

数学者の新方法の公示による生徒の数学観の変容に関する一考察

～フェルマーの論文「極大および極小値研究のための方法」の解釈を通して～

[章構成]

筑波大学大学院修士課程教育研究科

1. はじめに...

青木 弘

2. 研究目的と方法

3. 授業教材の解説

要約

4. 授業概要

4.1 授業環境

4.2 単元名とその指導目標

4.3 授業展開

5. 考察(ディスカッション)

6. おわりに...

本研究では、一次文献である原典を読みながら追体験することで、微分の草創期にみられる問題とそれに対する創始者フェルマーのダイナミックな考えを教材として取り扱う。その結果、数学が絶えず連続して変化し、発展するものであると捉え、また新しい方法論によって、数学の問題が提起され切り拓かれると認知することから、生徒の数学観の変容を伺う。

1. はじめに...

今日の数学は、人間の様々な活動とかかわり合って創られてきたものであることや数学を文化との関連からとらえることを全く忘れてしまっているかのように思える。完成した数学のほうが、立派な価値をもっていて、整然としていて分かりやすいかもしれないが、創り出される過程のほうが数学に対する興味・関心をより高め、より身近なものとして認識できるため、教育的価値があると思う。

今日、数学史や数学史的な話題は、教師が指導する立場にとって、授業の導入や授業内容に関するトピックス、数学者のエピソード等を取り扱う程度のものであり、また教科書をみても各章のはじめや巻末に各章の内容に関係のある数学者のエピソードや業績が簡単に扱われている程度のものである。数学そのものを主体におくのではなく、それぞれの時代に様々な社会に生きていた人たちである、数学を用いた人・研究した人・学んだ人の側に立ってみると、数学は時代とともに、それぞれの社会の中であって、受け継がれ、特に他の地域との交流の機会があった場合には飛躍的に発達してきた。数学と社会は何かのかかわりを持ち、数学が社会にとって何であるか考えるきっかけとなるのではないだろうか。

フィールズ賞を受賞した、日本を代表する偉大な数学者である故小平邦彦氏(2000)は、『怠け数学者の記』の中で、次のように述べている。

私は数学の教育は、数学の歴史的発展の順序に従って、行うべきであると思う。...（中略）...歴史的に遅く現われた分野を子どもに教えようとするれば、その分野の本質的な部分は子どもに理解できないので、結局非本質的なつまらない部分を教えることになる。そして、つまらないことに多大の時間を費やして大事なことを教える時間が減り、数学教育が全体として非能率的になる。

また、竹之内脩氏(1999)は、『数学の教育内容をどう考えるか』の中で、次のようなことを言っている。

17世紀以降発展した科学技術は、微積分あつてのことである。そして数学も、17世紀以降大発展したのである。その中心となったものは微積分である。...（中略）...微積分のからむ問題には長い歴史がある。そこに人智の発展があり、それを歴史的教材として扱うというのであれば、これには大きな意義を認める。...（中略）...17世紀以降の数学が、なぜ大きな発展をとげることができたか。そういうことへの理解の道を与えていただくことが大切なことだろう。（下線筆者）

こういう観点から、数学独自の論理をもって発展する過程を、やや遠回りになるかもしれないが、微分の草創期にみられる問題とそれに対する創始者フェルマーのダイナミックな考えを教材として取り扱っていきたい。さらに、今回の高校数学の指導要領改訂(1999)には、コンピュータについて以下のように述べられているため、ぜひとも授業の中で、積極的にコンピュータを導入して、活用していくような働きかけを行いたいと考える。情報通信社会の進展する現代では多くの問題が数学的に整理され、コンピュータの活用によって解決されており、数学の果たしている役割は極めて大きい。そのため、数学教育でコンピュータなどを積極的に活用することも重要である。

2. 研究目的と方法

本研究では、以下を研究目的とする。

数学史文献を題材とする活動を通して、一次文献である原典から読み取られるような、かつて昔あった『数学』というものはこうだったと生徒自身がそれぞれ解釈し学習することから、それぞれ自分なりに理解し、また『数学』というものが人間の営みを通して構成されてきたものとして感得し、追体験できるか否かを明らかにする。さらにコンピュータ等の活用を含めて、近未来型の指導法の効果を明らかにする。

上記の目的を達成するため、以下を下位課題として設定する。

- 一次文献である原典を読みながら追体験することで、連続性・発展性を感じ取り、数学では絶えず新発見が行われていることを認知する。
- 新しい方法論によって、古い問題の鮮やかな解決が得られたことではなく、新しい数学の問題が提起され、新しい数学の分野が切り拓かれる、つまり、「新しい、まだ浸透していない考え方をどうやって相手に理解

させるか。」という問いに、どう対応するかを念頭において考える。

- 子どもが数学に対する見方を変え、数学が変化し、発展するものであると捉えられるよう、数学史を生かした指導を提案することである。
- 作図ツールを用いることで、幾何学的には放物線がどう書けるかを体験することで、視覚的に理解できる。また、求めた答えを吟味するために、作図ツールを用いることで、視覚的に確認できる。

なお上記の研究目的や下位課題に対する研究方法として、授業前後の事前アンケート・事後アンケート、ワークシートを兼ねた授業資料、および授業の様子を撮影したビデオにより、生徒の数学観に対する変容を調べる。

3. 授業教材の解説

本研究では、フェルマー(P. de Fermat, 1601-1665)が1629年に書いたものとされている最も初期の極大極小論の論文『極大及び極小値研究のための方法^{*1}』(1629)を考察の材料としてあげていきたい。

数学の歴史においてもっとも創意工夫に富んだ世紀といえるのは、17世紀と考える。その17世紀から18世紀末にかけての間でつくられたのが、微分学である。微分学の中で欠くことはできないのは、曲線の接線であろう。しかし17世紀までの間ずっと、接線に関する問題は、系統的には研究されず統一した方法もとられていなかったのである。なぜなら、ユークリッド(Euclid, B.C. 300頃)は『原論』の中[第3巻第17命題以降]で、円の接線^{*2}について、アルキメデス(Archimedes, B.C. 287-212)は『方法』の中で、螺旋への接線について、またアポロニウス(Apollonius, B.C. 262-200)は『円錐曲線論』の中で、楕円・双曲線・放物線への接線について詳しく展開されているが、平面上の一般的な曲線を考えて、その曲線上にあるどんな点でも、そこを接点とするような接線の作図方法は確立されてはいなかった。いわば幾何学的な曲線であり、静的である。

そこで、フェルマーは独自の極値の求め方を研究し、「仮に極値が求まったと仮定する(今日で言えば極限を代入して求める方法に通じる)」議論を展開する。ここで興味深いことは、曲線の極値を話題にする際に周長を固定した長方形の面積を最大にする図形は正方形であることを題材に、その解説をはじめた点である。 $f(x)$ が極値をとる x の値の付近では関数の値の変化は、極めて緩慢である。そこで e を極めて小さい値とすれば $f(x)$ $f(x+e)$

