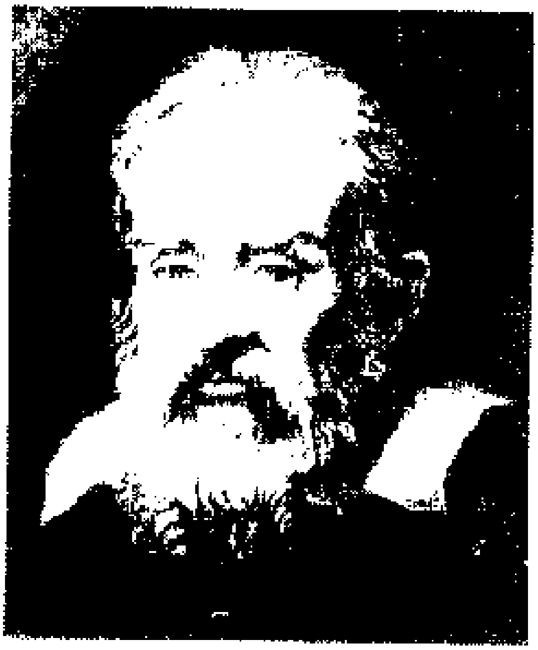
求積物語！



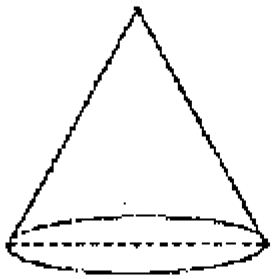
年　　組　　番

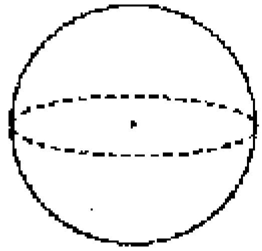
氏名

問題

体の体積を求めるには、**どのようにしたらいいのだろうか？**

球に関して言えば、$V=\frac{4}{3}\pi r^3$ という公式があるので，それを使えば答えが求められる。





昔の人は立体の体積を求めるには、どのようにしていたのだろうか。

球の体積 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ というのはどのようにして求められたのだろうか。

カバリエリについて

17 世紀におけるイタリアの最大の科学者は**ガリレオ・ガリレイ** (Galileo Galilei, 1564－1642) であるが、数学者として著名なのは**ボナヴェントゥラ・カバリエリ** (Bonaventura Cavalieri, 1598－1647) である。ガリレオの弟子の 1 人であった。

彼はミラノの没落貴族の出である。最初は人文学を勉強し、イエズス会の修道院に入った。1616 年頃ピサの修道院に入り、そこでガリレイの弟子カステルリ (Benedetto Castelli,1578－1643) と出会い、急速に数学の力を伸ばした。カステルリはカバリエリの才能を見抜いて師のガリレイに彼を紹介した。すぐにガリレイに気に入られ、数多くの文通を通して指導を仰いだ。1619 年頃からカバリエリはミラノの聖ジロラモ修道院で神学を教え始めた。1623 年から 3 年間ローマのチアンポリ枢機卿 (Monsignor Ciampoli) の客人として数学の勉強を専念できた。1626 年から 3 年間パルマの修道院長とその地の大学数学教授を兼任した。1629 年ボロニアの数学教授の地位が空いたので、ガリレイは迷わずカバリエリを推挙した。こうして彼は死ぬまでその地位にあった。

カバリエリの基本的な考え（アイディア）

カバリエリは『不可分量の幾何学』(1653)の中で次のような考えを述べている。

「線は大きさのない点の運動により、面は幅のない線の運動により、立体は厚さのない面の運動によって生じ、これらの要素はこれ以上分割できない究極の成分で、これらの極微な要素の無限個の和によって、長さや面積や体積が求められる。」

<u>**不可分量**</u>を例えて言うと、

・ **線の indivisible(不可分量)は点である**
・ **面の indivisible(不可分量)は線である**
・ **立体の indivisible(不可分量)は面である**

【MEMO】

カバリエリの業績

積分学の先駆者であるカバリエリは 1635 年に『不可分量の幾何学』を著し，カバリエリの原理を確立した。

カバリエリの原理（The theorem of Cavalieri）とは・・

The Theorem. If between the same parallels any two plane figures are constructed, and if in them, any straight lines being drawn equidistant from the parallels, the included portions of any one of these lines are equal, the plane figures are also equal to one another; and if between the same parallel planes any solid figures are constructed, and if in them, any planes being drawn equidistant from the parallel planes, the included plane figures out of any one of the planes so drawn are equal, the solid figures are likewise equal to one another.

【日本語訳】

ある平行線の間に２つの平面図形があるとし、そしてその平行線の間にその平行線から等距離に引かれたどんな直線においても、そしてその直線の図形に含まれる部分がどんな場合にも互いに等しいならば、その２つの平面図形は互いに等しい。また、ある平行な平面の間に２つの空間図形があるとし、そしてその平行な平面の間にその平行な平面から等距離に引かれたどんな平面においても、そしてその引かれた平面の空間図形に含まれる部分がどんな場合にも互いに等しいならば、その２つの空間図形も互いに等しい。

【英文】

The Proof. **Let any two plane figures ABC and XYZ [Fig. I] be constructed between the same parallels PQ, RS; and let DN, OU, be drawn parallel to the aforesaid PQ, RS; and let the portions, for example of DN, included in the figures, namely JK, LM, be equal to each other; and again, in the line OU, let the portions EF, GH, taken together (for the figure ABC, for example, may be hollow within, according to the contour of EfG), be likewise equal to TV; and let this happen in all the other lines equidistant from PQ. I say that the figures, ABC, XYZ, are equal to each other.**

Let either, then, of the two figures ABC, XYZ be taken, for example ABC itself, with the portions of the parallels PQ, RS coterminous with it, namely the portions PA, RB, and let it be superposed upon the other figure XYZ, but so that the lines PA, RB may fall upon AQ, CS; then either the whole figure ABC coincides with the whole figure XYZ (and thus, since they coincide with each other they are equal), or not; yet let there be some part which will coincide with some part, as $XMC'YThL$, part of the figure ABC, with $XMC'YTAL$, part of the figure XYZ.

It is manifest, moreover, if the superposition of the figures is effected in such a way that portions of the parallels PQ, RS coterminous with our two figures are mutually superposed, that whatever straight lines (included in the figures) are in line remain in line; as, for example, since EF, GH are in line with TV, when the aforesaid superposition is made they will remain in line (namely $E'F'TH'$ in line with TV), for the distance of those lines EF, GH from PQ is equal to the distance of TV from PQ; whence, no matter how many times PA is placed over AQ, at any place, EF, GH will always remain in line[1] with TV, which is clearly apparent not only for this but for all other lines parallel to PQ in either figure.

In the case where part of one figure (as ABC) coincides of necessity with part of the figure XYZ, and not with the whole, granting that the superposition be made by such a rule as has been told, the demonstration will be as follows. For since when any parallels are drawn to PQ, the portions of them, included in the figures, which were in line, will still remain in line after superposition, and moreover since they were by hypothesis equal before superposition, therefore, after superposition the portions included in the figures will likewise be equal—as, for example, $E'F'$, TH' taken together will be equal to TV—therefore, if $E'F'$, TH' do not coincide with the whole of TV, then, one part [of one] coinciding with some part [of the other], as TH' with TH' itself, $E'F'$ will be equal to $H'V$, $E'H'$ being in the residuum of the figure ABC which is superposed, and $H'V$ in the figure XYZ upon which the other is superposed. In the same way we shall show that to any line whatever parallel to PQ, and included in the residuum of the superposed figure ABC (which may be $LB'YTF'$) corresponds an equal straight line, in line [with the former], which will be in the residuum of the figure XYZ on which ABC is superposed; therefore, the superposition being made by this rule, when anything of the superposed figure is left over and does not fall upon the figure, it must be that something of the other figure must also be left over, and have nothing superposed upon it.

