HIERONYMI CARDANI, PRÆSTANTISSIMI MATHEMATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,

ARTIS MAGNÆ,

SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,

Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod

OPVS PERFECTVM

inscripsit, est in ordine Decimus.

Habes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cos [illegible] [illegible] Authore [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Operis Perfecti libros, qui per Tomos [illegible]

INDEX EORVM QVÆ IN HOC LIBRO CONTINENTVR.

Errata quaedam sic corrigito.

Fol. 5. facie 2. uersu 18. lege 6 quadratis p: 3.
Fol. 8. facie 2. uersu ultimo, reliquas,
Fol. 9. facie 1. uersu 14. superficiem.

がある．最後の部分は長大で，イスラーム法に基づく遺産分配の計算の例が多数挙げられている．

3. アル＝フワーリズミー「ジャブルとムカーバラ」の原典訳[31]

人々が必要とする計算について考察したとき，私はそのすべてが数であることを見出した[32]．また，すべての数は"1"から成り立っているにほかならず，"1"はすべての数の中に入っていることも見出した[33]．さらに，数のうち"1を越えて10まで"と言われているものは，いずれも1ずつ増えていくのである．次にその10が，1に対してなされたのと同様に，2倍，3倍されて20，30が生じ，100の完成へと至る．そして，その100が，1や10になされたのと同様に，2倍，3倍されて1000に至り，その1000が他の桁とともに繰り返されて，到達し得る限りの（すべての）数に至るのである，というようなことも見出した．

私はまた，ジャブルとムカーバラの計算で必要とされる数は3つの種類であることを見出した．すなわち"ジズル"と"マール"，それにジズルともマールとも（比例）関係がない"独立数"である．そのうちジズルとは，自分自身に掛けられるもの，すべてであり，"1"やそれより大きな数，それより小さな分数である．マールとは，ジズルがそれ自身に掛けられて生じるもの，すべてである．独立数とは，数のうち，"ジズルともマールとも（比例）関係をもたない"といわれるもの，すべてである．

すると，これら3つの種類には，互いに等しいものがある．例えば，"ジズルに等しいマール"，"数に等しいマール"，"数に等しいジズル"というようなものである．

*

＊

また，例えば"4個のジズルに等しい，1/3個のマール"というようなもの．すると，そのマールは全体でジズル12個に等しい．これは144であり，そのジズル（根）は12である．

＊

あるいはまた，"10個のジズルに等しい5個のマール"というようなもの．すると，1個のマールは2個のジズルに等しい．そのマールのジズル（根）は2であり，マールは4である．

＊

このように，1個より多い，あるいは少ないマールは，1個のマールへと還元される．そのマールに等しかったジズルも，同じ操作がなされ，マールが還元された結果に等しいものへと還元される．

＊

"数に等しいマール"とは，例えば"9に等しいマール"というようなものである．すると，その9がマールであり，それのジズル（根）は3である．

＊

また，例えば"80に等しい5個のマール"というようなもの．すると1つのマールは80の1/5，すなわち16である．

＊

あるいはまた，"18に等しい1/2個のマール"というようなもの．すると，そのマールは36に等しく，それのジズル（根）は6である．

＊

このように，すべてのマールは，（1個より）多かろうと少なかろうと，1個のマールに還元される．1個のマールより少ないならば，完全な1個のマールを完成するまで，それを増やせ．そして，同じことが，そのマールに等しかった数にもなされ（ねばならない）．

＊

"数に等しいジズル"とは，例えば"数の3に等しい（1個の）ジズル"とい

うようなものである．すると，そのジズルは3であり，そこから生じるマールは9である．

*

また，例えば"20に等しい4個のジズル"というようなもの．すると，1個のジズルは5であり，そこから生じるマールは 25 である．

*

さらにまた，例えば"10に等しい 1/2 個のジズル"というようなもの．すると，そのジズルは 20 に等しく，そこから生じるマールは 400 である．

*

さて私は，これら3つの種類，すなわちジズル，マール，（独立）数が，（2つずつ）結合されるということ，そして，それから3つの"結合類"[27]が生じることを見出した．"数に等しい，マールとジズル"，"ジズルに等しい，マールと数"，"マールに等しい，ジズルと数"である．