*1 仏語で「Methodus ad disquirendum maximum et minimum」、英語で「MAXIMA AND MINIMA」

*2 接線の定義は「円と1点のみを共有し、それ以外の点では共有しない直線」としている。

($+e$)という近似等式が作れる。両辺を整理して共通の項を消去した後、全体の共通因数 e で割り、なお e を因数に含む項を抹消すると、 e が求められる。しかし、この e は不詳である。たとえ微小な値でも真の 0 でないなら抹消することができないし、0 であるなら共通因数 e を約すことが許されない。 e は 0 でありそうでもあり、0 でなさそうでもある。反対に 0 であってはならず、0 以外であってもしなければならない。つまり、フェルマーは、無い数を「あるものとして」考察していき (その差を E とおいている)、最後に「あるものとして」計算した数を消去するというダイナミックな考えを行う事で、極大や極小を得ることができると述べている。実際、極限や導関数の概念をはっきりとは定式化してはなく、十分に明瞭明快に説明することもできていなかった。がしかし、変数値をわずかずつ変えて近傍値を考慮するフェルマーの手法は、仮説を実践によって単に検証するだけでは、そこに誤りがないかどうか絶対的な確信がなかったため、厳密な数学的基礎付けの問題が提起されたことになり、以後ずっと極値を求める最初の体系的な無限小^{*3}解析の基本となったのである。

この無限小解析の方法を数学に導き入れたことは数学全体を急速に変え、数学の役割を高め、自然科学の体系の中に数学を組み入れるという数学における大きな革命的な転換の基礎となった。フェルマーの e は、近代微積分の草創期における無限小概念の典型的な使われ方をしていることになる。また、無限小解析は 1 人の学者によって考え出されたものではなく、そうだからといって数人の学者の手によったものでもなく、また天才的な洞察によるものでもなかった。つまり、実に長い過程を経てはじめて完成されたものであることを忘れてはならない。

以上から、授業で取り扱う教材は、全く新しい題材であるよりも、生徒がある程度、習熟しているものであることが望ましいと考えられるため、本研究では、数学『微分法』を既習している生徒を対象とした。なぜなら、ある題材を歴史的な観点からみるということは、反省的な観点からみるということでもあるからである。そのため、本研究授業における生徒の活動に焦点を当てた一連の流れとしては、以下の通りである。

設定された問題を現代の考え方で、答えを求めてみる
一次文献である原典を読みながら、当時の人の考え方を追体験して、理解する。
自分の知識と 17 世紀前半の考え方とを対比して何か不思議な所を探してみる。

*3 『無限小』という語を定義するのは 19 世紀に入ってからである。コーシー(Cauchy, 1789-1857) は、 n 個の変数の絶対値が、限りなく減少し、どのような値を与えても、それよりも小さくなる、というときには、この変数は『無限小』であるとか、限りなく小さい量であるとか名づけられているものになる。」19 世紀になって今日の微積分学が体系化されるのである。

4 . 授業概要

4 . 1 授業環境

- 1) 対象 筑波大学附属高等学校 第2学年 有志 5名(男2女3)
- 2) 時間数・実施月日 3時間(50分×3)・平成12年12月4日(月)・7日(木) 放課後
- 3) 準備 コンピュータ(Windows)6台, 作図ツール(Cabri Geometry), ビデオプロジェクター1台, Microsoft Power Point 2000, 事前アンケート, 事後アンケート, ワークシートを含む授業資料

4 . 2 単元名とその指導目標

数学 『微分法』より「無限小解析における接線の考え方」

その指導目標としては

「フェルマーが1629年に書いたとされている最も初期の極大極小論の論文『極大および極小値研究のための方法』の一次文献である原典の解釈を通して、フェルマーにおける『無限小』の取り扱いをフェルマーの接線論に見だし、巧みに用いて体感することで、今日の微分積分学の中にある接線の方程式の導き方と対比して、その根源にあたることを確認したい。」