Since, moreover, to each of the straight lines parallel to PQ and included in the residuum (or residua, for there may be several residual figures) of the superposed figure ABC (or $XB'C'$) there corresponds another straight line, in line [with the first] and included in the residuum (or residua) of the figure XYZ, it is manifest that these residual figures, or their aggregates, are between the same parallels; so since the residual figure $LB'YTF'$[2] is between the parallels DN, RS, likewise the residual figure (or aggregate of residual figures) of the figure XYZ (because it has the frusta Thq, $MC'Z$) will be between the same parallels DN, RS. For if it did not extend both ways to the parallels DN, RS, as for example if it extended up to DN, but not down to RS, only as far as OU, then to the straight lines included in the frustum $E'B'YfF'$, and parallel to PQ, there would not be found in the residuum of the figure XYZ (or in the aggregate of the residua) other corresponding lines as has been proved to be unavoidable. Therefore these residua, or their aggregates, are between the same parallels; and the portions of the lines parallel ot PQ, RS, included therein, are equal, as we have shown above; therefore the residua are subject to the same condition as has been assumed for ABC, XYZ; that is, they are analogues.

So let the residua be now superposed, but so that the parallels KL, OY may fall upon the parallels LN, YS, and the part $VB'Z$ of the frustum $LB'YTF'$ may coincide with the part $VB''Z$ of the frustum $MO'Z$; then we shall show, as above, that as long as there is found a residuum of one, there will be found also a residuum of the other, and these residua, or aggregates of residua, will be found within the same parallels. Let $L'VZY'G''F''$ be a residuum belonging to the figure ABC; and let $MO'B''V$, Thg, be residua belonging to the figure XYZ, whose aggregate is between the same parallels as the residuum $L'VZY'G''F''$, that is, between DN, RS. If now we superpose these residua again, but so that the parallels between which they lie be always superposed respectively, and this is supposed to be done continually, until the whole figure ABC shall have been superposed, I say the whole of it must coincide with XYZ; otherwise if there were any residuum of the figure XYZ, upon which nothing is superposed, there would be also some residuum of the figure ABC which would not have been superposed, as we have shown above to be unavoidable; but it is granted that the whole of ABC is superposed upon XYZ, therefore they are so superposed upon each other that there are no residua of either, therefore they are so superposed that they coincide, therefore the figures ABC, XYZ are equal to each other.

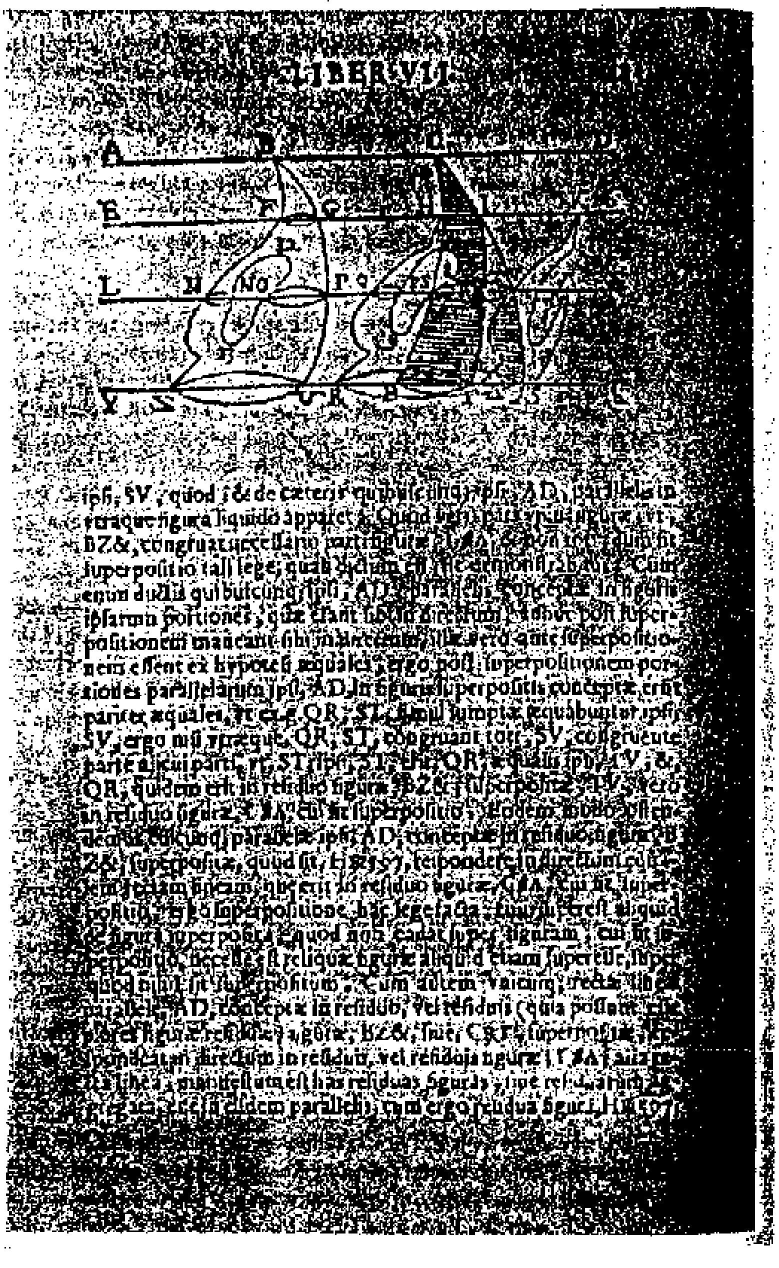
Now in the same diagram let ABC, XYZ be any two solid figures constructed between the same parallel planes PQ, RS; and let DN, OU be any planes drawn equidistant from the planes previously spoken of; and let the figures that lie in the same plane and that are included in the solids be equal to each other always; as JK equal to LM, and EF, GH, taken together (for a solid figure, for example ABC, may be hollow in any way within, according to the surface $Ff(Gg)$), equal to TV. I say that these solid figures are equal to each other.

For if we superpose the solid ABC, with the portions PA, RC of the planes PQ, RS, coterminous with it, upon the solid XYZ in such a way that the plane PA be on the plane PQ, and the plane RC on the plane RS, we shall show (as we did above about the portions of the lines parallel to PQ included in the plane figures ABC, XYZ) that the figures included in the solids and lying in the same plane will also after superposition remain in the same plane; and therefore thus far the figures included in the superposed solids are equal—and parallel to PQ, RS.

Then unless the entire solid coincides with the other solid entire in the first superposition, residual solids will remain, or solids composed of residua, in either solid, which will not be superposed upon each other. Since for example the figures $E'F'$, TH' are equal to the figure TV, then when the common figure TH' is taken away, the remaining figure $E'F'$ will be equal to the remaining figure $H'V$; and this will happen in any plane whatever parallel to PQ and meeting the solids ABC, XYZ. Therefore whenever we have a residuum of one solid, we shall always have a residuum of the other also; and it will be evident, according to the method applied in the former part of this Proposition in the case of plane figures, that the residua of the solids, or the aggregates of residua, will always be between the same parallel planes (as the residua $LB'YTF'$, $MO'Z$, Thg are between the same parallels DN, RS) and will be analogues.

