特別講座資料

NAME

～１時間目～

［12／４（月）13:10～14:00 実施］

１．最大最小問題

微分法発見の一つの契機となったのは、関数の最大最小を求める問題であった。
とりあえず、次の問いをチャレンジしてみよう。

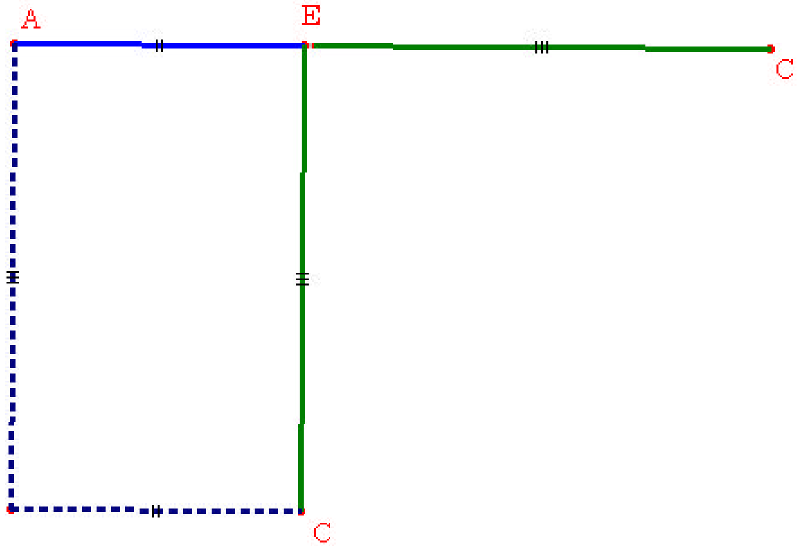
問題１

「与えられた線分を二つに折って、その二つを縦、横とする辺で長方形を考えるとき、その面積を最大にするには　どのように折ったらよいか。」

言い回しを変えると、

「線分ＡＣを点Ｅで分けて、線分ＡＥと線分ＥＣとを辺とする長方形の面積を考えたとき、その面積が最大となるのは点Ｅがどこにあるときか。」

（作図例）



▼下の枠内で、自由に考えて、答えを求めてみよう。

よって、自ら求めた答えは・・・

点Eが $\boxed{}$ にあるときである。

どんな方法を使って考えましたか。上の解法にならって記入して下さい。

では、**問題１**の原典となる文章を、実際に取り上げて、考えてみよう。

[出典]（左）CEUVRES DE FERMAT「METHODUS AD DISQUIRENDAM MAXIMAM ET MINIMAM」

（右）Struik, A Source Book in Mathematics「FERMAT, MAXIMA AND MINIMA」

The History of Mathematics「FERMAT, Maxima and Minima」

Exemplum subjicimus: *Sit recta* AC (*fig.* 91) *ita dividenda in* E *ut rectangulum* AEC *sit maximum.*

Fig. 91.

Recta AC dicatur *B*. Ponatur pars altera ipsius *B* esse *A*: ergo reliqua erit *B* — *A*, et rectangulum sub segmentis erit *B* in *A* — *Aq*., quod debet inveniri maximum. Ponatur rursus pars altera ipsius *B* esse *A* + *E*: ergo reliqua erit *B* — *A* — *E*, et rectangulum sub segmentis erit

B in *A* — *Aq*. + *B* in *E* — *A* in *E* bis — *Eq*.,

quod debet adaequari superiori rectangulo

B in *A* — *Aq*.

Demptis communibus,

B in *E* adaequabitur *A* in *E* bis + *Eq*.,

et, omnibus per *E* divisis,

B adaequabitur *A* bis + *E*.

Elidatur *E*.

B aequabitur *A* bis.

Igitur *B* bifariam est dividenda ad solutionem propositi; nec potest generalior dari methodus.

Here is an example:

To divide the segment AC at E so that $AE \times EC$ may be a maximum.

A E C

We write $AC = b$; let a be one of the segments, so that the other will be $b - a$, and the product, the maximum of which is to be found, will be $ba - a^2$. Let now $a + e$ be the first segment of b; the second will be $b - a - e$, and the product of the segments, $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$; this must be adequated with the preceding: $ba - a^2$. Suppressing common terms: $be \sim 2ae + e^2$. Suppressing e: $b = 2a$. To solve the problem we must consequently take the half of b.

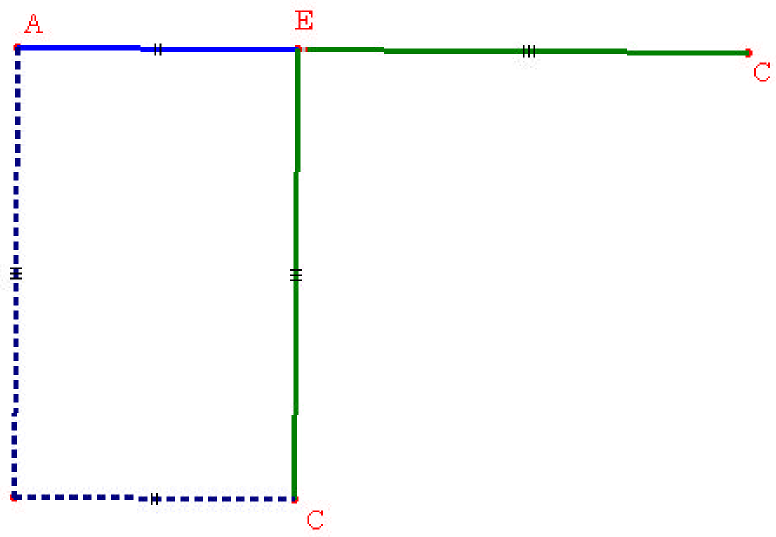
We can hardly expect a more general method.