特別鑑賞資料

1. 極大極小問題

図1

図2

図3

図4

図5

図6

図7

図8

図9

図10

図11

図12

図13

図14

図15

図16

図17

図18

図19

図20

図21

図22

図23

図24

図25

図26

図27

図28

図29

図30

図31

図32

図33

図34

図35

図36

図37

図38

図39

図40

図41

図42

図43

図44

図45

図46

図47

図48

図49

図50

図51

図52

図53

図54

図55

図56

図57

図58

図59

図60

図61

図62

図63

図64

図65

図66

図67

図68

図69

図70

図71

図72

図73

図74

図75

図76

図77

図78

図79

図80

図81

図82

図83

図84

図85

図86

図87

図88

図89

図90

図91

図92

図93

図94

図95

図96

図97

図98

図99

図100

図101

図102

図103

図104

図105

図106

図107

図108

図109

図110

図111

図112

図113

図114

図115

図116

図117

図118

図119

図120

図121

図122

図123

図124

図125

図126

図127

図128

図129

図130

図131

図132

図133

図134

図135

図136

図137

図138

図139

図140

図141

図142

図143

図144

図145

図146

図147

図148

図149

図150

図151

図152

図153

図154

図155

図156

図157

図158

図159

図160

図161

図162

図163

図164

図165

図166

図167

図168

図169

図170

図171

図172

図173

図174

図175

図176

図177

図178

図179

図180

図181

図182

図183

図184

図185

図186

図187

図188

図189

図190

図191

図192

図193

図194

図195

図196

図197

図198

図199

図200

図201

図202

図203

図204

図205

図206

図207

図208

図209

図210

図211

図212

図213

図214

図215

図216

図217

図218

図219

図220

図221

図222

図223

図224

図225

図226

図227

図228

図229

図230

図231

図232

図233

図234

図235

図236

図237

図238

図239

図240

図241

図242

図243

図244

図245

図246

図247

図248

図249

図250

図251

図252

図253

図254

図255

図256

図257

図258

図259

図260

図261

図262

図263

図264

図265

図266

図267

図268

図269

図270

図271

図272

図273

図274

図275

図276

図277

図278

図279

図280

図281

図282

図283

図284

図285

図286

図287

図288

図289

図290

図291

図292

図293

図294

図295

図296

図297

図298

図299

図300

図301

図302

図303

図304

図305

図306

図307

図308

図309

図310

図311

図312

図313

図314

図315

図316

図317

図318

図319

図320

図321

図322

図323

図324

図325

図326

図327

図328

図329

図330

図331

図332

図333

図334

図335

図336

図337

図338

図339

図340

図341

図342

図343

図344

図345

図346

図347

図348

図349

図350

図351

図352

図353

図354

図355

図356

図357

図358

図359

図360

図361

図362

図363

図364

図365

図366

図367

図368

図369

図370

図371

図372

図373

図374

図375

図376

図377

図378

図379

図380

図381

図382

図383

図384

図385

図386

図387

図388

図389

図390

図391

図392

図393

図394

図395

図396

図397

図398

図399

図400

図401

図402

図403

図404

図405

図406

図407

図408

図409

図410

図411

図412

図413

図414

図415

図416

図417

図418

図419

図420

図421

図422

図423

図424

図425

図426

図427

図428

図429

図430

図431

図432

図433

図434

図435

図436

図437

図438

図439

図440

図441

図442

図443

図444

図445

図446

図447

図448

図449

図450

図451

図452

図453

図454

図455

図456

図457

図458

図459

図460

図461

図462

図463

図464

図465

図466

図467

図468

図469

図470

図471

図472

図473

図474

図475

図476

図477

図478

図479

図480

図481

図482

図483

図484

図485

図486

図487

図488

図489

図490

図491

図492

図493

図494

図495

図496

図497

図498

図499

図500

図501

図502

図503

図504

図505

図506

図507

図508

図509

図510

図511

図512

図513

図514

図515

図516

図517

図518

図519

図520

図521

図522

図523

図524

図525

図526

図527

図528

図529

図530

図531

図532

図533

図534

図535

図536

図537

図538

図539

図540

図541

図542

図543

図544

図545

図546

図547

図548

図549

図550

図551

図552

図553

図554

図555

図556

図557

図558

図559

図560

図561

図562

図563

図564

図565

図566

図567

図568

図569

図570

図571

図572

図573

図574

図575

図576

図577

図578

図579

図580

図581

図582

図583

図584

図585

図586

図587

図588

図589

図590

図591

図592

図593

図594

図595

図596

図597

図598

図599

図600

図601

図602

図603

図604

図605

図606

図607

図608

図609

図610

図611

図612

図613

図614

図615

図616

図617

図618

図619

図620

図621

図622

図623

図624

図625

図626

図627

図628

図629

図630

図631

図632

図633

図634

図635

図636

図637

図638

図639

図640

図641

図642

図643

図644

図645

図646

図647

図648

図649

図650

図651

図652

図653

図654

図655

図656

図657

図658

図659

図660

図661

図662

図663

図664

図665

図666

図667

図668

図669

図670

図671

図672

図673

図674

図675

図676

図677

図678

図679

図680

図681

図682

図683

図684

図685

図686

図687

図688

図689

図690

図691

図692

図693

図694

図695

図696

図697

図698

図699

図700

図701

図702

図703

図704

図705

図706

図707

図708

図709

図710

図711

図712

図713

図714

図715

図716

図717

図718

図719

図720

図721

図722

図723

図724

図725

図726

図727

図728

図729

図730

図731

図732

図733

図734

図735

図736

図737

図738

図739

図740

図741

図742

図743

図744

図745

図746

図747

図748

図749

図750

図751

図752

図753

図754

図755

図756

図757

図758

図759

図760

図761

図762

図763

図764

図765

図766

図767

図768

図769

図770

図771

図772

図773

図774

図775

図776

図777

図778

図779

図780

図781

図782

図783

図784

図785

図786

図787

図788

図789

図790

図791

図792

図793

図794

図795

図796

図797

図798

図799

図800

図801

図802

図803

図804

図805

図806

図807

図808

図809

図810

図811

図812

図813

図814

図815

図816

図817

図818

図819

図820

図821

図822

図823

図824

図825

図826

図827

図828

図829

図830

図831

図832

図833

図834

図835

図836

図837

図838

図839

図840

図841

図842

図843

図844

図845

図846

図847

図848

図849

図850

図851

図852

図853

図854

図855

図856

図857

図858

図859

図860

図861

図862

図863

図864

図865

図866

図867

図868

図869

図870

図871

図872

図873

図874

図875

図876

図877

図878

図879

図880

図881

図882

図883

図884

図885

図886

図887

図888

図889

図890

図891

図892

図893

図894

図895

図896

図897

図898

図899

図900

図901

図902

図903

図904

図905

図906

図907

図908

図909

図910

図911

図912

図913

図914

図915

図916

図917

図918

図919

図920

図921

図922

図923

図924

図925

図926

図927

図928

図929

図930

図931

図932

図933

図934

図935

図936

図937

図938

図939

図940

図941

図942

図943

図944

図945

図946

図947

図948

図949

図950

図951

図952

図953

図954

図955

図956

図957

図958

図959

図960

図961

図962

図963

図964

図965

図966

図967

図968

図969

図970

図971

図972

図973

図974

図975

図976

図977

図978

図979

図980

図981

図982

図983

図984

図985

図986

図987

図988

図989

図990

図991

図992

図993

図994

図995

図996

図997

図998

図999

図1000

フェルマーの業績

17世紀に近代数学において、数論(整数論)』といわれる分野の創始者(例) 1995年に350年以上も数学者を悩ませて続けた「フェルマーの大定理^{*5}」が証明された。

解析幾何学つまり図形の問題を数式で表現しようと考えた創始者の一人(デカルトと共に)
例)「2変数の二次式はすべて円錐曲線をあらわす」を証明した。

確率論

- サイコロ賭博の勝敗に関する問題が理論的確率論の出発点。
- インドからヨーロッパへ伝えられた魔方陣の研究

微分積分学

論理的には不十分ながら、接線や極値を求める方法や曲線 $Y = x^n$ の下の部分の面積を求める方法を考案。

その他

座標の方法の一般数学的意義を発見

4.34. 授業展開

4.3.1 フェルマーの極大・極小(1時間目)

授業の内容(授業資料)に入る前に、この講座でこれから取り扱うフェルマーについての基本的な知識^{*4}と業績について、紹介をした。(Microsoft Power Point 2000 スライドショーを用いて)なお、授業中にフェルマーの業績について触れた部分は、左枠に記した通りである。次に授業資料(ワークシート)を開き、問題1を生徒各自、今まで培った数学の知識をフルに用いて考えてもらった。(約5分間)

[注意] 生徒が実際に手を動かして、答えを見出してもらうことで、後に取り扱うフェルマーの解法と対比することができる。

問題1; 与えられた線分を二つに折って、その二つを縦、横とする辺で長方形を考えると、その面積を最大にするには、どのように折ったらよいか。つまり、言い回しを変えると、線分ACを点Eで二つに分けて、線分AEと線分ECを縦、横の辺とする長方形の面積を考えたとき、その面積が最大となるのは点Eがどこにあるときか。

以下はその後の生徒とのやり取りの様子である。
授業者:「答え」と「どういう方法を使って考えたのか」を教えてください。

生徒1:線分ACの中点。二次関数としかいえないな。...
出てきた面積の式を因数分解みたいな形^{*6}にかえて考えました。

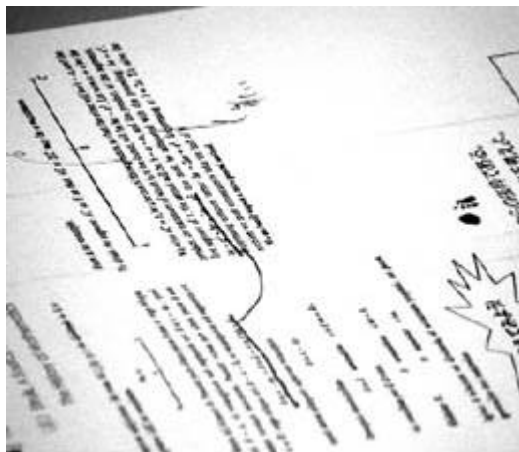
生徒2:ACの中点。2次関数かな。

回収したワークシートをみたら、生徒全員が「二次関数の最大最小の問題」と認識して解いていた。

^{*4} 例えば、いつの時代に生きていて、どこの国の人で、同時代に生きていた人は誰か。またどういう職種の人か、など。
^{*5} (命題)与えられた平方数を二つの平方数の和に分解する、すなわち、 Z^2 が与えられると方程式 $Z^2 = x^2 + y^2$ をみたす整数 x, y を求める。(「ディオファントスの数論」より)
「フェルマーの大定理」はこれを拡張して、「 n (3(n整数)のとき $x^n + y^n = z^n$ をみたす自然数 x, y, z は存在しない」)
^{*6} (この生徒のワークシートを見る限り、)平方完成のことを言いたかった様子。



