[12] T.L.ヒース(1931)　復刻版　ギリシア数学史，平田寛・大沼・菊池訳，共立出版，pp285-293

[13] スチュアート・ホリングデール(1993)　数学を築いた天才たち（上），岡部恒治監訳，講談社，pp63-106, 216-221

[14] ボイヤー(1984)　数学の歴史　2，加賀美鐵雄・浦野由有訳，朝倉書店，pp.30-55

[15] ボイヤー(1984)　数学の歴史　3，加賀美鐵雄・浦野由有訳，朝倉書店，pp115-118