考えてみよう!

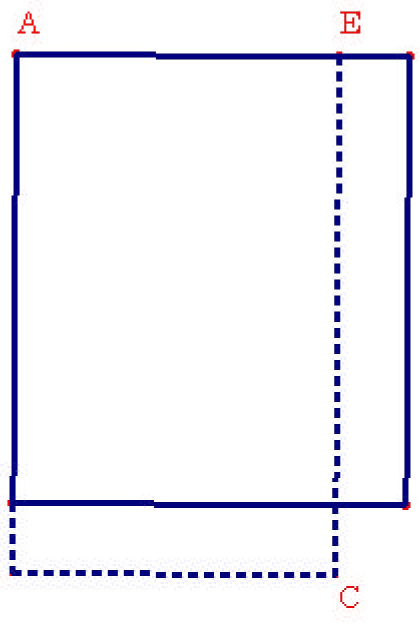
以下の単語は、左上の文章の中からの抜粋である。
右上の英文と対比させて、どういう意味かを考えよ。

● **in**	⟹	自分の考え	
● **Aq**	⟹	自分の考え	
● **bis**	⟹	自分の考え	

（作図例１）



（作図例２）



（日本語訳）

ここに一つの例がある——線分 AC を E で分割して矩形 AEC が極大となるようにする．

線分 AC を b と呼び，b の一方の部分を a と名づければ，他の部分は $b-a$ となろう． そしてこれらの截片からつくった矩形は $ba-a^2$ であり， そしてこれが極大となるべきである．今度は他方において b の一方の部分を $a+e$ に等しとおけば，他の部分は $b-a-e$ となり，これら截片からの矩形は

$$ba-a^2+be-2ae-e^2$$

となり これは矩形 $ba-e^2$ と近似的に相等しくおかれねばならぬ．

相等しい項を除去すれば be は $2ae+e^2$ に近似的に相等しくなり，これら全部を e で割れば b は $2a+e$ に近似的に相等しくなる．e を除去すると b は $2a$ に相等しい．

かくして b を二等分すれば課題がとけ，そしてこれ以上に普遍的な方法はあり得ぬ．

［近藤洋逸数学史著作集　第３巻より抜粋］

＊矩形（くけい）・・・直角四辺形。長方形。（矩は直角の意）

memo

▼ 下の枠内に、問題１の原典である英文やその日本語訳をみて、
数学の問題を解いているように、数式を並べて、記述してみよう。

ＡＣ＝ｂ、ＡＥ＝ａとおくと、ＥＣ＝　①＿＿＿＿＿　とかける。
いま、線分ＡＣを　ａ，①＿＿＿＿＿　の二つに折ったとき、
面積が最大になるものとする。
このときの面積は、②＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　である。
つぎに、ａからａ＋ｅに延ばし、①＿＿＿＿＿から③＿＿＿＿＿＿＿
に縮小したとすると、
面積は、④＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　である。
長方形の面積はほとんど変化がないと考えると、
⑤＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿
これを整理すると、⑥＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿
⑦＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿、ｂｅ－２ａｅ－e^{2}＝０
⑧＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿、ｂ－２ａ－ｅ＝０
⑨＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿、ｂ－２ａ＝０
ゆえに、ａ＝ｂ／２　が得られる。

これから、線分ａをまん中で二つに折って、長方形を囲む、つまり、
正方形をつくると、面積が最大になることがわかる。

① 上の解法で、何か不思議に思ったこと、違和感を感じたことがあったら
自由に述べよ。

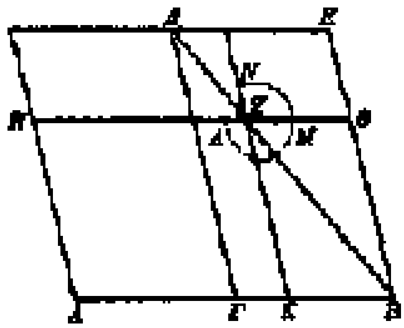
② 何が、これまでにない、フェルマ特有の考え方だろうか。

＝参考資料１＝

27

一つの線分の半分の上に描かれた平行四辺形に相似で，かつ相似な位置にある平行四辺形だけ欠けた平行四辺形がいくつかその同じ線分上につくられるとき，それらすべてのうち最大なものは，その線分の半分の上につくられ，かつ欠けている部分に相似な平行四辺形である。

AB を線分とし，それが Γ において2等分されたとし，線分 AB 上に AB の半分，すなわち ΓB 上に描かれた平行四辺形 ΔB だけ欠けている平行四辺形 $A\Delta$ がつくられたとせよ。AB 上につくられ，ΔB に相似でかつ相似な位置にある平行四辺形だけ欠けているすべての平行四辺形のうち，$A\Delta$ が最大であると主張する。なぜなら線分 AB 上に ΔB に相似でかつ相似な位置にある平行四辺形 ZB だけ欠けている平行四辺形 AZ が描かれたとせよ。$A\Delta$ は AZ より大きいと主張する。



