

授業資料

Brachistochrone Problem を解こう！

Vo1.2【11月7日(水)】

授業者：齋藤康則

(筑波大学大学院教育研究科教科教育専攻数学教育コース)

先週の内容は覚えていますか？

① Brachistochrone Problem とは・・・

NEW PROBLEM

Which Mathematicians Are Invited to Solve³

If two points A and B are given in a vertical plane, to assign to a mobile particle M the path AMB along which, descending under its own weight, it passes from the point A to the point B in the briefest time.

(Acta Eruditorum, Leipzig, 1696, P296 より)

新しい問題

数学者は解くことを求められる

もし、2点A, Bが垂直面に与えられるならば、自分自身の重さで降下する可動質点Mが点Aから点Bに最短時間で通過する経路AMBを見つけなさい。(翻訳者：齋藤)

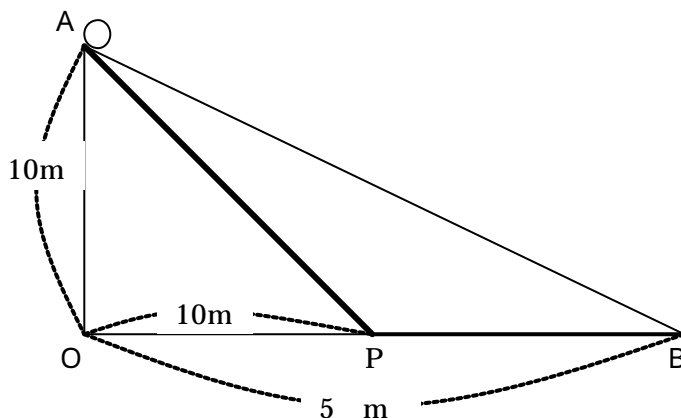


Brachistochrone Problem とはどのような問題か覚えていますか？

あなた自身が予想した経路AMBを覚えていますか？

② Brachistochrone Problem を解こう！

【2つの坂道問題(A B間が直線経路の場合)】



地上から10mはなれた地点Aから斜面にそって質量5kgのボールを転がすとき、ボールがルートABとルートAPBのどちらのルートを通ると先に地点Bに到着するか、考えなさい。

・それぞれのルートでどれだけの時間がかかりましたか？

ルートAB： 秒

ルートAPB： 秒

・どちらのルートを通ると先に地点Bに到着しますか？

ルート()

・上の問題を解いて、あなたはどのようなことに気が付きましたか？

・前ページの問題から，あなたはどのようなことを考えたり，思い付いたりしますか。
文章や絵を使ってまとめましょう。



前ページで、直線経路についての Brachistochrone Problem を解いてもらいましたが、この問題について次のように述べています。

To arouse in lovers of such things the desire to undertake the solution of this problem, it may be pointed out that the question proposed does not, as might appear, consist of mere speculation having therefore no use. On the contrary, as no one would readily believe, it has great usefulness in other branches of science such as mechanics. Meanwhile (to forestall hasty judgment) [it may be remarked that] although the straight line AB is indeed the shortest between the points A and B , it nevertheless is not the path traversed in the shortest time. However the curve AMB , whose name I shall give if no one else has discovered it before the end of this year, is one well known to geometers.

(Smith, A Source Book in Mathematics, P645 より抜粋)

【日本語訳】

この問題の解法を引き受ける願望を持つ愛好者たちに刺激を与えるため、提案した質問は使い道がないゆえ、単なる思索からは成り立っていないが、きっと成り立つかもしれないと指摘されるかもしれない。それどころか、誰も信じないとき、力学のような理科の他方の分野に大きな有用性を持つ。(軽率な判断に先んじる) その間に、直線 AB は点 A と B の間で実に最短であるが、それにもかかわらず最短時間で横切った経路ではない。しかしながら、曲線 AMB は、誰も他にこの年の終わり以前に発見しなかったときに私が与えるであろう名前であるが、幾何学でよく知られたものである。(翻訳者：齋藤)

今日の授業では、 AB 間が曲線経路のときについて考えてみましょう。

To determine the curve joining two given points, at different distances from the horizontal and not on the same vertical line, along which a mobile particle acted upon by its own weight and starting its motion from the upper point, descends most rapidly to the lower point.