*

"数に等しい，マールとジズル"とは，例えば"39 ディルハムに等しい，(1個の）マールとそのジズル（根）10 個"というようなものである．その意味は"どんなマールに 10 個のジズルを加えたら，全体として 39 になるか？"ということである．すると，その解法は，ジズル（の個数）を半分にすることである[28]．この問題では，それは5である．そして，それを自身に掛ける．すると 25 になる．それをかの 39 に加える．すると，64 になる．そこで，その根をとる．それは8である．そこからジズル（の個数）の半分すなわち5を引く．すると3が残る．それが求めるマールのジズル（根）であり，マールは9である．

*

同様に，もし2個のマールとか3個とか言われたなら，あるいはもっと多かったり少なかったりしたならば，それを1個のマールに還元せよ．そして，マールと共にあったジズルと数も，マールが還元されたのと同じものへと還元せよ．

＊

それは，例えば"48 ディルハムに等しい，2 個のマールと 10 個のジズル"というようなものである．その意味は"どんな2個のマールが集められ，それにそのジズル（根）10 個に相当するものが加えられたら，48 ディルハムになるか？"ということである．すると，その２個のマールを１個のマールに還元しなければならない．２個のマールから１個のマールというのは，それの半分であることがわかっている．そこで，この問題中の各々のものを半分にして還元せよ．すると，"24 ディルハムに等しい，１個のマールと５個のジズル"というようなものになる．その意味は"ジズル（根）５個を加えると 24 になるのは，どんなマールか？"ということである．そこで，そのジズル（の個数）を半分にせよ．すると $2\frac{1}{2}$ となる．そして，それを自身に掛けよ．すると，$6\frac{1}{4}$ となる．それを 24 に加えよ．すると，$30\frac{1}{4}$ ディルハムとなる．そこで，そのジズル根を取れ．それは $5\frac{1}{2}$ である．そこからジズルの（個数の）半分，すなわち $2\frac{1}{2}$ を引け．すると３が残る．それが（求める）マールのジズル（根）であり，マールは９である．

＊

同様に，もし"28 ディルハムに等しい，1/2 個のマールと５個のジズル"と言うならば，その意味は"どんなマールが，それの半分にそれのジズル（根）５個に相当するものを加えたら，28 ディルハムになるか？"ということである．そこで，そのマールを完成させて，完全なマールとなるようにしたい．それは（その 1/2 個のマールを）倍にすることである．そこで，それを倍にせよ．さらに，手元の，それに等しいものすべても倍にせよ．すると，"56 ディルハムに等しい，（１個の）マールと 10 個のジズル"となる．そこで，そのジズル（の個数）を半分にして，５とせよ．そして，それをそれと同じものに掛け，25 とせよ．それを 56 に加えて，81 とせよ．そこで，その根を取れ．９である．そこから，ジズル（の個数）の半分，すなわち５を引け．すると，４が残る．それが，求めるマールのジズル（根）であり，マールは 16 である．そして，その半分は８である．

＊

マールとジズル（が結合されたもの）と，それらに等しい（ある）数が出て来た場合には，すべてこのように行なえ．うまくいくであろう．

＊

“ジズルに等しい，マールと数”とは，例えば“10 個のジズルに等しい，1 個のマールと数の 21 ディルハム”というようなものである．その意味は“21 ディルハムを加えたら，その結果が 10 個のジズルに等しくなるのは，どんなマールか？”ということである．そこで，その解法は，ジズル（の個数）を半分にすることである．すると，5になる．それを自身に掛けよ．25 になる．そこから，マールと共にあると言われた 21 を引け．4が残る．そこで，その根を取れ．2である．それをジズル（の個数）の半分，すなわち5から引け．すると，3が残る．それが，求めるマールのジズル（根）であり，マールは9である．もし望むならば，その根（すなわち2）をジズル（の個数）の半分に加えよ．すると7になる．それが，求めるマールのジズル（根）であり，マールは 49 である．