平行四辺形 ΔB は平行四辺形 ZB に相似であるから，同じ対角線をはさんでいる。それらの対角線 ΔB がひかれ，そして作図がなされたとせよ。

そうすれば ΓZ は ZE に等しく，ZB は共通であるから，$\Gamma\Theta$ 全体は KE 全体に等しい。ところが $A\Gamma$ は ΓB に等しいから，$\Gamma\Theta$ は ΓH に等しい。それゆえ $H\Gamma$ も EK に等しい。双方に ΓZ が加えられたとせよ。そうすれば AZ 全体はグノーモーン ΛMN に等しい。したがって平行四辺形 ΔB，すなわち $A\Delta$ は平行四辺形 AZ より大きい。

よって一つの線分の半分の上に描かれた平行四辺形に相似で，かつ相似な位置にある平行四辺形だけ欠けた平行四辺形がいくつかその同じ線分上につくられるとき，それらすべてのうち最大なものは，その線分の半分の上につくられ，かつ欠けている部分に相似な平行四辺形である。これが証明すべきことであった。

（『ユークリッド原論』第６巻 第 27 命題 より引用）

次に、２次元から３次元に、次元を上げてみると、次の問いはどうなるかな？

問題２

「与えられた線分ＡＣを点Ｅで切断し、線分ＡＥを一辺とする正方形の上に、これを底面とする直方体を作図し、その高さを線分ＥＣと考えると、その体積が最大となるにはどのように、二つに分けたらよいか。」

言い回しを変えると、

「与えられた線分ＡＣを点Ｅで内分するとき、AE^2 ×ＥＣが最大となるようなＡＣ：ＡＥの比を求めよ。」

▼下の枠内で、自由に考えて、答えを求めてみよう。

よって、自ら求めた答えは・・・

AC :A Eの比は $\boxed{}$ となるとき、最大である。

どんな方法を使って考えましたか。上の解法にならって記入して下さい。

では、**問題２**の原典となる文章を、実際に取り上げて、考えてみよう。

[出典]（左）CEUVRES DE FERMAT「METHODUS DE MAXIMA ET MINIMA」

（右）The History of Mathematics「FERMAT, Maxima and Minima」

Esto aliud exemplum : *Recta B ita secanda est, ut solidum sub quadrato unius ex segmentis in alterum sit maximum* (¹).

Ponatur unum segmentum esse *A* ; ergo

B in *A* quad. − *A* cub. erit maximum.

Æquatio correlata æqualis et similis est

B in *E* quad. − *E* cub.

Comparentur juxta methodum Vietæ : ergo

B in *A* quad. − *B* in *E* quad. æquabitur *A* cub. − *E* cub.,

et, omnibus per *A* − *E* divisis,

B in *A* + *B* in *E* æquabitur *A* quad. + *A* in *E* + *E* quad.,

quæ est constitutio æquationum correlatarum.

Ut quæratur maxima, fiat *E* æqualis ipsi *A* ; ergo

B in *A* bis æquabitur *A* quad. ter,

hoc est,

B bis æquabitur *A* ter.

Constat propositum.

Let us take another example: to divide the segment b in such a way that the product of the square of one of the segments with the other shall be a maximum.

Let a be one of the segments; one must have $ba^2 - a^3$ maximum. The equal and similar correlative equation is $be^2 - e^3$. Comparing these two equations according to the method of Viète:

$$ba^2 - be^2 = a^3 - e^3;$$

dividing both sides by $a - e$ one obtains

$$ba + be = a^2 + ae + e^2,$$

which gives the form of the correlative equations.

To obtain the maximum, set $e = a$; one obtains

$$2ba = 3a^2 \quad \text{or} \quad 2b = 3a;$$

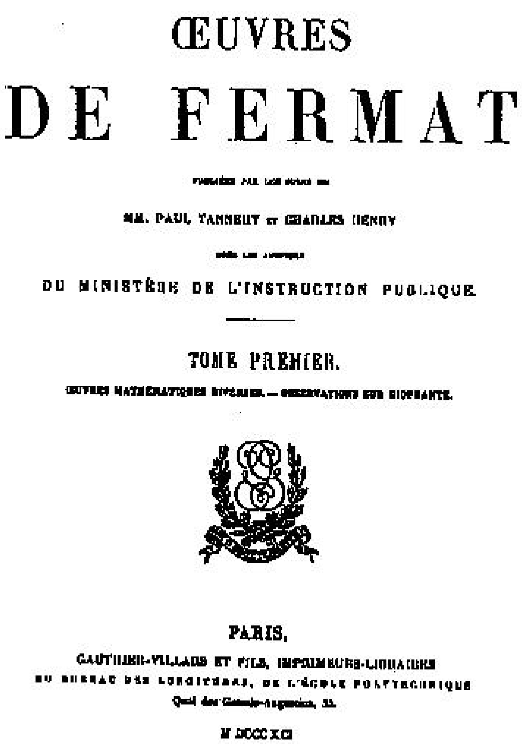
the problem is solved.

考えてみよう!