The meaning of the problem is this: Among the infinitely many curves which join the two given points or which can be drawn from one to the other, to choose the one such that, if the curve is replaced by a thin tube or groove, and a small sphere placed in it and released, then this [sphere] will pass from one point to the other in the shortest time.

In order to exclude all ambiguity let it be expressly understood that we here accept the hypothesis of Galileo, of whose truth, when friction is neglected, there is now no reasonable geometer who has doubt: The velocities actually acquired by a heavy falling body are proportional to the square roots of the heights fallen through. However our method of solution is entirely general and could be used under any other hypotheses whatever.

(Smith, A Source Book in Mathematics, P 6 4 7 より抜粋)

【日本語訳】

与えられた2点を結びつける曲線を決定するために、同じ垂直線からではなく、水平線から異なった距離でとり、それに沿って可動質点が自分自身の重さで動くものとする。最高点からその運動をスタートさせると、最下点で最も速く降りる。

この問題の意味は次のようになる。与えられた2点を結び、または一方から他方へ描かれる無限に多くの曲線を選ぶにあたり、もしその曲線が細いチューブや溝によって変えられ、またそこで小さな球を置いて放すのならば、そのときこれ〔球〕は、一方の点から他方の点へ最短時間で通過するだろう。

すべての多義性を考慮に入れないために、はっきりと摩擦が無視されるとき、我々はここで**ガリレオの仮説**を受け入れること、理性的な幾何学者はいないことを理解させる。次のことを信じなさい。それは、**重い落体の速度は落下高度の2乗根に比例する**ことによって実際に得た、ということだ。しかしながら我々の解法方法はまったく一般的で、他のどんな仮説の中でも使われる。(翻訳者：齋藤)

フェルマーの最小時間の原理



フェルマー

2点間を結ぶ光の経路は、その時間を最小にするものである。

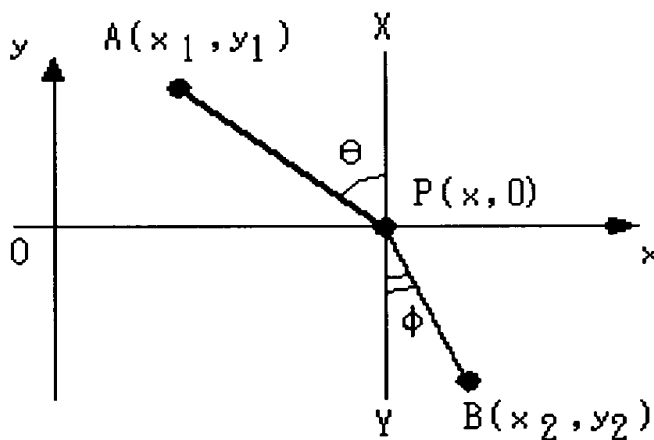


図1

数式を使ってフェルマーの原理を考えましょう。

領域 1, 2 での光の速さをそれぞれ u , v とおく。図 1 のように境界面に沿って x 軸をおき, 点 A の座標を(,), B の座標を(,) とおく。 x 軸上に点 P をとって, 折れ線() を作る。点 P の座標を(,) とおいて, 経路() を光が進むのにかかる時間 T を計算してみると,

$$t(A \rightarrow P) = \frac{AP}{u} = (\quad)$$

$$t(P \rightarrow B) = \frac{PB}{v} = (\quad)$$

よって, $T = t(A \rightarrow P) + t(P \rightarrow B) = (\quad) \dots$

を最小にするように, x の値を決めればよいので, を x で微分して 0 とおくと,

$$\frac{dT}{dx} = (\quad) + (\quad)$$

$$= \frac{\quad}{uAP} + \frac{\quad}{vPB} = 0 \dots$$

さてここで点 P にたてた垂線を PXY とおき, $APX = q$, $BPY = f$ とおくと,

$\sin q = (\quad)$, $\sin f = (\quad)$ より の式は,

$\frac{dT}{dx} = (\quad) - (\quad) = 0$ となり, 最終的には

$(\quad) = \frac{u}{v} = \text{const.}$ となる。

Fermat has shown in a letter to de la Chambre (see *Epist. Cartesii Lat.*, Tome III, p. 147, and *Fermatii Opera Mathem.* p. 156 et. seq.) that a ray of light which passes from a rare into a dense medium is bent toward the normal in such a manner that the ray (which by hypothesis proceeds successively from the source of light to the point illuminated) traverses the path which is shortest in time. From this principle he shows that the sine of the angle of incidence and the sine of the angle of refraction are directly proportional to the rarities of the media, or to the reciprocals of the densities; that is, in the same ratio as the velocities with which the ray traverses the media.