＊

このタイプへと帰着されるような問題に出会ったときは，問題の（解の）正しさを（まず，）足し算をして確かめよ．もし，そうでなければ，（その問題の解は）必ず引き算によるのである．このタイプは足し算と引き算の両方によって解かれるものなのである．このようなことは，ジズル（の個数）を半分にする必要がある3つのタイプのうち，これ以外にはあり得ない．（さらに）知っておくべきことは，このタイプの問題で，もし，ジズル（の個数）を半分にし，それ自身に掛けて，その結果がマールと共にあるディルハムよりも小さかったならば，その問題は不可能である．また，ディルハムと全く等しかったら，（求める）マールのジズル（根）は，足し算によっても引き算によっても，（問題中の）ジズルの（個数の）半分に等しい．

2個またはそれ以上，あるいはそれ以下のマールが現われてきたときには，第1のタイプで説明したように，それを1個のマールに還元せよ．

*

“マールに等しい，ジズルと数”とは，例えば“1個のマールに等しい，3個のジズルと数の4”というようなものである．すると，その解法はジズル（の個数）を半分にすることである．すると，$1\frac{1}{2}$ となる．そこで，それを自身に掛けよ．すると，$2\frac{1}{4}$ となる．それを（問題中の）4に加えよ．すると，$6\frac{1}{4}$ となる．そこで，その根を取れ．それは $2\frac{1}{2}$ である．そこで，それをジズル（の個数）の半分，すなわち $1\frac{1}{2}$ に加えよ．すると，4になる．これが，（求める）マールのジズル（根）であり，マールは16である．

*

1個のマールより大きかったり，あるいは小さかったりするものはすべて，1個のマールに還元せよ．

*

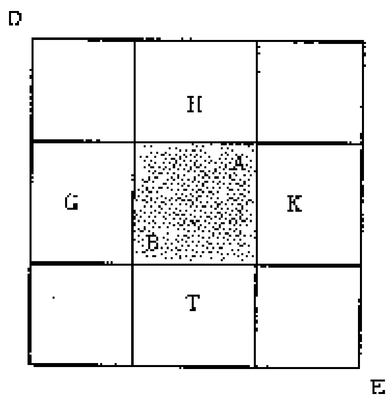
これが，本書の最初で述べた，6つの種類である．（今，）その解説が終わった．私は，それらの内にジズル（の個数）を半分にしない（で解かれる）3つの種類があることを知らせ，それらの解法と必要事項を説明した．一方，ジズルを半分にする必要がある残りの3つのタイプは，私はそれを（証明された）正しいタイプで記述した[29]．そして，そのタイプの各々に対して，半分にすることの理由を示すような図を描いた．

*

“39ディルハムに等しい，（1個の）マールと10個のジズル”の（解法の）理由については，それの図は辺の知られていない四角形の面である．これがマールで，我々はそれと，それのジズル（根）を知ることを望む．それは面 AB である．それの各辺は，その（面の）ジズル（根）である．（そこで），それの各辺がある数に掛けられると，その数が到達した結果は，ジズルの個数で，そのジズルの各々はこの面のジズルに等しい．したがって，“マールには，それのジズルが10個ある”と言われたとき，我々は10の1/4，すなわち $2\frac{1}{2}$ を取り，それら1/4の各々を（マールの）面の各辺につくる：すると，最初の面，すなわち AB に（隣接して），4つの面ができる．その各々の面の長さは