以下の単語は、左上の文章の中からの抜粋である。
右上の英文と対比させて、どういう意味かを考えよ。

● quad ⟹	自分の考え	
● cub ⟹	自分の考え	
● bis ⟹	自分の考え	
● ter ⟹	自分の考え	

▼下の枠内に、前ページの英文を、日本語や数式に置き換えてみよう。
その際、ただ訳文を書くのではなく、数学の問題を解いているように、
数式を並べて、記述すること。


ŒUVRES

DE FERMAT

MM. PAUL TANNERY ET CHARLES HENRY

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

TOME PREMIER.

ŒUVRES MATHÉMATIQUES DIVERSES. — OBSERVATIONS SUR DIOPHANTE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

M DCCC XCI

↑（左）「CEUVRES DE FERMAT」の表紙、（右）フェルマーの描画

特別講座資料

NAME ＿＿＿＿＿＿＿＿

～２時間目～

［12／４（月）14:10～15:00 実施］

２．曲線に接線を引く問題

微分法発見のもう一つの契機となったのは、曲線に接線を引く問題であった。

問題に入る前に・・・

（参考）果たして、「接線」は、いつ頃から考えられていたのか？

ユークリッド（B.C.300 頃）・・・『原論』のなかで、
円への接線についての記述がある。

アルキメデス（B.C.287-212）・・・『方法』のなかで、
螺旋への接線についての記述がある。

アポロニウス（B.C.262-200）・・・『円錐曲線論』のなかで、
楕円・双曲線・放物線への接線についての記述がある。

平面上の一般の曲線を考えて、その曲線上にあるどんな点でも、そこを接点とするような接線の作図方法は、確立されてはいなかった。

2－１　フェルマー (1601-1665)の方法

一般的なある曲線上の点における接線を見つけるために、
前の方法（問題 1,2）を使用する。実際に、原典となる文章を、
実際に取り上げて、考えてみよう。

[出典]（左）CEUVRES DE FERMAT「METHODUS AD DISQUIRENDAM MAXIMAM ET MINIMAM」

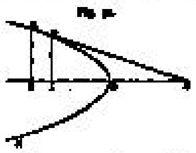
（右）Struik, A Source Book in Mathematics「FERMAT, MAXIMA AND MINIMA」

The History of Mathematics「FERMAT, Maxima and Minima」

Ad superiorem methodum inventionem tangentium ad data puncta in lineis quibuscumque curvis reducimus.

Sit data, verbi gratia, parabole BDN (*fig.* 93), cujus vertex D, diameter DC, et punctum in ea datum B, ad quod ducenda est recta BE tangens parabolen et in puncto E cum diametro concurrens.

Fig. 93.



Ergo, sumendo quodlibet punctum in recta BE, et ab eo ducendo ordinatam OI, a puncto autem B ordinatam BC, major erit proportio

CD ad DI quam quadrati BC ad quadratum OI,

quia punctum O est extra parabolen; sed, propter similitudinem triangulorum,

ut BC quadratum ad OI quadratum, ita CE quadratum ad IE quadratum:

major igitur erit proportio

CD ad DI quam quadrati CE ad quadratum IE.

Quum autem punctum B detur, datur applicata BC, ergo punctum C; datur etiam CD: sit igitur CD aequalis *D* datae. Ponatur CE esse *A*; ponatur CI esse *E*.

Ergo

D ad *D* − *E* habebit majorem proportionem quam *Aq.* ad *Aq.* + *Eq.* − *A* in *E bis*.

Et, ducendo inter se medias et extremas,

D in *Aq.* + *D* in *Eq.* − *D* in *A* in *E bis* major erit quam *D* in *Aq.* − *Aq.* in *E*.

Adaequentur igitur juxta superiorem methodum: demptis itaque communibus,

D in *Eq.* − *D* in *A* in *E bis* adaequabitur − *Aq.* in *E*,

aut, quod idem est,

D in *Eq.* + *Aq.* in *E* adaequabitur *D* in *A* in *E bis*.

Omnia dividantur per *E*: ergo

D in *E* + *Aq.* adaequabitur *D* in *A bis*.

Elidatur *D* in *E*: ergo

Aq. aequabitur *D* in *A bis*,

itaque

A aequabitur *D bis*.

Ergo CE probavimus duplam ipsius CD, quod quidem ita se habet.

(b) Tangents

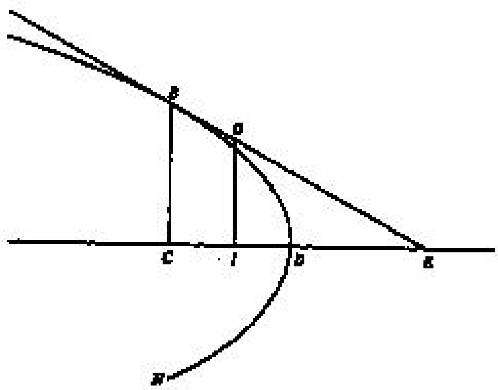
We use the preceding method in order to find the tangent at a given point of a curve.

Let us consider, for example, the parabola BDN with vertex D and of diameter DC; let B be a point on it at which the line BE is to be drawn tangent to the parabola and intersecting the diameter at E.