Now if these residua be superposed again, so that the plane DL will be placed on the plane LN, and RY on YS, and this is understood to be done continually, until ABC, which is being superposed, is entirely taken, the entire solid ABC will finally coincide with the entire solid XYZ. For when the entire solid ABC is superposed upon XYZ, unless they coincided there would be some residuum of one, as of the solid XYZ, therefore also some residuum of the solid $XB'C'$, or ABC, and this residuum would not be superposed; which is absurd, for it is already assumed that the entire solid ABC is superposed on XYZ. Therefore there will not be any residuum in these solids; therefore they will coincide; therefore the solid figures spoken of, ABC, XYZ, will be equal to each other, which was to be proved of them.

Struik, A Source Book in Math


LIBER VII

カバリエリの原理についての解説

右の図において２つの平面図形 ABC（ABC の内部に FfGh をくりぬいたもの）と平面図形 XYZ を同じ平行線 PQ、RS の間に置き、その PQ、RS に平行になるように DN、OU を引く。PQ、RS に平行で、PQ から等距離にある他のあらゆる直線においてその平面図形に含まれる線分が常に等しいならば、（例えば、DN、OU に関して言うと、（　　）＝（　　）、（　　＋　　）＝（　　）となること）この２つの図形 ABC、XYZ の面積は互いに等しいといえる。

証明

さて、図形 ABC を図形 XYZ に重ね合わせるということを考える。図形 ABC 全体と図形 XYZ 全体が完全に一致すれば、何の問題もない。

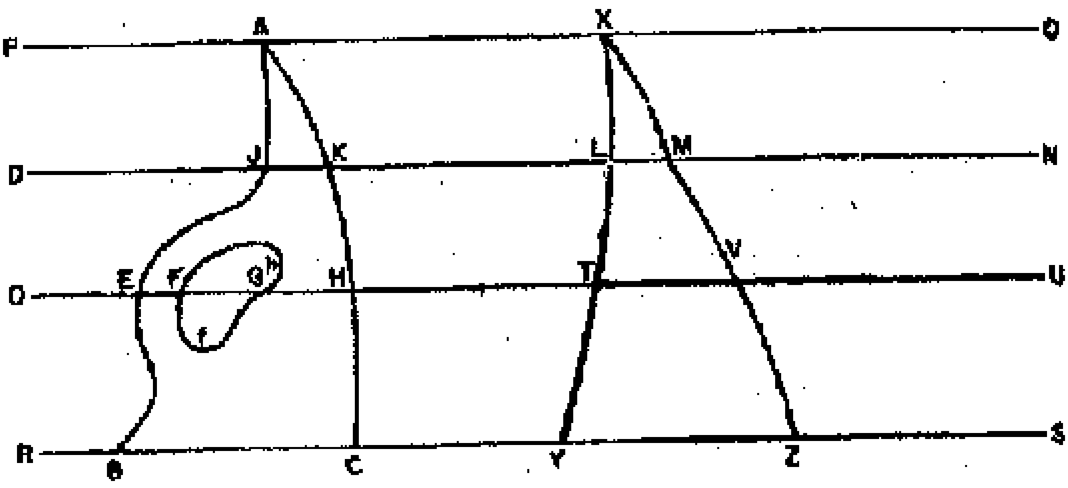
しかし、完全に一致しない場合は、完全に一致しなかったとしても一部は一致する部分があるはずである。（例えば、図形 ABC（XB'C'）と図形 XYZ に共通している部分＿＿＿＿＿＿である）

今度は２つが一致しなかった部分（図形 ABC（XB'C'）においては＿＿＿＿＿図形 XYZ においては＿＿＿＿＿＿である）を考える。さらに、PQ に平行で、重ねる図形 ABC（XB'C'）の重なり合わなかった部分に含まれる線分は、各々、同じ直線上にあって図形 XYZ の重なり合わなかった部分に含まれる線分に対応するので、これら重なり合わなかった部分の図形、またはそれらを集めたものは、同じ平行線の間に存在することが明らかである。つまり、図形 ABC（XB'C'）の重なり合わなかった図形 LB'YTfF'と図形 XYZ の重なり合わなかった図形 MC'Z は平行線＿＿＿、＿＿＿の間に存在することになる。

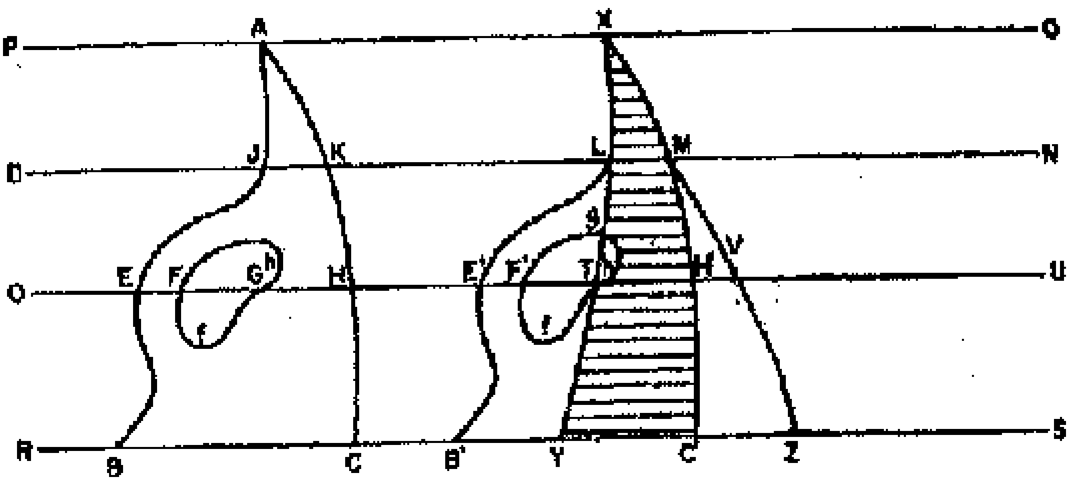
さて、また２つの図形を重ね合わせを考えてみる。つまり、図形 LB'YTfF'と図形 MC'Z である。そうすると、＿＿＿＿が２つに共通していることが分かる。重なり合わなかった部分は、図形 ABC の重なり合わなかった部分 L'VZY'G"fF"と図形 XYZ の重なり合わなかった部分 MC'B"V と Thg である。もし、これら重なり合わなかった部分が再び重ね合わせられるならば、そして、図形 ABC 全体が図形 XYZ にすべて重ね合わされるまで続くとするならば、図形 ABC と XYZ は一致するに違いないといえる。

つまり、ABC 全体が XYZ に重ね合わせられ、それらはどちらも重なり合わない部分が存在しないようになるまで互いに重ね合わせられるので、それらは一致し、図形 ABC と図形 XYZ は互いに等しくなる。