面 AB のジズル（根）に等しく，幅は $2\frac{1}{2}$ である．これらは HTKG である．すると，等辺の，そして未知の面が生じる．この面は四隅で各々 $2\frac{1}{2}$ 掛ける $2\frac{1}{2}$ ずつ欠けている．そこで，この面が四角形になるのに必要なものは，$2\frac{1}{2}$ の自乗の4倍となる．その結果は全部で 25 である．最初の面，すなわちマールの面と，その回りの4つの面，すなわち 10 個のジズル（との和）は数の 39 であることがわかっているから，それに 25，すなわち，面 AB の四隅にある4つの四角形を加えると，大きな面の四角形化が完成する．それが DE である．また，それが全体で 64 であることと，それの一辺はそれのジズル（根）すなわち8であることがわかっている．そこで，その8から（ジズルの個数）10 の 1/4 に等しいものを2つ，（したがって，合わせて）5を大きな面，すなわち面 DE の辺の両端から引くと，その辺のうち，3が残る．それが求めるマールのジズル（根）である．

10 個のジズルを半分にし，それを自乗して，数，すなわち 39 に加えたのは，四隅に欠けているものを（補って）大きな面を完成するためにほかならない．というのは，どんな数でも，その 1/4 を自乗して4に掛けると，（もとの数の）半分の自乗に等しくなるから，ジズル（の個数）の半分を自乗することによって，1/4 を自乗して4に掛けるという必要がなくなるのである．



右図がその図である．

この（問題）に対してはまた，これ（と同じ結果）に至る別の図がある．それは面 AB で，これがマールである．さて，我々はそれに 10 個のジズルに相当するものを加えたい．そこで，その 10 を半分にする．それは5となる．それらを面 AB の二方に接する2つの面とする．すなわち，面GとDである．それらの面の各々の長さは5ジラーア[40]，すなわち 10 個のジズル（の個数）の

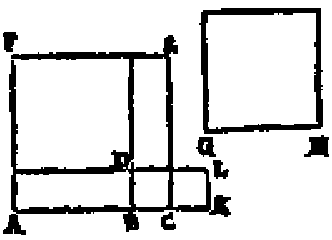
relinquitur prima 6 m: ℞ 30$\frac{6}{7}$, hæ autem quantitates proportionales sunt, & quadratum secundæ est æquale duplo producti secundæ in primam, cum quadruplo primæ, ut proponebatur.

De cubo & rebus æqualibus numero. Cap. XI.

SCipio Ferreus Bononiensis iam annis ab hinc triginta ferme capitulum hoc inuenit, tradidit uero Anthonio Mariæ Florido Veneto, qui cū in certamen cū Nicolao Tartalea Brixellense aliquando uenisset, occasionem dedit, ut Nicolaus inuenerit & ipse, qui cum nobis rogantibus tradidisset, suppressa demonstratione, freti hoc auxilio, demonstrationem quæsiuimus, eamq; in modos, quod difficillimum fuit, redactam sic subiecimus.

DEMONSTRATIO.

Sit igitur exempli causa cubus G H & sexcuplum lateris G H æquale 20, & ponam duos cubos A E & C L, quorum differentia sit 20, ita quod productum A C lateris, in C K latus, sit 2, tertia scilicet numeri rerum pars, & abscindam C B, æqualem C K, dico, quod si ita fuerit, lineam A B residuum, esse æqualem G H, & ideo rei æstimationem, nam de G H iam supponebatur, quod ita esset, perficiam igitur per modum primi suppositi 6i capituli huius libri, corpora D A, D C, D E D F, ut per D C intelligamus cubum B C, per