We choose on the segment BE a point O at which we draw the ordinate OI; also we construct the ordinate BC of the point B. We have then: $CD/DI > BC^2/OI^2$, since the point O is exterior to the parabola. But $BC^2/OI^2 = CE^2/IE^2$, in view of the similarity of triangles. Hence $CD/DI > CE^2/IE^2$.

Now the point B is given, consequently the ordinate BC, consequently the point C, hence also CD. Let $CD = d$ be this given quantity. Put $CE = a$ and $CI = e$; we obtain

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}.$$



Removing the fractions:

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

Let us then adequate, following the preceding method; by taking out the common terms we find:

$$de^2 - 2dae \sim -a^2e,$$

or, which is the same,

$$de^2 + a^2e \sim 2dae.$$

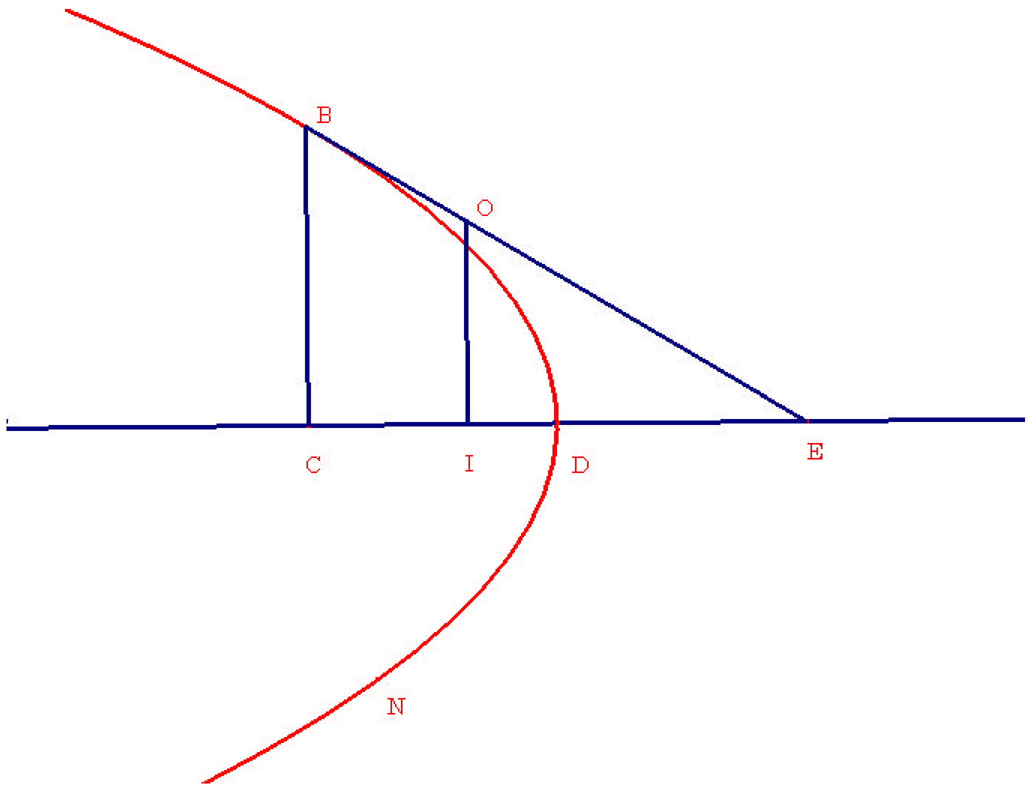
Let us divide all terms by e:

$$de + a^2 \sim 2da.$$

On taking out de, there remains $a^2 = 2da$, consequently $a = 2d$.

Thus we have proved that CE is the double of CD—which is the result.

（作図例）



（日本語訳）　図のごとく放物線 BDN があり，頂点は D，DC がそれの軸である．いまその曲線上の一点 B に接線 BE が描かれ，それと軸との交点を E とする．接線 BE 上に任意に一点 O をとり，そこから縦線 OI をつくり，また同時に B にも縦線 BC を描けば

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DI}} > \frac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{OI}^2} \qquad (*)$$

である．この式は，O が接線上の一点であるがために放物線の外側にあることと，放物線の特性から，容易に導出できる．ところで三角形の相似性から $\frac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{OI}^2} = \frac{\mathrm{CE}^2}{\mathrm{IE}^2}$ であり，それ故に $\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DI}} > \frac{\mathrm{CE}^2}{\mathrm{IE}^2}$ である．さて B 点は所与であり，故に BC も，また点 C も，さらにまた CD も与えられている．かくて CD $= b$ は所与である．いま CE $= a$，CI $= e$ とおけば

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae} \qquad (*)$$

$$\therefore\quad da^2+de^2-2dae > da^2-a^2e.$$

ここでいつもの方法で adégaler して共通項を相殺すれば

$$de^2-2dae \backsim -a^2e$$

$$de^2+a^2e \backsim 2dae.$$

e で全体をわると

$$de+a^2 \backsim 2da$$

となり，de を除去すれば $a^2 = 2da$ が残り，かくして $a = 2d$ である．故に CE は CD の二倍であり，接線は直ちに描けるわけである．