この問題1をフェルマーは一体どうやって考えたのかを理解させる。その際、一次文献である原典となる文章を題材として、実際に読み進めていきたい。その際、二つの文章を引用した。左にはフランス語で書かれた文章(仏文)と右には英語で書かれた文章(英文)を載せた。そして、次のような発問をした。



授業者：フランス語の辞書やフランス語の構文なんかを使わなくても十分君たちでもわかることがある。つまり、左と右の文章と対比して、何となく照らし合わせてみると、これがこのことを表しているのではないかな・・・とわかる部分がある。ではみんな、これから探偵さんになってもらって、いったい左の仏文のどれが右の英文のどこに相当しているか、何を表しているか、考えてみて下さい。(約3分程度)

その後、結果を合わせてみたら、全員の答えが一致していた。では、一次文献である原典の内容に移りたいと思うが、右の英文を全部和訳させたり、ましてや日本語訳の文章を皆で読んだりするのもつまらないと思い、穴埋め形式のページを用意し、次のように発問を試みた。



授業者：数学の問題を解いているように、日本語訳の文章を途中、語句をおりまぜながら、数式を並べた表記にかえてほしい。もし日本語訳がを読んでも分からない所は、英文に戻って考えてみて下さい。(約7分程度)

その後、穴埋めの結果を生徒に当てながらフェルマーの考え方を解説していった。その中で、誰もが悪戦苦闘していたのは、空欄^{*7}である。生徒の空欄の回答は、以下の通りである。これを見れば明らかだが、様々な結果である。

生徒A； eは決まっていないから、どんな数でもよいので、eを0に限りなく近くとすると

生徒B； $\lim_{e \rightarrow 0} (b - 2a - e) = 0$

生徒C； e = 0を代入すると

生徒D； eを近似的に0とすると

生徒E； eを削除すると

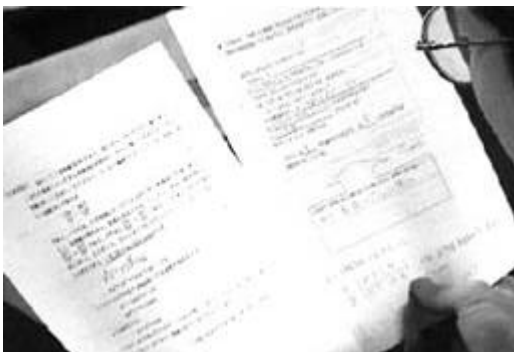


*7 空欄の前後関係は、「 $b - 2a - e = 0$ 、 、 $b - 2a = 0$ 」

4.3.2 フェルマーの接線法 (2時間目)

< 授業者 青木の解釈 >
~ 設問 に対して ~

- 最初に e は 0 でない
極めて小さい数として導入しながら、最後にそれを無視して 0 にしてしまうなど、理論的には不完全なものである。
- フェルマーは「 e に限りなく小さくする」という表現は使っていないので、極限の考えはまだない。



解説後、次のような生徒の声を耳にした。

- 『何で、このとき最大になるの?...全然わからない。』
『(これでは)求まってないよ -。』
『わかるような、わからないような...』
『これってホント? 明らかにおかしいよ。』

そこで、次のような問いに答えてもらった。

(問題 1 を終えて...)

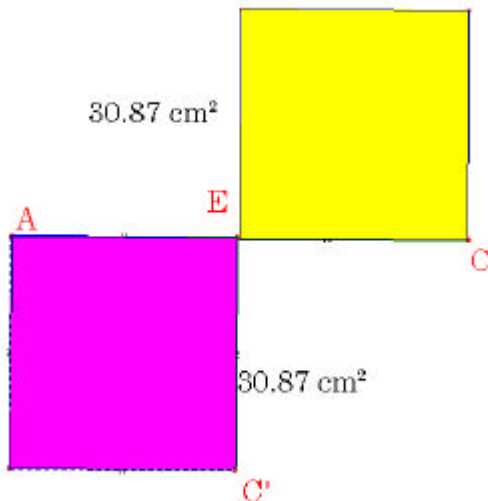
上の解法で、何か不思議に思ったこと、違和感を覚えたことがあったら自由に述べよ。何が、これまでにない、フェルマー特有の考え方だろうか。

- 生徒 A ; e を除去する。長方形の面積。
 e を除去する。 e を入れた場合を考える。
- 生徒 B ; これが最大とは限らない。そもそも最大といえる理由は? (しかも日本語訳では、いきなり e を除去すると書いてあるので、へっ? と思った。) ‘この部分(右図の塗りつぶしてある部分)の面積の差がたいしてない’ ということ。
- 生徒 C ; ‘ $a+e$ になったとき、長方形の面積にほとんど変化がない’ ということ。
 $e = 0$ としておきながら $e = 0$ としている。
- 生徒 D ; 何で、これで最大が求まっているのか。何で a に不足線分を $+e$ とおいてそれを 0 とするとき、式が変わっているのか。
似的なものを考えること。
- 生徒 E ; 空欄 で、 e が削除できる、すなわち $e = 0$ ならば、空欄 で両辺を e で割ってもよいのか。
 e を「ほとんど大きさのない数」とおくこと。

ここで、ちょっと話題をかえて、次のようなことを発問して、生徒に考えさせてみた。

授業者 :ある日あなたが、これまでにない目新しい方法が見つかり、これを誰か相手側に伝えるも全く聞き入れてくれないとする。そんな時、新たな手段を考えて、その方法をどうにか伝えたい。あなたなら、どうしますか。

- 生徒 1 ; 力づくで伝える。
生徒 2 ; 身の回りのものを使って説明する。
証拠を見せるとか証明するとか...
生徒 3 ; 実践する。
生徒 4 ; 何か、ものを使って示す。



授業者：こうしたら、どうだろう。

誰もが知っている題材を違う新しい言い方にかえる。つまり、『新しい、こういうやり方があるよ』というのではなく、『これまでにある結果を、異なる新しい方法を使って言い換えても、やっぱり同じでしょ。だからこの方法は正しいよね。』そこで、参考資料1をみてほしい。この第27命題は、ユークリッドが既に示していて、明らかになっている。この命題と皆に考えてもらった問題1とは同じものと考えてよさそうだから、フェルマーが考えた方法も、新しいやり方として認めることができそうだね。