D F cubum A B, per D A triplum C B in quadratum A B, per D E triplum A B in quadratū B C. quia igitur ex A C in C K fit 2, ex A C in C K ter, fiet 6 numerus rerum, igitur ex A B in triplum A C in C K fiunt 6 res A B, seu sexcuplum A B, quare triplum producti ex A B, B C, A C, est sexcuplum A B, at uero differentia cubi A C, à cubo C K, & existenti à cubo B C ei æq̄li ex supposito, est 20, & ex supposito primo 6i capituli, est aggregatum corporum D A, D E, D F, tria igitur hæc corpora sunt 20, posita uero B C m: cubus A B, æqualis est cubo A C, & triplo A C in quadratum C B, & cubo B C m: & triplo B C in quadratum A C m: per demonstrata illic, differentia autem tripli B C in quadratum A C, à triplo A C in quadratum B C est productum A B, B C, A C, quare cum hoc, ut demonstratum est, æquale sit sexcuplo A B, igitur addito sexcuplo A B, ad id quod fit ex A C in quadratum B C ter, fiet triplum B C in quadratum A C, cum igitur B C sit m: iam ostensum est, quod productum C B

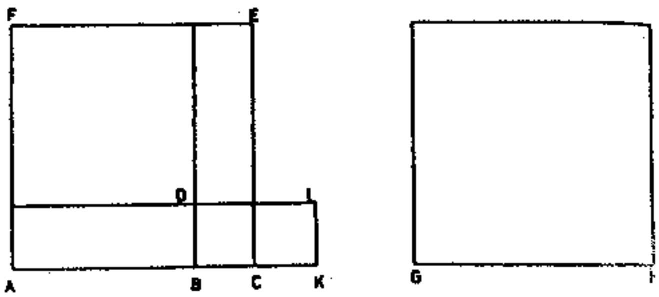
CONCERNING A CUBE AND UNKNOWNS EQUAL TO A NUMBER

Chapter XI

Scipio del Ferro of Bologna about thirty years ago invented [the method set forth in] this chapter, [and] communicated it to Antonio Maria Florido of Venice, who when he once engaged in a contest with Nicolo Tartaglia of Brescia announced that Nicolo also invented it: and he [Nicolo] communicated it to us when we asked for it, but suppressed the demonstration.[1] With this aid we sought the demonstration, and found it, though with great difficulty, in the manner which we set out in the following.

Demonstration. For example, let the cube of GH and six times the side GH be equal to 20.[2] I take [Fig. 1] two cubes AE and CL whose difference shall be 20, so that the product of the side AC by the side CK shall be 2, i.e., a third of the number of unknowns, and I lay off CB equal to CK; then I say that if it is done thus, the remaining line AB is equal to GH and therefore to the value of the unknown (for it was supposed of GH that it was so). Therefore I complete, after the manner of the first theorem of the 6th chapter of this book,[3] the solids DA, DC, DE, DF, so that we understand by DC the cube of BC, by DF the cube of AB, by DA three times CB times the square of AB, by DE three times AB times the square of BC. Since therefore from AC times CK the result is 2, from 3 times AC times CK will result 6, the number of unknowns, and therefore from AB times 3 AC times CK there results 6 unknowns AB, or 6 times AB, so that 3 times the product of AB, BC, and AC is 6 times AB. But the difference of the cube AC from the cube CK, and likewise from the cube BC, equal to it by hypothesis, is 20; and from the first theorem of the 6th chapter, this is the sum of the solids DA, DE, and DF, so that these three solids make 20. But taking BC minus, the cube of AB is equal to the cube of AC and 3 times AC into the square of CB and minus the cube of BC and minus 3 times BC into the square of AC. By the demonstration, the difference between 3 times CB times the