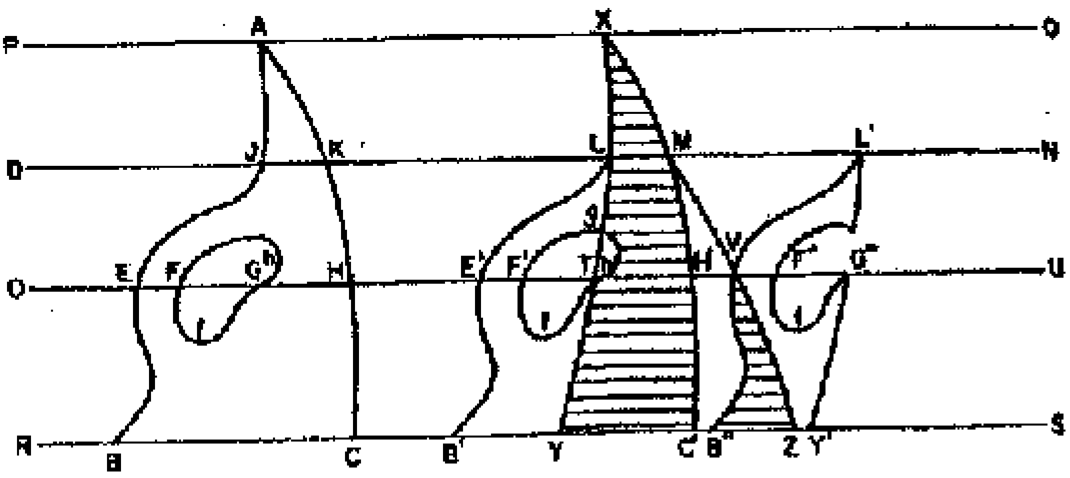
①


P A X Q
D J K L M N
O E F G h H T V U
f
R B C Y Z S

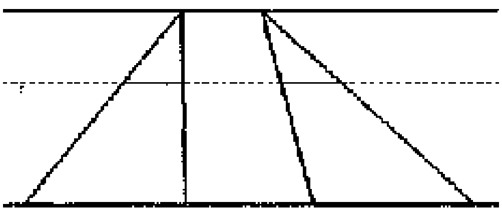
②

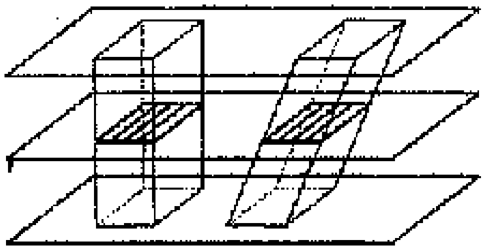

P A X Q
D J K L M N
O E F G h H E' F' g T h H' V U
f f
R B C B' Y C' Z S

③


P A X Q
D J K L M L' N
O E F G h H E' F' g T h H' V F" G" U
f f f
R B C B' Y C' B" Z Y' S

（平面）　　　　　　　　　　（立体）





自分なりにカバリエリの原理をまとめてよう。

◎ 平面について

◎ 立体について

アルキメデスの求積法の『方法』の命題２

β'.

Ὅτι δὲ πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶν τοῦ | κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος | ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν | τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ | κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ὁ κύλιν|δρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῷ | μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, | ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαί|ρας, ἡμιόλιος τῆς σφαίρας ἐστίν, | ὧδε θεωρεῖται κατὰ τρόπον τόνδε·

Ἔστω γάρ τις σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος | κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετροι δὲ αἱ | ΑΓ, ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις οὖ|σαι, ἔστω δὲ κύκλος ἐν τῇ σφαί|ρᾳ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθὸς | πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, καὶ ἀπὸ | τοῦ ὀρθοῦ κύκλου τούτου κῶνος ἀναγε|γράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ Α ση|μεῖον, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ἐπιφα|νείας αὐτοῦ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπι|πέδῳ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν βάσιν· | ⟨ποιήσει δὴ κύκλον ὀρθὸν πρὸς⟩ | τὴν ΑΓ, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΕΖ. | ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος | ἀναγεγράφθω ἄξονα ἔχων τῇ | ΑΓ ἴσον, πλευραὶ δὲ ἔστωσαν τοῦ κυλίν-|δρου αἱ ΕΛ, ΖΗ· καὶ ἐκβεβλήσθω | ἡ ΓΑ, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ | νοείσθω ζυγὸς ὁ ΓΘ, μέσον δὲ αὐ|τοῦ τὸ Α, καὶ ἤχθω τις παράλληλος ὑ|πάρχουσα τῇ ΒΔ ἡ ΜΝ, τεμνέτω | δὲ αὕτη τὸν μὲν ΑΒΓΔ κύκλον κατὰ | τὰ Ξ, Ο, τὴν δὲ ΑΓ διάμετρον κατὰ τὸ Σ, | τὴν δὲ ΑΕ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Π, τὴν | δὲ ΑΖ κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ | εὐθείας ἐπίπεδον ἀνεστάτω | ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ· ποιήσει δὴ τοῦ|το ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν | ⟨κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ ΜΝ, | ἐν δὲ τῇ ΑΒΓΔ σφαίρᾳ⟩ | κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν | δὲ τῷ ΑΕΖ κώνῳ κύκλον, οὗ ἔσται δι|άμετρος ἡ ΠΡ.

καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶν τὸ | ὑπὸ ΓΑ, ΑΣ τῷ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ· ἴση γὰρ | ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΣΜ, ἡ δὲ ΑΣ τῇ ΠΣ· τῷ δὲ | ὑπὸ ΓΑ, ΑΣ ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΑΞ, του-|τέστιν τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ, ἴσον ἄρα τὸ ὑ|πὸ τῶν ΜΣ, ΣΠ τοῖς ἀπὸ τῶν ΞΣ, ΣΠ. | καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ἡ | ΜΣ πρὸς ΣΠ, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ, ὡς ἄρα | ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, ἡ ΜΣ πρὸς ΣΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ | ΜΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ. τῷ δὲ ὑπὸ ΜΣ, | ΣΠ ἴσα ἐδείχθη τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ· ὡς ἄρα | ἡ ΑΘ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ | ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ | ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὰ | ἀπὸ ΞΟ, ΠΡ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὰ | ἀπὸ ΞΟ, ΠΡ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ | κυλίνδρῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς | ⟨ἀμφοτέρους τοὺς κύκλους τόν τε | ἐν τῷ κώνῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ,⟩ | καὶ τὸν ἐν τῇ σφαίρᾳ, οὗ ἐστιν διά|μετρος ἡ ΞΟ· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως | ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ πρὸς τοὺς | κύκλους τόν τε ἐν τῇ σφαίρᾳ καὶ | τὸν ἐν τῷ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν, ὡς ἡ ΘΑ | πρὸς ΑΣ, οὕτως αὐτὸς ὁ κύκλος ὁ ἐν | τῷ κυλίνδρῳ αὐτοῦ μένων ἀμφο|τέροις τοῖς κύκλοις, ὧν εἰσιν διάμε|τροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, μετενεχθεῖσιν καὶ τε-|θεῖσιν οὕτως ἐπὶ τὸ Θ, ὥστε ἑκατέρου | αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ | Θ, ἰσορροπήσουσι κατὰ τὸ Α σημεῖ|ον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλ|λη ἀχθῇ ἐν τῷ ΑΖ παραλληλογράμ|μῳ παρὰ τὴν ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀ|χθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν | πρὸς τὴν ΑΓ, ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος ἐν | τῷ κυλίνδρῳ ἰσορροπήσει πε|ρὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένων ἀμ|φοτέροις τοῖς κύκλοις τῷ τε | ἐν τῇ σφαίρᾳ γινομένῳ καὶ τῷ | ἐν τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τε|θεῖσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, | ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι | τοῦ βάρους τὸ Θ. συμπληρω|θέντος οὖν τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τῶν | ληφθέντων κύκλων καὶ τῆς σφαί-|ρας καὶ τοῦ κώνου ἰσορροπήσει | ὁ κύλινδρος περὶ τὸ *Α* σημεῖον αὐ|τοῦ μένων συναμφοτέροις τῇ | τε σφαίρᾳ καὶ τῷ κώνῳ μετενε|χθεῖσι καὶ τεθεῖσι ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ | τὸ Θ, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον | εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ | τὰ εἰρημένα στερεὰ κατὰ τὸ *Α* ση|μεῖον τοῦ μὲν κυλίνδρου μένοντος περὶ κέντρον | τοῦ βάρους τὸ *Κ*, τῆς δὲ σφαίρας καὶ | τοῦ κώνου μετενηνεγμένων, ὡς | εἴρηται, περὶ κέντρον βάρους τὸ Θ, | ἔσται, ὡς ἡ *ΘΑ* πρὸς *ΑΚ*, οὕτως ὁ κύλιν|δρος πρὸς τὴν σφαῖραν καὶ τὸν κῶ|νον. διπλασία δὲ ἡ *ΘΑ* τῆς *ΑΚ*· διπλα|σίων ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος συναμ|φοτέρου τῆς τε σφαίρας καὶ τοῦ | κώνου. αὐτοῦ δὲ τοῦ κώνου τριπλα|σίων ἐστί· τρεῖς ἄρα κῶνοι ἴσοι εἰσὶ δυ|σὶ κώνοις τοῖς αὐτοῖς καὶ δυσὶ σφαί-|ραις. κοινοὶ ἀφῃρήσθωσαν δύο | κῶνοι· εἷς ἄρα κῶνος ὁ ἔχων τὸ | διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ *ΑΕΖ* | ἴσος ἐστὶ ταῖς εἰρημέναις δυσὶ | σφαίραις. ὁ δὲ κῶνος, οὗ τὸ διὰ | τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ *ΑΕΖ*, ἴσος ἐστὶν | ὀκτὼ κώνοις, ὧν ἐστι τὸ διὰ τοῦ | ἄξονος τρίγωνον τὸ *ΑΒΔ*, διὰ τὸ | διπλῆν εἶναι τὴν *ΕΖ* τῆς *ΒΔ*. οἱ ἄρα | ὀκτὼ κῶνοι οἱ εἰρημένοι ἴσοι εἰσὶ | δυσὶ σφαίραις. τετραπλασίων | ἄρα ἐστὶν ἡ σφαῖρα, ἧς μέγιστος | κύκλος ὁ *ΑΒΓΔ*, τοῦ κώνου, οὗ κορυ|φὴ μέν ἐστι τὸ *Α* σημεῖον, βάσις | δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν *ΒΔ* κύ|κλος ὀρθὸς ὢν πρὸς τὴν *ΑΓ*.

ἤχθω|σαν δὴ διὰ τῶν Β, Δ σημείων ἐν | τῷ ΑΖ παραλληλογράμμῳ τῇ | ΑΓ παράλληλοι αἱ ΦΒΧ, ΨΔΩ, καὶ | νοείσθω κύλινδρος, οὗ βάσεις | μὲν οἱ περὶ διαμέτρους τὰς ΦΨ, ΧΩ κύκλοι, ἄξων δὲ ὁ ΑΓ. ἐπεὶ | οὖν διπλάσιός ἐστιν ὁ κύλινδρος, οὗ | ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλλη|λόγραμμον τὸ ΦΩ, τοῦ κυλίνδρου, | ⟨οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλ⟩|ληλόγραμμον τὸ ΦΔ, αὐτὸς δὲ οὗ|τος τριπλασίων ἐστὶν τοῦ κώνου, | οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον | τὸ ΑΒΔ, ὡς ἐν τοῖς Στοιχείοις, ἑξα|πλασίων ἄρα ὁ κύλινδρος, οὗ ἐστι | τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλό|γραμμον τὸ ΦΩ, τοῦ κώνου, οὗ | τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΔ. | ἐδείχθη δὲ τοῦ αὐτοῦ κώνου τετρα|πλασία οὖσα ἡ σφαῖρα, ἧς μέ|γιστός ἐστιν κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· | ἡμιόλιος ἄρα ὁ κύλινδρος τῆς | σφαίρας· ὅπερ ἔδει δειχθῆναι. |

Τούτου τεθεωρημένου, διότι πᾶ|σα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ τοῦ | κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν | μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον | τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, | ἡ ἔννοια ἐγένετο, ὅτι πάσης σφαί-|ρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ | τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαί|ρᾳ· ὑπόληψις γὰρ ἦν, καὶ διότι πᾶς κύκλος | ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχον|τι τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ὕψος | δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, | καὶ διότι πᾶ|σα σφαῖρα | ἴση ἐστὶ κώ|νῳ τῷ βά|σιν μὲν ἔχου|τι τὴν ἐπι|φάνειαν τῆς | σφαίρας, ὕψος | δὲ ἴσον τῇ ἐκ | τοῦ κέντρου | τῆς σφαίρας.

アルキメデス方法
佐藤徹 訳·解釈
東海大学出版会

Proposition 2

We can investigate by the same method the propositions that

(1) *Any sphere is (in respect of solid content) four times the cone with base equal to a great circle of the sphere and height equal to its radius;* and

(2) *the cylinder with base equal to a great circle of the sphere and height equal to the diameter is $1\frac{1}{2}$ times the sphere.*

(1) Let $ABCD$ be a great circle of a sphere, and AC, BD diameters at right angles to one another.

Let a circle be drawn about BD as diameter and in a plane perpendicular to AC, and on this circle as base let a cone be described with A as vertex. Let the surface of this cone be produced and then cut by a plane through C parallel to its base; the section will be a circle on EF as diameter. On this circle as base let a cylinder be erected with height and axis AC, and produce CA to H, making AH equal to CA.

Let CH be regarded as the bar of a balance, A being its middle point.

Draw any straight line MN in the plane of the circle $ABCD$ and parallel to BD. Let MN meet the circle in O, P, the diameter AC in S, and the straight lines AE, AF in Q, R respectively. Join AO.

Through MN draw a plane at right angles to AC;

this plane will cut the cylinder in a circle with diameter MN, the sphere in a circle with diameter OP, and the cone in a circle with diameter QR.

Now, since $MS = AC$, and $QS = AS$,

$$MS \cdot SQ = CA \cdot AS$$
$$= AO^2$$
$$= OS^2 + SQ^2.$$

And, since $HA = AC$,

$$HA : AS = CA : AS$$
$$= MS : SQ$$
$$= MS^2 : MS \cdot SQ$$
$$= MS^2 : (OS^2 + SQ^2),$$

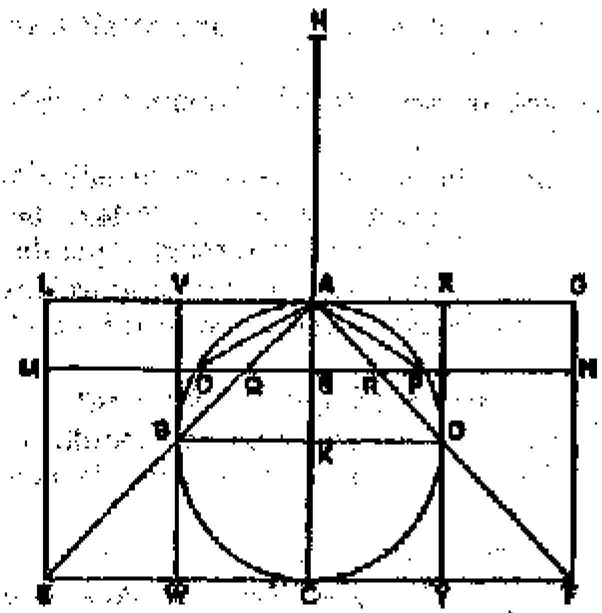
from above,

$$= MN^2 : (OP^2 + QR^2)$$
$$= (\text{circle, diam. } MN) : (\text{circle, diam. } OP + \text{circle, diam. } QR).$$

That is,

$HA : AS =$ (circle in cylinder) : (circle in sphere + circle in cone).