このフェルマーの新しい考え方を、後でも使って、論を転じている。次に、2次元から3次元に次元を上げた、以下の問題2ではどうだろうか。この問題2は先程の問題1と同じ手順で取り組めるようにワークシート作成したため、次回までの宿題とした。そのため、問題2は紹介にとどめるだけにしたい。

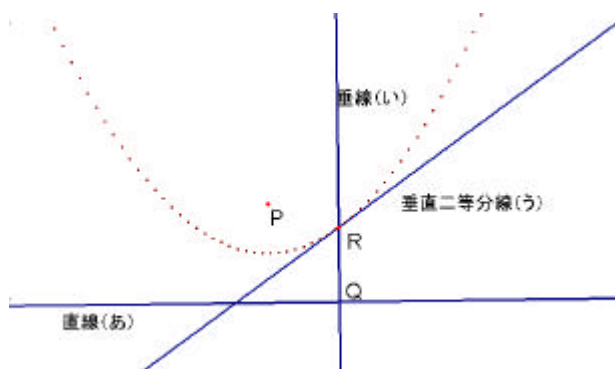
問題2 与えられた線分ACを点Eで切断し、線分AEを一辺とする正方形の上に、これを底面とする直方体を作図し、その高さを線分ECと考えると、その体積が最大となるには、どのように二つに分けたらよいか。

つまり、言い回しを変えると、与えられた線分ACを点Eで内分するとき、 $AE^2 \times EC$ が最大となるようなAC:AEの比を求めよ。

問題3にはいる前に、生徒にこれから活動させる作図ツールであるCabri Geometry^{*8}の紹介も兼ねて、まず問題1の結果を実際、視覚的に確かめることをした。

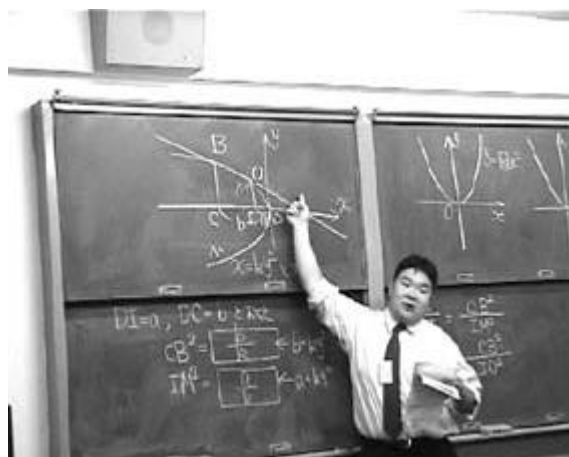
次に、Cabri Geometryを用いて、放物線を作図することを生徒の活動とさせたい。しかし数学C『二次曲線』は未習であるため、まず放物線の幾何的な定義を教えた後、次のような手順で生徒と同時平行しながら行った。

^{*8} Cabri Geometry は、Texas Instruments 社の登録商標である。



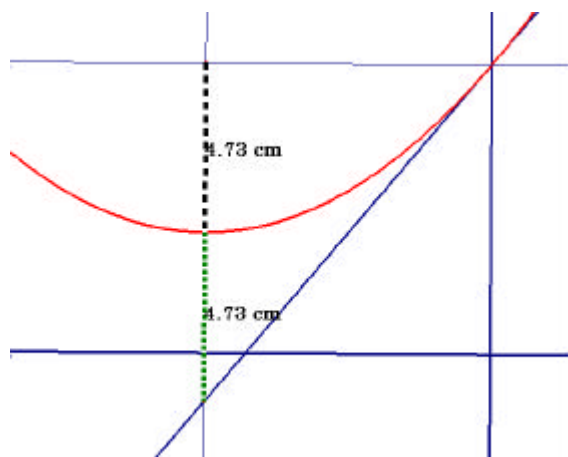
[手順]

好きな所に点Pを打つ。
 点Pと離れた所に直線(あ)をひく。
 直線(あ)上に点Qをうち点Qを通る垂線(い)をひく。
 点Pと点Qの垂直二等分線(う)をひく。
 垂線(い)と垂直二等分線(う)の交点を点Rとおく。
 トレースのボタンを押し、点Rをクリックして、点滅させたらつまんで動かすと、放物線の概要が見える。
 軌跡のボタンを押し、点R、点Qの順にクリックすると放物線が書ける。



4.3.3 フェルマーの接線法 とバロウの接線法 (3時間目)

問題3をフェルマーは一体どうやって考えたのかを、問題1と同様、一次文献である原典となる文章を題材として実際に読み進めていきたい。しかし、数式で言いかえた方が明瞭かつ簡潔であり、考えやすくするため、現代の表記である x, y の座標平面で考えさせ、解説をした。



解説後、Cabri Geometry を用いて簡単に2時間目で行った放物線の作図の仕方を振り返った後、問題3の結果が実際、本当に等しい関係になっているか、視覚的に確かめることをした。さらにまた、問題1と同様に、自ら提案する方法が有効であることを確かめるため、当時、既存の方法を利用している。すなわち、問題3の結果について、「アルキメデス方法」の命題4(参考資料2)の中に記されているため、既知であったといえる。

問題3を終えて、前回の問題1と同様、次のような発問をした。

授業者；上の解法で、何かあいまいに感じるものがあたら、自由に述べよ。

生徒A：何でeを除去するのか。

生徒B：もともと接線はあると仮定している所から、
話がはじまっている所。

生徒C：eの存在。

生徒D：またeを0とおいている！

生徒E：やっぱり空欄，での‘e’の扱い。

< 授業者 青木の解釈 >

- 接線とは、限りなく近い2点を結んだものという考えに立っているが、限りなく近いから「一致する」とはならないため、この点があいまいのままである

問題4に入る前に、アイザック・バロウ[Issac Barrow](1630-1677,イギリス)の人物や業績について紹介をした。(Microsoft Power Point 2000 スライドショーを用いて)その際、バロウは「まず始まりとして、自分で手を動かしてみることを強調していることを述べた。

これまでと同様、問題4の原典である英文やその日本語訳をヒントとして、実際に今日の数学の問題として、空欄に必要な数式や語句を並べて、記述させた。このバロウの方法として特徴的なことは、微小な三角形とフェルマーのEとを巧みに結びつけたことや、変数の微小変化eに対する関数値の変化aをとって、 a/e という微小量の比が現れることが挙げられる。その後、この問題4のバロウの方法と、先程の問題3のフェルマーの方法とを比較して、相違点と共通点を、自由に述べさせてみた。

これを箇条書きで記すと・・・

< 相違点 >

- eのような存在が2つでてきた。
- eだけでなく、aも0とおいている
- 「eで割る」という作業がない。
 だけど、 $e=0$ とおいている？
 でも、 a/e ということだから、
 やっぱり $e=0$ ？

< 共通点 >

- MRN MTPと考えているから、
 eの存在をうまく使っている。
 1つの点における、固定点の接線が
 最初に引かれている。
- 図形的
- 非常に微小な値eをおき、
 それを無視する方法

< 授業者 青木の解釈 >

[相違点]

- フェルマーが唯一つの微小量を用いたのに対し、バロウは、二つの微小量を使って、接線を決定する方法を考えた。

[共通点]