Fig. 1



in quadratum A C ter, est m: & reliquum quod ei æquatur est p: igitur triplum C B in q̃dratum A B, & triplum A C in q̃dratũ C B, & sexcuplũ A B nihil faciunt. Tanta igitur est differentia, ex cõmuni animi sententia, ipsius cubi A C, à cubo B C, quantum est quod cõflatur ex cubo A C, & triplo A C in quadratum C B, & triplo C B in quadratum A C m: & cubo B C m: & sexcuplo A B, hoc igitur est 20, quia differentia cubi A C, à cubo C B, fuit 20, quare per secundum suppositum 6ⁱ capituli, posita B C m: cubus A B æquabitur cubo A C, & triplo A C in quadratum B C, & cubo B C m: & triplo B C in quadratum A C m: cubus igitur A B, cum sexcuplo A B, per communem animi sententiam, cum æquetur cubo A C & triplo A C in quadratum C B, & triplo C B in quadratum A B m: & cubo C B m: & sexcuplo A B, quæ iam æquantur 20, ut probatum est, æquabuntur etiam 20, cum igitur cubus A B & sexcuplum A B æquentur 20, & cubus G H, cum sexcuplo G H æquentur 20, erit ex communi animi sententia, & ex dictis, in 35ª pⁱ & 31ª undecimi elementorum, G H æqualis A B, igitur G H est differentia A C & C B, sunt autem A C & C B, uel A C & C K, numeri seu liniæ continentes superficiem, æqualem tertiæ parti numeri rerum, quarum cubi differunt in numero æquationis, quare habebimus regulam.

REGULA.

Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidij numeri æquationis, & totius accipe radicem, scilicet quadratam, quam seminabis, unicq; dimidium numeri quod iam in se duxeras, adijcies, ab altera dimidium idem minues, habebisq; Binomium cum sua Apotome, inde detracta ℞ cubica Apotomæ ex ℞ cubica sui Binomij, residuũ quod ex hoc relinquitur, est rei æstimatio.

Exemplum, cubus & 6 positiones, æquantur 20, ducito 2, tertiam partem 6, ad cubum, fit 8, duc 10 dimidium numeri in se, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, accipe radicem quæ est ℞ 108, & eam geminabis, alteri addes 10, dimidium numeri, ab altero minues tantundem, habebis Binomiũ ℞ 108 p: 10, & Apotomen ℞ 108 m: 10, horum accipe ℞ᵃˢ cubᵃˢ & minue illam quæ est Apotomæ, ab ea quæ est Binomij, habebis rei æstimationem, ℞ v: cub: ℞ 108 p: 10 m: ℞ v: cubica ℞ 108 m: 10.

cubᵘˢ p: 6 rebᵘˢ æq̃lis 20	
2	20
8	10
108	
℞ 108 p: 10	
℞ 108 m: 10	
℞ v: cu. ℞ 108 p: 10	
m: ℞ v: cu. ℞ 108 m: 10	

Aliud, cubus p: 3 rebus æquetur 10, duc 1, tertiam partem 3, ad cubum, fit 1, duc 5, dimidium 10, ad quadratum, fit 25, iunge 25 & 1, square of AC, and 3 times AC times the square of BC, is [3 times] the product of AB, BC, and AC. Therefore since this, as has been shown, is equal to 6 times AB, adding 6 times AB to that which results from AC into 3 times the square of BC there results 3 times BC times the square of AC, since BC is minus. Now it has been shown that the product of OB[4] into 3 times the square of AC is minus; and the remainder which is equal to that is plus, hence 3 times CB into the square of AC and 3 times AC into the square of CB and 6 times AB make nothing. Accordingly, by common sense, the difference between the cubes AC and BC is as much as the totality of the cube of AC, and 3 times AC into the square of CB, and 3 times CB into the square of AC (minus), and the cube of BC (minus), and 6 times AB. This therefore is 20, since the difference of the cubes AC and OB was 20. Moreover, by the second theorem of the 6th chapter, putting BC minus, the cube of AB will be equal to the cube of AC and 3 times AC into the square of BC minus the cube of BC and minus 3 times BC into the square of AC. Therefore the cube of AB, with 6 times AB, by common sense, since it is equal to the cube of AC and 3 times AC into the square of CB, and minus 3 times CB into the square of AC, and minus the cube of CB and 6 times AB, which is now equal to 20, as has been shown, will also be equal to 20. Since therefore the cube of AB and 6 times AB will equal 20, and the cube of GH, together with 6 times GH, will equal 20, by common sense and from what has been said in the 35th and 31st of the 11th Book of the *Elements*, GH will be equal to AB, therefore GH is the difference of AC and CB. But AC and CB, or AC and CK, are numbers or lines containing an area equal to a third part of the number of unknowns whose cubes differ by the number in the equation, wherefore we have the