Therefore the circle in the cylinder, placed where it is, is in equilibrium, about A, with the circle in the sphere together with the circle in the cone, if both the latter circles are placed with their centres of gravity at H.



Similarly for the three corresponding sections made by a plane perpendicular to AC and passing through any other straight line in the parallelogram LF parallel to EF.

If we deal in the same way with all the sets of three circles in which planes perpendicular to AC cut the cylinder, the sphere and the cone, and which make up those solids respectively, it follows that the cylinder, in the place where it is, will be in equilibrium about A with the sphere and the cone together, when both are placed with their centres of gravity at H.

Therefore, since K is the centre of gravity of the cylinder,

$$HA : AK = (\text{cylinder}) : (\text{sphere} + \text{cone } AEF).$$

But $HA = 2AK$;

therefore $\qquad$ cylinder $= 2$(sphere + cone AEF).

Now $\qquad$ cylinder $= 3$(cone AEF); $\qquad$ [Eucl. XII. 10]

therefore $\qquad$ cone $AEF = 2$(sphere).

But, since $EF = 2BD$,

$\qquad$ cone $AEF = 8$(cone ABD);

therefore $\qquad$ sphere $= 4$(cone ABD).

(2) Through B, D draw VBW, XDY parallel to AC;

and imagine a cylinder which has AC for axis and the circles on VX, WY as diameters for bases.

Then $\qquad$ cylinder $VY = 2$(cylinder VD)

$\qquad = 6$(cone ABD) $\qquad$ [Eucl. XII. 10]

$\qquad = \frac{3}{2}$(sphere), from above.

Q.E.D.

"From this theorem, to the effect that a sphere is four times as great as the cone with a great circle of the sphere as base and with height equal to the radius of the sphere, I conceived the notion that the surface of any sphere is four times as great as a great circle in it; for, judging from the fact that any circle is equal to a triangle with base equal to the circumference and height equal to the radius of the circle, I apprehended that, in like manner, any sphere is equal to a cone with base equal to the surface of the sphere and height equal to the radius."

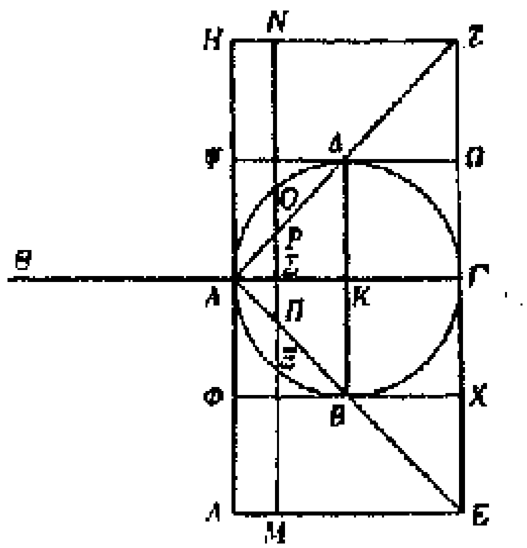
'GREAT BOOKS OF THE WESTERN WORLD, 11)

命題 2

(球の大きさと球の表面の大きさ)

すべての球 は，球の大円に等しい底面と，球の半径に等しい高さをもつ円錐の4倍である．また，球の大円に等しい底面と，球の直径に等しい高さをもつ円柱 は，球の$1\frac{1}{2}$倍である．これらのことは，次のようなやり方で，以下のように見出される．

大円が円 $AB\Gamma\Delta$ であるような任意の球があるとせよ．$A\Gamma$，$B\Delta$ を，(球の大円の)互いに直角をなす直径とする．いま，球の中に，円 $AB\Gamma\Delta$ に垂直な，直径が $B\Delta$ の円があるとせよ．(円 $AB\Gamma\Delta$ に)垂直なこの円を底面とし，頂点 A の円錐が描かれたとせよ．そして，その円錐の(側)面が延長され，(延長されて出来た)円錐が，Γ を通って，底面に平行な平面によって切られたとせよ．すると，$A\Gamma$ に垂直な円が出来て，その直径は EZ である．この円を底面として，$A\Gamma$ に等しい軸をもつ円柱が描かれたとせよ．円柱の母線を $E\Lambda$，ZH とし，ΓA が延長され，$A\Theta$ が ΓA に等しくとられたとせよ ．いま，$\Gamma\Theta$ が天秤の横木であると想定され，その中点が A であるとする．さて，$B\Delta$ に平行な，任意の直線 MN が引かれ，この MN が，円 $AB\Gamma\Delta$ を Ξ，O において，直径 $A\Gamma$ を Σ において，線分 AE を Π において，AZ を P において，それぞれ切るとせよ ．直線 MN 上に，$A\Gamma$ に垂直な平面を描くと，その平面は，断面として，円柱の中に直径



MN の円を、球 $AB\Gamma\Delta$ の中に直径 ΞO の円を，円錐 AEZ の中に直径 ΠP の円を作るであろう。

ところで，ΓA，$A\Sigma$ に囲まれた長方形は，$M\Sigma$，$\Sigma\Pi$ に囲まれた長方形に等しい．なぜなら，$A\Gamma$ は ΣM と，$A\Sigma$ は $\Pi\Sigma$ と等しいから．そして，$A\Xi$ 上の正方形，すなわち，$\Xi\Sigma$ 上の正方形と $\Sigma\Pi$ 上の正方形との和は，ΓA，$A\Sigma$ に囲まれた長方形に等しい．したがって，$M\Sigma$，$\Sigma\Pi$ に囲まれた長方形は，$\Xi\Sigma$ 上の正方形と $\Sigma\Pi$ 上の正方形との和に等しい．また，ΓA が $A\Sigma$ に対するように，$M\Sigma$ は $\Sigma\Pi$ に対する．そして ΓA は $A\Theta$ に等しい．それゆえ，ΘA が $A\Sigma$ に対するように，$M\Sigma$ は $\Sigma\Pi$ に，すなわち，$M\Sigma$ 上の正方形は，$M\Sigma$，$\Sigma\Pi$ に囲まれた長方形に対する．ところで，$\Xi\Sigma$ 上の正方形と $\Sigma\Pi$ 上の正方形の和が，$M\Sigma$，$\Sigma\Pi$ に囲まれた長方形に等しいことはすでに示されている．それゆえ，$A\Theta$ が $A\Sigma$ に対するように，$M\Sigma$ 上の正方形は，$\Xi\Sigma$ 上の正方形と $\Sigma\Pi$ 上の正方形の和に対する．ところで，$M\Sigma$ 上の正方形が，$\Xi\Sigma$ 上の正方形と $\Sigma\Pi$ 上の正方形の和に対するように，MN 上の正方形は，ΞO 上の正方形と ΠP 上の正方形の和に対する．そして，MN 上の正方形が，ΞO 上の正方形と ΠP 上の正方形の和に対するように，円柱の中の直径 MN の円は，円錐の中の直径 ΠP の円と，球の中の直径 ΞO の円との両者の和に対する．したがって，ΘA が $A\Sigma$ に対するように，円柱の中の円は，球の中の円と円錐の中の円との和に対する．そこで，ΘA が $A\Sigma$ に対するように，円柱の中の円自体は，そのままの位置で，Θ がそれぞれの重心であるように移されて置かれた直径 ΞO，ΠP の円の両方の和に対するから，それらは点 A に関して釣り合うであろう．同様に，別の直線が，平行四辺形 AZ の中に，EZ に平行に引かれ，その直線上に，$A\Gamma$ に垂直な平面が立てられると、円柱の中に出来る円は，そのままの位置で，Θ がそれぞれの重心であるように天秤の横木上で Θ に移されて置かれた，球の中に出来る円と円錐の中に出来る円との両方の和に，点 A に関して釣り合うことが示されるであろう．そこで，円柱と球と円錐が，(断面として出来た) とられた円によって (それぞれが) 満たされるとき，円柱は，そのままの位置で，Θ がそれらそれぞれの重心であるように天秤の横木上で移されて置かれた球と円錐との両者に，点 A に関して釣り合うであろう．そこで，円柱が，その重心が K になるようにそのままの位置に置かれ，一方，球と円錐が，先に述べられたように，それらの重心が Θ になるように移されると，これらの立体は，点 A に関して釣り合う