- 接線とは、曲線と唯一点を共通するものであるという
 固定的、静的接線観に
 基づいている。

5 . 考察 (ディスカッション)

教育における数学史の利用の考察にあたって、二つの両極の存在が明確になると磯田正美氏 (1987) は考える。

一つの極は数学の学習のための教育的配慮を主眼にし、数学の形成史を意識しない立場であり、もう一つの極は、形成の立場からの数学史の学習が数学自身の理解に結びつくという立場である。しかし、数学学習の過程を、『 どうしてこういうことを考えたのか? 』 というように、子ども自身が疑問符による活動を通じて数学の形成過程の追体験 (同じ体験を意味しない) の場として構成し、数学のもつ創造的な人間活動を通じての人間形成にあるために、数学史を利用しようとする新たな立場の設定が必要である。この活動から、数学史に対する真の理解をもたらすと共に、創造的な活動としての数学に対する理解、数学的な思考方法の理解を深め、さらには数学 (教材) の正しい認識にたつて授業を進める事がより可能になる点として意義がある。

これより以下、一つひとつ下位課題について考察していく。

[課題 1] 一次文献である原典を読みながら追体験することで、連続性・発展性を感じ取り、数学では絶えず新発見が行われていることを認知する。

以下のアンケートの抜粋である。

- 人によって、一つのことを証明するのに、いっぱい方法があるのだなあ。
- 昔のいろんな人が、いろんなやり方を考えていた中の一つを学んでいたんだなあと思った。
- 長い歴史の中の数学への人々の認識の移り変わりを見ることができた。
- 今、当たり前前に証明できるものも、長い歴史の中で試行錯誤して編み出された証明なのだろう。

これより生徒は数学の連続性・発展性を感じ取ることができたと認識でき、数学観の変容がうかがえる。上野健聖氏 (2000) は、数学の難しさについて以下のように述べている。

数学の概念を教えるのが何故、難しいかは数学史を見てみたら分かる。数学の非常に基本的な概念というのは何百年、何千年かかって出てきているわけです。そういうことを知った上で教えるのと知らずに教えるのでは随分、違うんじゃないかという気が最近してきているんです。

また私が、敢えて一次文献である原典にこだわる理由として

「数学史研究が陥りやすい陥? が 2 つある。1 つは、資料を解読する際、歴史の隔りを見無視して、現代的表現におきかえ、現代の立場から評価を下してしまうこと。そしてもう1 つは、その反対に、異文化間の翻訳の不可能性の看板を掲げて、資料の現代的分析を怠るということである。」と、長岡亮介氏 (1987) は述べている。

[課題 2] 新しい方法論によって、古い問題の鮮やかな解決が得られたことではなく、新しい数学の問題が提起され、新しい数学の分野が切り拓かれる。つまり、新しい、まだ浸透していない考え方をどうやって相手に理解させるか」という問いに、どう対応するかを念頭において考える。

以下は、生徒のアンケートの抜粋である。

- 数学的発想ができなかった。
- 彼らの思考回路が謎だった。(別に、納得できない訳ではないが・・・)
- 私の数学的センスのなさのせいのような複雑な気分が苛まれて仕方がない。
- 理屈の分からないまま、「こうだから」と言われて、とりあえずやってみるだけのことが多すぎた。

これより、自ら提案する方法がダイナミックな方法であればあるほど、直ちに受け入れて吸収し、認識することは極めて難しいといえる。磯田正美氏(1999)は「当時の方が納得できる事例で、自ら提案する方法が有効であることを確認した上で、未知の場合へと議論を進めている。」という。さらにこのことをもっと掘り下げて数学者の意図・目的について、次のように述べている。

数学の再構成、新数学の創造を目論んだ数学者は;

- 新しい方法を持っていた。
- その新方法は既存の方法より強力であると信じていた。
- 新方法による結果は既存の方法で支持されるべきことを知っておりその数学者においても二つの方法は併存していた。

社会的な視野から述べれば、次のように言える。

他の人々はその数学者の新方法を必ずしも知らなかった。

新方法を知る数学者は、知らない人々へ新方法を広めようとした。

新方法を知る数学者は、知らない人々に新方法を説明し、よく知られた既存の方法でその妥当性を確認した。

上記の意図目的の記述から、新数学創造を目論んだ数学者は、既存の数学から新数学を抽象したわけではなく、既存の数学で妥当性を確認することを通じて新数学の創造を進めたことがわかる。

[課題 3] 子どもが数学に対する見方を変え、数学が変化し、発展するものであると捉えられるよう、数学史を生かした指導を提案することである。

以下の生徒のアンケートの抜粋は、生徒が数学に対する見方や姿勢が変わったと思われる箇所である。

- 数学というのは、昔の誰かが思いついたやり方を昔から今までずっと習うものだと思っていた。
- まだ、完成されていない計算方法に触れることで、今「公式」として受けている様々な知識を「疑ってかかる」姿勢を持てた。
- 主体的に学ぶ姿勢に欠けていたのかもしれない。与えられた「穴埋め問題」しか問けない。自分で文献を探し、問いていくことがこれからの課題だと思う。

またある生徒は自ら、以下のような自分なりの解釈をもつことができた。「今では“e”みたいな存在をあやふやなままにしているが、今後、もし優秀な数学者が現れて、“e”の存在を確立、または、くつがえすような発見をしたら、面白い。でも、“e”があやふやだと私が思うのは、昔の人に比べて、デジタルな世界に生きている現代人だからかもしれない。」

結果的に、数学というものを生徒は、以下のような学問だと捉えたようである。

- 認識を変えるきっかけがあるとすんなり理解できたりするようなところもある学問。
- 様々な事象を「数」という常に確実なものを頼りに、より単純に、より一般的に広げ、多くの事象をできるだけ少ない法則によって、説明しようとする学問。

先行研究の事例から数学史が指導において、沖田和美氏()は、多様な面で生かせることを次のように述べている。

先人が獲得するのに困難とした内容から、子どもが学習する際に困難とする所を予感する。(グローバルな視点から見たある概念の獲得の歴史)

数学の厳密さとともに、創造の過程を知らせる、あるいは体験させる。(厳密さを求めて発展する数学の歴史)

内容ごとの有機的つながりを知らせる。(歴史から分かる数学の有機的つながり)

内容のよりよい理解を助ける。(歴史から分かる数学の異質性)

文化としての価値を示し、動機づける。(数学の文化や科学との関わり)

数学者たちの努力を示し、数学をすることへの自信を与える。(歴史上の数学者たちの努力)

数学史を扱う場合の指導上の留意点を松尾孝司氏(2000)^{*9}は簡単ではあるが、次のようにまとめている。

いわゆる『数学史のお話』になることのないよう、生徒の活動等を入れながら指導していくことが大切である。

レポートによる評価を取り入れるなど、評価の方法を工夫することが必要である。数学の歴史を扱う場合、取り扱う内容が史実なのか伝承なのかを指導者が確認しておく必要がある。