(Smith, A Source Book in Mathematics, P 6 5 0 より抜粋)

【日本語訳】

フェルマーは、濃い媒体の中で通過した光線(光源から照らされた点に連続して進む仮説による)が、最短時間でその経路を横切るような方法で、垂直面で曲がったことを de la Chambre(*Epist. Cartesii Lat.*, Tome の 1 4 7 ページと *Fermatii Opera Mathem.* の 1 5 6 ページなどを見よ。)に手紙で示した。この原則から、入射角の正弦と屈折角の正弦は媒体の希薄度、または濃度の逆数にちょうど比例することを彼は示す。すなわち、光線が媒体を横切る速度の比は同じである。(翻訳者：齋藤)

Chapter 5 Brachistochrone Problem を解こう！(その2)

ホイヘンスは光学の研究をするにあたって、フェルマーのアイデアをしっかりと身につけ、それを完成させた。彼は光の運動を直線運動に限定せず、場所場所で光速が連続的に変化しているような媒質中での曲線運動は多様多種に見えるけれども、そのどれにも基本的性質として**最短時間**への志向があらわれていることを示した。

(『マッハ力学』エルンスト・マッハ著 伏見 譲訳, 講談社 より)

ジャン・ベルヌーイは Brachistochrone Problem を解く際、目的意識をもって**落下運動を光の運動でおきかえた**(この種の問題は落下運動に関しては未解決であるが、光の運動に関しては既に解決済であることにジャンは気づいていた。)

If we now consider a medium which is not uniformly dense but [is] as if separated by an infinite number of sheets lying horizontally one beneath another, whose interstices are filled with transparent material of rarity increasing or decreasing according to a certain law; then it is clear that a ray which may be considered as a tiny sphere travels not in a straight but instead in a certain curved path. (The above-mentioned Huygens notes this in his treatise *de Lumine* but did not determine the nature of the curve itself.) This path is such that a particle traversing it with velocity continuously increasing or diminishing in proportion to the rarity, passes from point to point in the shortest time. Since the sines of [the angles of] refraction in every point are respectively as the rarities of the media or the velocities of the particle it is evident also that the curve will have this property, that the sines of its [angles of] inclination to the vertical are everywhere proportional to the velocities. In view of this one sees without difficulty that the *brachistochrone* is the curve which would be traced by a ray of light in its passage through a medium whose rarity is proportional to the velocity which a heavy particle attains in falling vertically.

(Smith, A Source Book in Mathematics, P651 より抜粋)

【日本語訳】

もし今、我々が、一様に濃いわけではなく、あたかも水平に横たわっている無数の薄板によって引き離されるような媒質を考えるのならば、すき間は確かな法則によって増減している透明な材料の希薄さでいっぱいになる。そのとき、ごく小さな球面として考えられるかもしれない光線がまっすぐでなく、明確な曲線路の代わりとして伝わることは明らかだ。(前述のホイヘンスがこのことを彼の論文である de Luine に書き留めているが、曲線自信の性質を決めていない。)この軌道は、希薄さに比例していて、連続して増減している速度と共にそれを横切っている質点のようなものなので、最短時間で点から点を通過する。それぞれの点での屈折角の正弦は媒質の希薄度ではなく、質点の速度によるものなので、曲線がこの特質をもつことは明白である。それは、垂直に対する入射角の正弦が速度に対してどこでも比例であることだ。この観点から最速降下線が、希薄度が重さのある質点が垂直に落下して到達するための速度に比例している媒質を通った光線の経路により調べられるであろう曲線であることが難なく分かる。(翻訳者：齋藤)

実際にこれから、ジャン・ベルヌーイの解法を見てみましょう。