［近藤洋逸数学史著作集　第３巻より抜粋］

memo

▼ 下の枠内に、問題３の原典である英文やその日本語訳をみて、
数学の問題を解いているように、数式を並べて、記述してみよう。

図から、$DC／DI > CB^2／IO^2$
（なぜなら、①＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ ）
②＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿であるから、$CB／IO = CE／IE$
これより、$DC／DI > CE^2／IE^2$
いま、$CE = a$、$DC = d$、$OI = e$　とおくと、

$$d／(d+e) = a^2／(a+e)^2$$

これを整理すると、③＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿
④＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿、$2ad + de = a^2$
⑤＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿、$2ad = a^2$
ゆえに、$a = 2d$　が得られる。

これから、⑥＿＿＿＿の位置がわかるから、⑥＿＿＿とＢを結べば
接線が引けることになる。

上の解法で、何かあいまいに感じることがあったら、自由に述べよ。

▼では、本当にそうなるのか、確かめてみたい。

⟹確かめる方法として、

＊コンピュータを使って、実際に作図してみればよい。

（*コンピュータ･･･正確にはコンピュータのソフトウェア「Cabri Geometry Ⅱ」のこと）

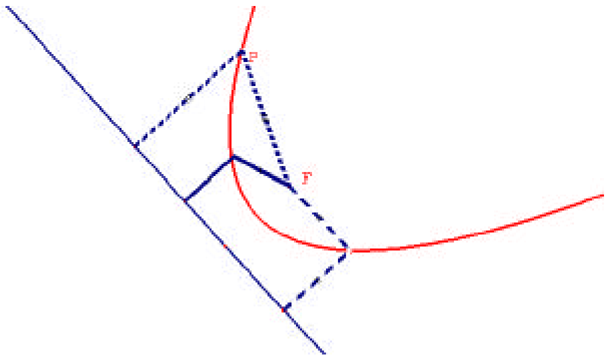
その際、以下のことを使う。

２次関数$y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）のグラフが、放物線であることは数学Ⅰ（あるいは中学）において、既に学んでいる。

ここでは、**放物線の幾何的（図形的）定義**を取り上げてみたい。

定義）

放物線（parabola）とは、定点Ｆとそれを通らない定直線とから、等距離にある点Ｐの全体がつくる曲線である。



言い換えると、

定点Ｆとそれを通らない定直線とから、等距離にある点Ｐの軌跡である。

［教科書「数学Ｃ」（数研出版）より］

＝参考資料２＝

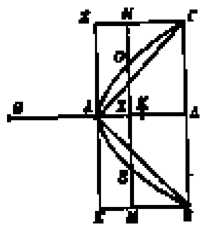
命題4

(直角円錐状体の切片の大きさ)

軸に垂直な平面によって切りとられた直角円錐状体[1]のすべての切片は，その切片と同じ底面と同じ軸をもつ円錐の$1\frac{1}{2}$倍であることも，この方法によって，次のように見出される．

直角円錐状体があるとして，その軸を通る平面によって切られたとせよ．そのとき，断面として，その平面の中に，直角円錐切断 $AB\Gamma$ を作るとせよ．次に，(直角円錐状体が)軸に垂直なもう一つの平面によって切られたとし，$B\Gamma$ をそれら(2つ)の平面が交わる交線とせよ．ΔA がその(直角円錐状体の)切片の軸であるとし，ΔA が Θ まで延長されて，$A\Theta$ が $A\Delta$ に等しくとられたとせよ．いま，$\Delta\Theta$ を，その中点が A である天秤の横木であると考えよ．そして，(直角円錐状体の)切片の底面が，$A\Delta$ に垂直な，直径 $B\Gamma$ の円であるとせよ．さらに，底面として直径 $B\Gamma$ の円を，頂点として点 A をもつ円錐を考えよ．また，底面として直径 $B\Gamma$ の円を，軸として $A\Delta$ をもつ円柱があるとせよ．さて，平行四辺形($E\Gamma$)の中に，任意の直線 MN が $B\Gamma$ に平行に引かれたとし，MN 上に，$A\Delta$ に垂直な平面を立てるとせよ．そのとき，この平面は，円柱の中に直径 MN の円を，直角円錐状体の切片の中に直径 ΞO の円を，断面として作るであろう．