[課題 4] 作図ツールを用いることで、幾何学的には放物線がどう書けるかを体験することで、視覚的に理解できる。また、求めた答えを吟味するために、作図ツールを用いることで、視覚的に確認できる。

本研究の授業で、生徒が一番の印象として挙げるものを以下に記す。

- パソコンを使って、接線を書けたのが楽しかった。
- コンピュータは素晴らしい。未来の黒板はスクリーンだ！
- あのソフト(カブリ)はすごい。

また、「数学をするときに、どんなものを使うか」という問いに対して、事前・事後を見比べると、ある生徒は、「カブリ」と書き加えていた。これより、コンピュータのソフトを用いた授業がいかに新鮮で、印象的であったのかがわかるだろう。コンピュータが生徒の学習の補助となる場合を考えて、コンピュータのシミュレーション機能を活かした図形処理ソフトは生徒の主体的な問題解決学習に役立てられ、主体的に考えを進めようとする学習姿勢には必要不可欠である。しかし、それが十分でないと、教師がコンピ

^{*9} 吉田明史・飯高茂編著「高等学校学習指導要領の展開 数学科編」(2000・8,明治図書)

ユータを使って問題解決の方法を生徒に教え込んでしまうという危険性をもっていることに注意しなければならない。

6 . おわりに...

本研究では、微分の草創期にみられる問題とそれに対する創始者フェルマーのダイナミックな考えを教材として取り扱ってきた訳だが、さらに視野を広げると、次のような微分の応用問題が取り上げられる。ケプラー(Kepler, 1571-1630)がブドウ酒を樽で買ったとき、商人がブドウ酒の樽の側面の中央から樽底の一端にあたるまで斜めにもものさしを入れて測るだけで、樽の容量を計算しているのをみて、大変不思議に思い、樽の寸法を調べてみると、どの樽も底面の直径と高さの比が大体2:3になっているという結論を出したという。その結論を出す経過がケプラーの「葡萄酒樽の新しい立体幾何学^{*10}」(1615)に書かれているため、これを教材化してみるとよい。

また、接線法において割線の極限として動的に見る考え方で、話が展開されているデカルト(Descartes, 1596-1650)の「幾何学」(1638)を授業教材として取り扱うのも、おもしろい。竹之内脩氏(1999)は、微積分の中で他にもぜひ取り上げてみたい項目として、以下のようにあげていると同時に、ぜひ先生の見識で生徒の発展の芽を育てていただきたいと述べている。(括弧内引用者注)

- 17世紀はじめのガリレイ(Galilei, 1564-1642)、ケプラーの偉業
- 日常の現象としての速度、加速度などの意味
- 積み重ねで面積、体積などの計算
- ニュートン(Newton, 1643-1727)、ライプニッツ(Leibniz, 1646-1716)による微積分学の確立
- 19世紀はじめのフーリエ(Fourier, 1768-1830)によるフーリエ展開の創始。
その前に、交流などを通じての正弦波の導入、あるいは三角法の長い歴史。

また、他の授業展開の仕方として、磯田正美氏(1987)は以下のように、提案している。

「生徒の差分法の発想を微分の考えに改めることを目指して、考察の場面に教材として、ガリレイの『新科学対話』を選び、授業へ活用することも考えられる。」

数学者の知的な営みの偉大さは感じ取れるが、その一方、数学史を学んだからといって必ず、数学が面白くなるという訳ではない。学校で数学史を主とする教材を取り扱うのは有限であり、また一連のものの中の1つだけを取り上げたにすぎない。安藤洋美氏(1999)は、『数学史導入にあたっての懸念』の中で、次のようなことを述べている。

*10 独語では「Nova streometria doliorum vinariorum (1615)」

数学の知識を前提としない数学史などありえない。とすれば、高校に数学史を導入するとすれば。最も高度の数学的知識を与える教科目の中に入っていないならば、効果は期しがたい。

また、数学の面白さは、別にもたくさんあることを忘れてはならない。数学史全般に対して、どういう位置付けにしていくか定まっていなくても、数学者と数学史の専門家が知識を共有してよりよい教材化をしていく必要があると思う。

謝辞

研究授業の実践に際して、国立筑波大学附属高等学校の数学科主任の川崎宣昭先生をはじめ、数学科の飯島忠先生、大野昭次先生、利根川誠先生、中田庸男先生、矢野一幸先生には貴重な御意見、御指導をいただきました。厚く御礼申し上げます。

註1 本研究は、科学研究費、基盤研究B(2)展開研究(課題番号 10558032、研究代表者 磯田正美)の一貫として行われた。

註2 授業の詳細並びに資料等は次に掲示している。

<http://130.158.186.11/mathedu/forAll/project/2000/index>

引用文献

- P. de Fermat 「Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam」 OEuvres de Fermat (1629)
- 中村幸四郎・寺阪英孝・伊東俊太郎・池田美恵訳「ユークリッド 原論(縮刷版)」 P62-78, 141-142 (1996・共立出版)
- 佐藤徹訳「アルキメデス 方法」P34-39 (1990・2, 東海大学出版)
- D.J.Struik, 「FERMAT, MAXIMA AND MINIMA」 p222-227 (A Source Book in Mathematics) Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1969
- D.J.Struik 「BARROW, THE FUNDAMENTAL THEOREM OF THE CALCULUS」 p253-263 (A Source Book in Mathematics) Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1969
- 近藤洋逸「フェルマーの極大極小法及び接線論」「近藤洋逸数学史著作集 第3巻 数学の誕生・近代数学史論」p274-299 (1994・9, 日本評論社)
- 文部省 「高等学校学習指導要領解説 数学編」P20-25, 31-39 (1999・12, 実教出版)
- 吉田明史・飯高茂編著「高等学校学習指導要領の展開 数学科編」P68-83 (2000・8, 明治図書)
- 竹之内脩「数学の教育内容をどう考えるか」数学教育 NO.494 P5-12 (1999・1, 明治図書)
- 安藤洋美「数学史導入にあたっての懸念」数学教育 NO.494 P13-15 (1999・1, 明治図書)
- 小平邦彦「怠け数学者の記」P120-124

- (2000・8, 岩波書店)
- 長岡亮介「私の数学史行脚」数学セミナーP30-34 (1987・3)
 - 小堀憲「コーシー微分積分学要論」P4(昭和44・7, 共立出版)
 - 磯田正美「数学の弁証法的発展とその適用に関する一考察」筑波数学教育研究第18号 P11-20 (1999)
 - 沖田和美「学校数学における数学史を生かした指導に関する一考察」筑波大学大学院教育研究科 平成7年度修士論文
 - 上野健壘+佐々木力「歴史の中の20世紀数学」『数学の思考』現代思想10月臨時増刊(2000・10, 青土社)