のであるから，ΘA が AK に対するように，円柱は，球と円錐との和に対するであろう．ところで，ΘA は AK の2倍である．それゆえ，円柱は，球と円錐との和の2倍である．そして，円柱は，その円錐の3倍である．したがって，3つの円錐は，その円錐2つと，球2つとの和に等しい．共通である2つの円錐が取り去られると，軸を通る三角形が AEZ であるような円錐1つは，先に言われた球2つに等しい．ところで，軸を通る三角形が AEZ であるような円錐は，軸を通る三角形が $AB\Delta$ であるような円錐8つに等しい．なぜなら，EZ は $B\Delta$ の2倍であるから，それゆえ，いま言われたような円錐8つが，球2つに等しい．したがって，その大円が円 $AB\Gamma\Delta$ の球は，頂点が A で，底面が $A\Gamma$ に垂直な直径 $B\Delta$ の円であるような円錐の4倍である．

次に，点 B，Δ から，平行四辺形 ΛZ の中で，$A\Gamma$ に平行に直線 ΦBX，$\Psi\Delta\Omega$ が引かれたとし，底面が，直径 $\Phi\Psi$，$X\Omega$ の円で，軸が $A\Gamma$ であるような円柱が考えられたとせよ．さて，軸を通る平行四辺形が $\Phi\Omega$ であるような円柱は，軸を通る平行四辺形が $\Phi\Delta$ であるような円柱の2倍である．そして，後者の円柱自体は，『原論』の中で示されているように，軸を通る三角形が $AB\Delta$ であるような円錐の3倍である．それゆえ，軸を通る平行四辺形が $\Phi\Omega$ であるような円柱は，軸を通る三角形が $AB\Delta$ であるような円錐の6倍である．ところで，大円が円 $AB\Gamma\Delta$ である球は，そうした円錐の4倍であることが先に示されていた．したがって，円柱は球の $1\frac{1}{2}$ 倍である．このことが示すべきことであった．

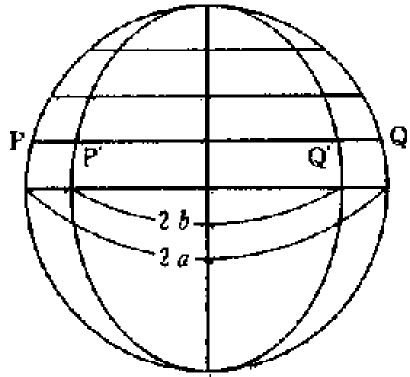
すべての球は，底面として（球の）大円をもち，高さとして球の半径をもつ円錐の4倍であることが見出されたあとで，すべての球の表面は，球の大円の4倍であるという考えが導けた．なぜなら，すべての円は，底面としてその円周（に等しい線分）をもち，高さとして円の半径に等しい線分をもつ三角形に等しいのであり，また，すべての球は，底面としてその球の表面（に等しい平面）をもち，高さとして球の半径に等しい線分をもつ円錐に等しいのであるという想定が成り立つからである．

アルキメデス方法　佐藤徹
訳・解釈
東海大学出版会

ワークシート　No. 1　　　　　　　　　　　　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問 1

楕円は、１つの円を、その１つの直径を軸として一定の比に縮小したものと考えられる。このことと、カバリエリの原理を用いて、長軸が２a、短軸が２b の楕円の面積は πab で与えられることを示せ。



問２

前問の楕円を、長軸の周りに１回転して得られる回転楕円体の体積は$\dfrac{4}{3}\pi ab^2$で与えられることを、カバリエリの原理を用いて示せ。

ワークシート　No. 2　　　　　　　　　　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

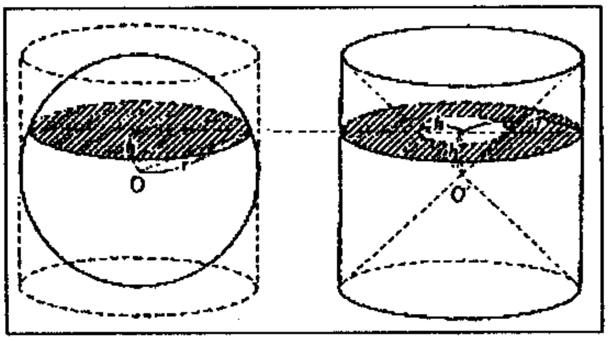
球の体積が$\frac{4}{3}\pi r^3$であることを証明してみよう。

① 自分なりの考え方、方法で証明してみよう。

② 前回の授業で習ったカバリエリの原理を使って証明してみよう。

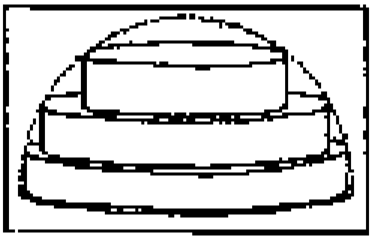
右の図の左は、半径 r の球を考える。右は、左の球に接する直円柱を考え、それから上面、下面を底面とする２つの直円錐を除いたものを考える。