ところで[2]，$BA\Gamma$ は直角円錐切断であり，$A\Delta$ はその直径であり，$\Xi\Sigma$，$B\Delta$ は(直径への)縦線であるので，ΔA が $A\Sigma$ に対するように，$B\Delta$ 上の正方形は，$\Xi\Sigma$ 上の正方形に対する[3]．ところで，ΔA は $A\Theta$ に等しい．それゆえ，ΘA が $A\Sigma$ に対するように，$M\Sigma$ 上の正方形は，$\Sigma\Xi$ 上の正方形に対する．さて，$M\Sigma$ 上の正方形が，$\Sigma\Xi$ 上の正方形に対するように，円柱の中の直径 MN の円は，直角円錐状体の切片の中の直径 ΞO の円に対する．それゆえ，ΘA が $A\Sigma$ に対するように，直径 MN の円は，直径 ΞO の円に対する．ゆえに，円柱の中の直径 MN の円は，そのままの位置で，Θ がその重心になるように天秤の横木上で Θ に移されて置かれた直径 ΞO の円に，点 A に関して釣り合う．そのとき，直径が MN である円の重心は Σ であり[4]，移された直径 ΞO の円の重心は Θ である．そして，($\Theta\Sigma$ は重さに関して)逆比に分割されて，ΘA は $A\Sigma$ に対して，直径 MN の円が直径 ΞO の円に対するのと同じ比をもつ．また，もし，他の任意の直線が，平行四辺形 $E\Gamma$ の中に引かれ，その引かれた直線上に，$A\Theta$ に垂直な平面が立てられると，円柱の中に出来る円は，そのままの位置で，Θ がその重心であるように天秤の横木上で Θ に移された，直角円錐状体の切片の中に出来る円に，点 A に関して釣り合うであろうことが，同様にして示されるであろう．そこで，円柱と円錐状体の切片が，(それらの断面である円によって，それぞれ)満たされて完成されると，円柱は，そのままの位置で，Θ がその重心であるように天秤の横木上で移されて Θ に置かれた直角円錐状体の切片に，点 A に関して釣り合うであろう．よって，いま述べられた(2つの)量は，点 A に関して釣り合っており，$A\Delta$ が点 K で2等分されると，点 K が円柱の重心であり[5]，点 Θ が移された(直角円錐状体の)切片の重心であるから，(ΘK は重さに関して)逆比に分割されて，ΘA は AK に対して，円柱が切片に対するのと同じ比をもつであろう．ところで，ΘA は AK の2倍である．それゆえ，円柱は，(直角円錐状体の)切片の2倍である．ところで，この円柱は，直径 $B\Gamma$ の円を底面としてもち，点 A を頂点としてもつ円錐の3倍である[6]．したがって，(直角円錐状体の)切片が，いま言われたような円錐の$1\frac{1}{2}$倍であることは明らかである．



（『アルキメデス方法』命題４ より引用）

特別講座資料

NAME ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

～３時間目～

［12／７（木）15:10～16:00 実施］

２．曲線に接線を引く問題（つづき）

微分法発見のもう一つの契機となったのは、曲線に接線を引く問題であった。

2－２ バロウ (1630-1677)の方法

先程の２－１においてのフェルマの方法を一歩進めた方法である。
実際に、原典となる文章を取り上げて、考えてみよう。

[出典] Struik, A Source Book in Mathematics

「BARROW. THE FUNDAMENTAL THEOREM OF THE CALCULUS」

Supplementary to this we add, in the form of appendices, a method for finding tangents by calculation frequently used by us. Although I hardly know, after so many well-known and well-worn methods of the kind above, whether there is any advantage in doing so. Yet I do so on the advice of a *friend*;[4] and all the more willingly, because it seems to be more profitable and general than those which I have discussed.

Let AP, PM be two straight lines given in position [Fig. 7] of which PM cuts a given curve in M, and let MT be supposed to touch the curve at M, and to cut the straight line at T.

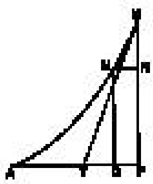


Fig. 7

In order to find the length of the straight line PT, I set off an indefinitely small arc, MN, of the curve; then I draw NQ, NR parallel to MP, AP; I call $MP = m$, $PT = t$, $MR = a$, $NR = e$, and other straight lines, determined by the special nature of the curve, useful for the matter in hand, I also designate by name; also I compare MR, NR (and through them, MP, PT) with one another by means of an equation, obtained by calculation, meantime observing the following rules.[5]

Rule 1. In the calculation, I omit all terms containing a power of a or e, or products of these (for these terms have no value).[6]

Rule 2. After the equation has been formed, I reject all terms consisting of letters denoting known or determined quantities or terms which do not contain a or e (for these terms, brought over to one side of the equation, will always be equal to zero).

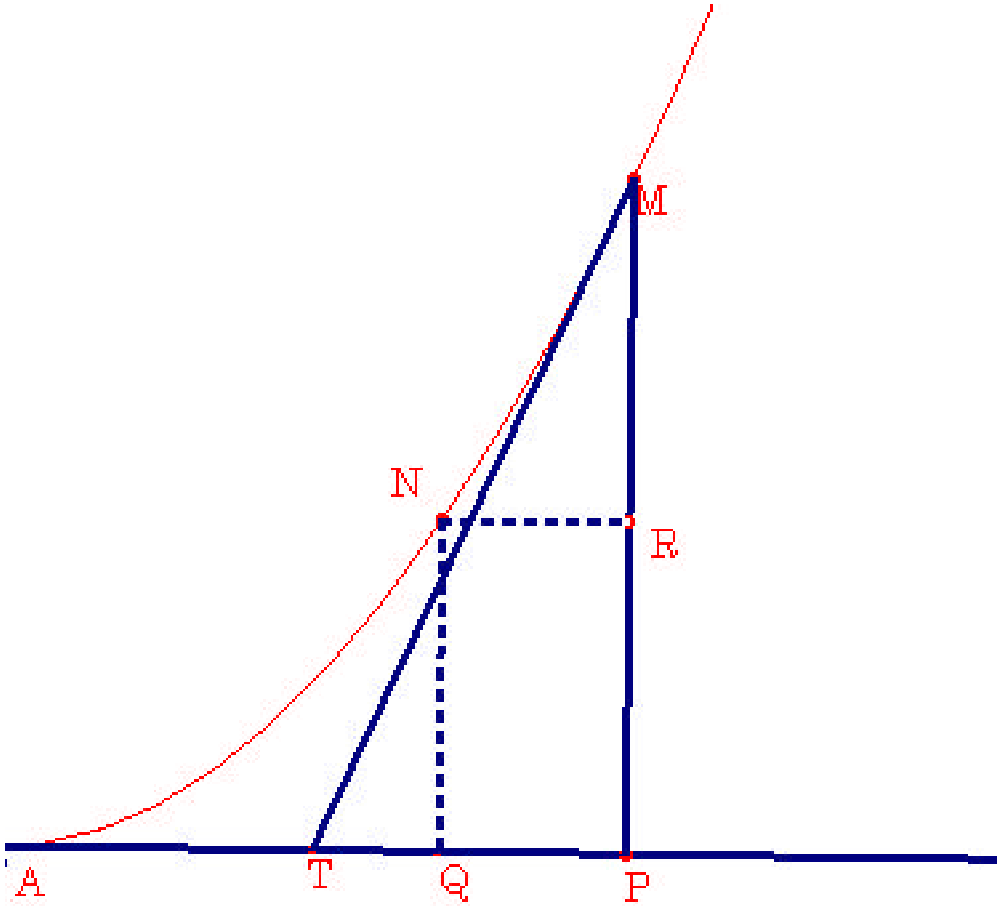
Rule 3. I substitute m (or MP) for a, and t (or PT) for e. Hence at length the quantity of PT is found.