参考文献

- 中村幸四郎「数学史 形成の立場から」p63-78 (昭和56・2, 共立出版)
- 山崎昇・保坂秀正訳「グレイセル 数学史」p57-60 (1997・10, 大竹出版)
- 加賀美鐵雄・浦野由有訳「ボイヤー 数学の歴史3」p98-120(1984・6, 朝倉書店)
- Carl B. Boyer「A HISTORY OF MATHEMATICS」p367-384(1985, Princeton University Press)
- 岡部恒治監訳「数学を築いた天才たち(下)」p18-33 (1993・11, 講談社)
- 岡部恒治監訳「数学を築いた天才たち(上)」p216-232 (1993・11, 講談社)
- 井関清志・山内一次訳「ルイブニコフ 数学史」p223-247 (1965・3, 東京図書)
- 長岡亮介, 「数学の歴史」p88-96(1997・3, 放送大学教育振興会)
- 片野善一郎「数学史の利用」p126-139 (1995・9, 共立出版)
- 近藤洋逸「フェルマーの極大及び極小

- 値研究のための方法」近藤洋逸数学史著作集 第3巻 数学の誕生・近代数学史論」p274-299 (1994・9, 日本評論社)
- 黒田孝郎「数と文明99の謎」p182-186 (1976・10, 産報)
- 国立教育研究所「数学教育の国際比較 第2回国際数学教育調査最終報告 (1991・4, 第一法規)
- 磯田正美「数学学習における数学史の利用に関する一考察」筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告 第26集 1987・3
- 神長幾子「高等学校における微積分の背景 - 17世紀の微積分学形成史の考察 - 」筑波数学教育研究第4号 P76-85
- 神長幾子「高等学校における微積分指導に関する一考察 - 微積分学形成の歴史を踏まえて - 」筑波大学大学院教育研究科 昭和59年度修士論文

(付録) アンケートの結果

以下は、生徒A～Eの5人のアンケートにおける記述を抜粋したものである。

Q1:「この授業を通して、あなたが変わったなあと思うことを自由に書いてください。また、どのようなことがきっかけで、あなたは変わりましたか。」

- A 一つの問題に対して、いろいろな考え方が存在するということがわかった。人によって、一つのことを証明するのにいっぱい方法があるのだなあ。人(フェルマーやバロウなど)によって、接線の証明の仕方が全然違っていたため。
- B 数学というのは、昔の誰かが思いついたやり方を昔から今までずっと、習うものだと思っていた。しかし昔のいろんな人がいろんなやり方を考えていた中の一つを学んでいたんだなあと思った。そのきっかけは、バロウさんとかニュートンさんとかデカルトさんとかフェルマーさんとかいろんな数学者がいて、その人たちがいろいろ考えたことを知ったから。
- C 私は、数学が苦手なんだということを再認識した。デカルトが、数学界でも成果をあげていることに感動を覚えた。数学的発想ができなかった。やっぱり私は文系の道に進んだほうがいいのかもしれない。
- D フェルマーさんには、極限值という概念はなかったんだと知った。長い歴史の中の数学への人々の認識の移り変わりを見ることができた。授業をうけたから
- E まだ、完成されていない計算方法に触れることで、今「公式」として受けている様々な知識を疑ってかかる姿勢を持てた。今、当たり前に見えるものも、長い歴史の中で試行錯誤して編み出された証明なのだろう。上記のように、未完成の「数学」に触れること。

参考書等をよんでも、今ある「正解」しか残されていないので、なかなか触れる機会がない。

Q2:「この授業で一番印象に残ったことは何ですか。(授業の内容と関連づけて答えて下さい。)」

- A パソコンを使って、接線を書けたのが楽しかった。また、いろいろな証明の仕方がわかったので面白かった。
- B 第一には、コンピュータは素晴らしい。未来の黒板はスクリーンだ! 第二に、授業の内容では、やはり、“e”の存在。0に限りなく近づけるといってもないのに、どうしてeで割ったり、除去したりしようという発想に至ったのか、彼らの思考回路が謎だった。(別に、納得できない訳ではないが…)そして第三には、今では“e”みたいな存在をあやふやなままにしているが、今後もし優秀な数学者が現れて、“e”の存在を確立、または、くつがえすような発見をしたら面白い。でも、“e”があやふやだと私が思うのは、昔の人に比べてデジタルな世界に生きている現代人だからかもしれない。
- C 文字が縦横無尽に富んでいたのがとても印象的だった。あとフェルマーたちの強引さ。
- D あのソフト(カプリ)はすごい。bは二倍。
- E 読みが甘かった。「～との相違点は?」という質問に、見当はずれの答えを出したりしてしまった。主体的に学ぶ姿勢に欠けていたのかもしれない。与えられた「穴埋め問題」しか問けない。自分で文献を探し、問いていくことがこれからの課題だと思う。

Q3:「今回の講座を受講して、率直な感想を、その理由を含めて、書いてください。」

- A 微分を考えるための一つの知識として、ためになった。微分について少し見えた。
- B この講座はちょうどよかったし、難しい所も面白い

具合に混ざってよかった。

- C 微分の授業だったはずなのに、あまり微分をやらなかったような…。これはやはり、私の数学的センスのなさのせいのような複雑な気分が苛まれて仕方がない。
- D 短かったです。穴埋めは集中しました。とても丁寧に教えていただいて、ありがとうございました。
- E 理屈の分からないまま、「こうだから」と言われて、とりあえずやってみるだけのことが多すぎた。あと、時間が少なすぎ。物足りない。

Q4：「講座案内のチラシを見たときに『微分』という言葉聞いて、連想したものを教えてください。」

- A リミット。授業であまり、やっていなかったため、あまり連想しなかった。
- B 微分、イレブン、いい気分
- C 微と徴は、よく似ている。
- D グラフを書かされるかと思った。
- E 「極限」についての講座かと思った。まさか微分という学問の生長の記録とは…。

Q5：「作図ツール『Cabri Geomerty』のメリットは、あなたにとって、どんなことだと思えますか。」

- A いちいち手で書く手間が省ける。
- B 軌跡を正確に、速く書けること。
- C 動画ができること。
- D fun
- E 解くになし。デメリットならいろいろあるけど…。
(理屈が理解できない。)

Q6：「数学をどんな学問だと思いますか。」
(事前 事後)

- A 謎解き 謎解き、一つのことにあきらめずに取り組む学問。

B 動物から見れば全く必要のない学問。 謎。

C 数を扱う学問。 左脳をよく使う学問だと思われる。

D 得意、不得意がある学問。量をこなすことが必要な学問。むずかしい学問。得意、不得意があるけど、認識を変えるきっかけがあるとすんなり理解できたりするようなところもある学問。

E 「実在」とは少し離れた「概念」を扱う学問。より少ない定義で、多くの発見を生む学問。

「科学」の基本。様々な事象を「数」という常に確実なものを頼りに、より単純に、より一般的に広げ、多くの事象をできるだけ少ない法則によって、説明しようとする学問。

Q7：「数学をするときに、どんなものを使いますか。」(事前 事後)

A コンパス、定規、紙 図形を書くための道具。

B 頭と紙とペン。 普段使わない脳、紙、自然、筆記用具(筆も含む)、下敷き。

C シャープペンシル、消しゴム、紙、頭、紙、筆、頭、資料、手。

D 定規、計算用紙。 カブリ、定規、コンパス、頭。

E 計算用紙、筆記用具、参考書(公式を出すまで…みたいなもの)。 計算用紙、筆記用具、各種定規、やわらかい頭、そして、時間。