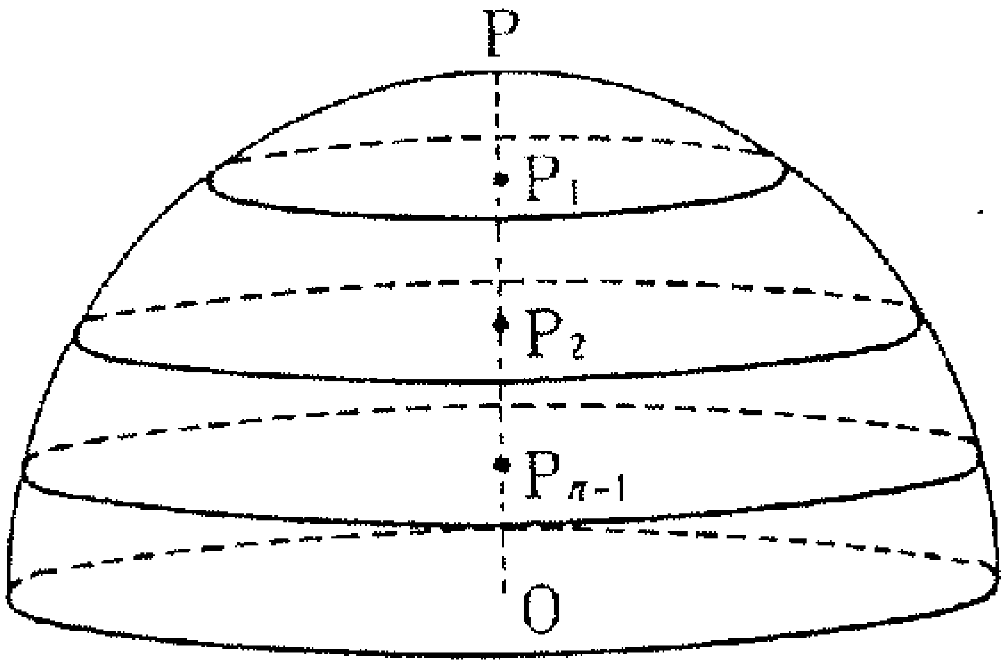
中心 O、O'から h の距離ある平面で切り取る。



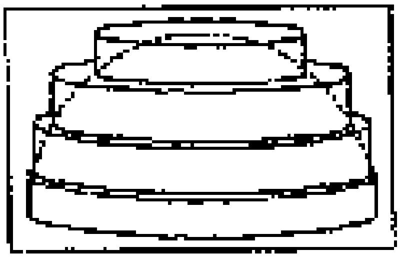
③ 前回の授業で習ったカバリエリのアイディアを使って証明してみよう。
（ヒント） 球ではなく半球で考える。半球においてOP間をn等分する。

(i)




P
P_1
P_2
P_{n-1}
O

(ii)

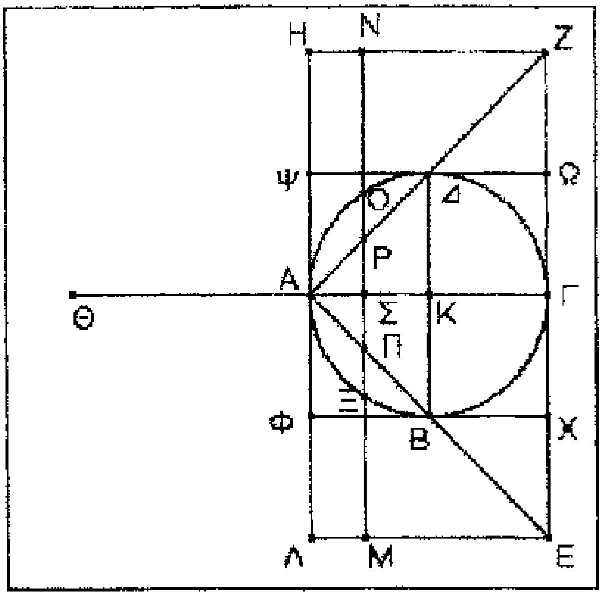


ワークシート　No. 3　　　　　　　　　　　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1．　アルキメデスが『方法』で用いた方法（第２定理）をアルキメデスの言葉に従いながら、球の体積を求めてみよう。

命題２

「すべての球は、球の大円に等しい底面と、球の半径に等しい高さをもつ円錐の４倍である。また、球の大円に等しい底面と、球の直径に等しい高さをもつ円柱は、球の $1\frac{1}{2}$ 倍である。これらのことは、次のようなやり方で、以下のように見出される。」

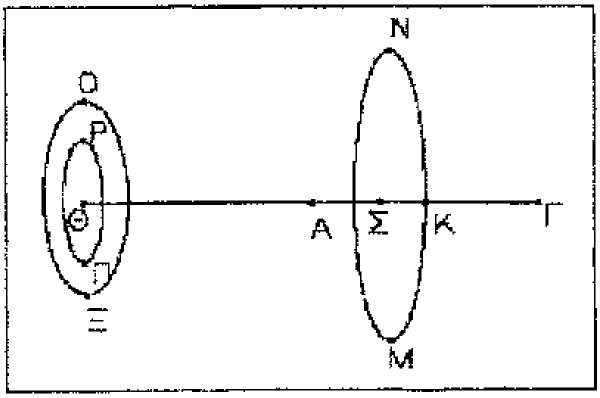


（解説）

第２段落の部分の要約

ΘΑ：ΑΣ＝円錐の中の円：球の中の円＋円錐の中の円が成立する。

そこで、ΘΑがΑΣに対するように、円柱の中の円自体は、そのままの位置で、Θがそれぞれの重心であるように移されて置かれた直径ΞΟ, ΠΡの円の両方の和に対するから、それらは点Aに関して釣り合うだろう。



MNと同様に、ΕΖに平行に引いた他の直線に関して、その直線上にΑΓに垂直な平面で切ったとき、断面としてできる３つの円についても同じ関係が言える。

それらの円を重ね合わせていくと、円柱はそのままの位置（重心をKとする）で、Θが円錐と球のそれぞれの重心であるように移す。

すると、

点Aに関して、円柱の体積と円錐と球を合わせた体積は釣り合う。

ところで、

ΘA：AK＝____：____＝円柱：円錐＋球

これより、円柱(AZ)＝2（円錐(AEZ)＋球）

円柱(AZ)＝__________

したがって、3円錐(AEZ)＝2（円錐(AEZ)＋球）

つまり、

円錐(AEZ)＝________—①

ところで、

円錐(AB⊿)：円錐(AEZ)＝_____：_____

⇒_______________＝_______________—②

なぜならば、B⊿：EZ＝1：2であるから

よって①と②から、

8円錐(AB⊿)＝2球 つまり、_______________＝________—③

次に、底面が直径がΦΨ、XΩである円で、軸がAΓであるような円柱を考える。

円柱(ΦΩ)＝_____________—④

円柱(Φ⊿)＝_____________—⑤

④と⑤より

円柱(ΦΩ)＝__________—⑥

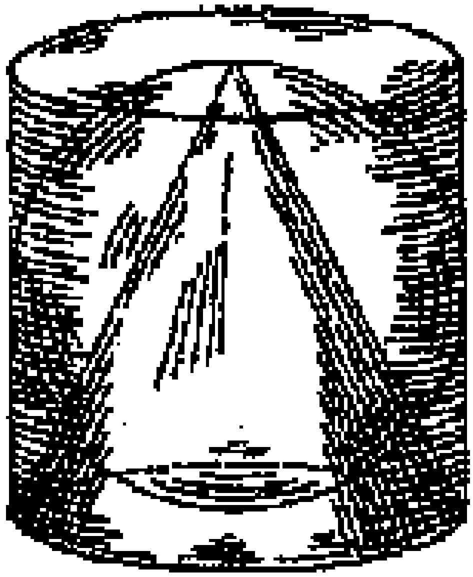
ここで、③と⑥より

円柱 $_{(\phi Q)}$ ＝＿＿＿＿＿―⑦

（証明終わり）

「球の大円に等しい底面と、球の半径に等しい高さをもつ円錐の４倍である。」は⑥で示された。

また、「球の大円に等しい底面と、球の直径に等しい高さをもつ円柱は、球の$1\frac{1}{2}$倍である。」は⑦で示された。



「アルキメデスの発見１」

右の図のような球に外接する円柱を考え、その中に円錐が含まれているとする。

すると、円柱：球：円錐の体積の比は

＿＿＿＿：＿＿＿＿：＿＿＿＿となるのである。