Moreover, if any indefinitely small arc of the curve enters the calculation, an indefinitely small part of the tangent, or of any straight line equivalent to it (on account of the indefinitely small size of the arc) is substituted for the arc.

---

[4] This friend probably is Newton, to whom Barrow refers by name in the preface, saying that Newton has helped him in preparing the book, adding some things from his own work.
[5] This introduces the "characteristic triangle" (PQ, RM, RN) [illegible] on the advice, it seems, of Newton.
[6] This neglecting of terms of higher order reminds us of Fermat (Selections IV.[illegible]) and also of Newton's fluxion theory (Selection V.[illegible]).

（作図例）



（日本語訳）

多くの有名な方法や月並な方法を述べたあとでそうすることが有益であるかどうかわからないが，補足として計算によって接線を求めるよく使われる方法を付録の形で付け加えておく．だがわたしがそうするのは友人の忠告によるものである（のちにその友人がニュートンであることがわかる）．しかも喜んでそうすることにする．なぜなら，その方法はわたしが述べた方法よりもより有益でかつより一般的であるように思われるからである．

[以上、『ボイヤー　数学の歴史３』より抜粋]

２つの線分ＡＰ、ＰMを考え、線分ＰMは点Mである曲線と交わる。
また、線分MＴはMでその曲線と接し、Ｔで線分ＡＰと交わる。
線分ＰＴの長さを求めるために、その曲線の微小な弧MNを強調す
このとき、MＰ，ＡＰとそれぞれ平行に、NQ，NRをかく。
いま、MＰ=m，ＰＴ＝ｔ，MR＝ａ，NR＝ｅと書き、曲線の特別な性質によって決まる他の線分でも、m，ｔ，ａ，ｅを用いて記号で書く。
計算によって得られた等式から、MR，NR（また、そこを通るMＰ、ＰM）をお互いに比較せよ。
そうしているうちに、次のような規則がみつかるだろう。

規則１　計算において、ａあるいはｅの累乗を含む項、またはａとｅの積を含む項すべてを無視する。（なぜなら、これらの項は値を０とみなすから）

規則２　等式を整理した後、決められた長さを表す文字からなる項や、ａとかｅを含んでいない項すべてを消去する。（なぜなら、これらの項は、等式の片側に移項するのに常に０に等しいから）

規則３　ａ、ｅをそれぞれm（MＰ）、ｔ（ＰＴ）を用いて表す。そうすると、ようやくＰＴの必要性がわかる。

もっと言うと、その曲線のどんな微小な弧でも、もし計算に入れれば、接線の微小な部分や（その弧が微小な大きさのために）その長さに等しいどんな線分の微小な部分も、微小な弧に置き換えられる。

memo

▼　２－２の原典である英文やその日本語訳をヒントとして、実際に今日の数学の問題として置き換えて、確認してみたい。そのため、下の枠内の空欄に、必要な数式や語句を並べて、記述してみよう。

ＭＰ＝ｍ，ＰＴ＝ｔ，ＭＲ＝ａ，ＮR＝ｅ　とおく。
ある曲線の式を　$y=kx^{2}$・・・(*)　とし、点Ｍの座標を（ｐ，ｍ）とすると、点Ｍは(*)上にあるから、①________________________
また、図より、点Ｎの座標は、②__________________　とかける。
点Ｎは(*)上にあるから、③______________________________
①，③を連立して整理すると、④__________________________
両辺ｅで割ると、⑤__________________________________
ここで、ｅを含む項を無視すると、⑥______________________
ａ／ｅ＝⑦__________だから、⑦__________＝２ｋｐ
ゆえに、ｔ＝⑧__________
①，⑧から、ｔ＝⑨________________
以上より、Ｍのｘ座標が既知なら、接線が引けることになる。

上（２－２）のバロウの方法と、２－１のフェルマーの方法とを比較して、
①相違点を、自由に述べよ。

②共通点を、自由に述べよ。