RULE[5]

Cube the third part of the number of unknowns, to which you add the square of half the number of the equation, and take the root of the whole, that is, the square root, which you will use, in the one case adding the half of the number which you just multiplied by itself, in the other case subtracting the same half, and you will have a binomial and apotome respectively; then subtract the cube root of the apotome from the cube root of the binomial, and the remainder from this is the value of the unknown. In the example, the cube and 6 unknowns equals 20; raise 2, the 3rd part of 6, to the cube, that makes 8; multiply 10, half the number, by itself, that makes 100; add 100 and 8, that makes 108; take the root, which is $\sqrt{108}$, and use this, in the first place adding 10, half the number, and in the second place subtracting the same amount, and you will have the binomial $\sqrt{108} + 10$, and the apotome $\sqrt{108} - 10$; take the cube root of these and subtract that of the apotome from that of the binomial, and you will have the value of the unknown $\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$.

AC と CK の積は６倍の AB である。よって、AB、BC、AC の積の３倍は６倍の AB である。しかし AC の立方と CK または BC の立方との差は仮定より２０であり、また第６章の最初の定理から、これは DA、DE、DF の和である、すなわちこれらの３つの立体は２０をつくる。しかし BC を負にとると、AB の立方は AC の立方と３倍の AC と CB の平方との積との和から、BC の立方、３倍の BC と AC の平方の積を引いたものである。証明によって、３倍の CB と AC の平方との積と、３倍の AC と BC の平方との積の差は、AB、BC、AC の積の３倍である。したがってこれは６倍の AB であり、BC は負であるから AC と BC の平方の３倍との積に６倍の AB を加えると、３倍の BC と AC の平方との積になる。よって CB と AC の平方の３倍との積は負であることが示された。したがってこれに等しいものは正であり、それゆえ３倍の CB と AC の平方との積、３倍の AC と CB の平方との積、６倍の AB の和は何もつくらない。それゆえ AC の立方と BC の立方との差は、AC の立方、３倍の AC と CB の平方との積、３倍の CB と AC の平方との積（負）、BC の立方（負）、６倍の AB の総和である。AC の立方と CB の立方との差は２０であるから、これらは２０である。さらに第６章の２つ目の定理から BC を負とおくと、AB の立方は、AC の立方、３倍の AC と BC の平方との積、BC の立方（負）、３倍の

BC と AC の平方との積（負）の総和である。したがって AB の立方と６倍の AB との和は、AC の立方、３倍の AC と CB の平方との積、３倍の CB と AC の平方との積（負)、CB の立方、６倍の AB の総和であるから２０である。したがって、AB の立方と６倍の AB の和は２０である。そして GH の立方と６倍の GH の和も２０であるから、原論１１巻の３１と３５でいわれているように GH と AB は等しいといえる。よって GH は AC と CB との差である。しかし AC と CB、または AC と CK は面積を含んだ数、線分であり、その面積は未知数の個数の３分の１に等しく、未知数の立方は方程式の中の(定)数とは異なる。それゆえに規則がある。

RULE

未知数の個数の３分の１の立方に定数の半分の平方を加え、全体の平方根をとり、ひとつの場合は定数の半分を加え、もうひとつの場合は定数の半分を引くと、binomial と apotome をそれぞれ得る。このとき、binomial の立方根から apotome の立方根を引き、残ったものが未知数の値である。例の中では立方と未知数の６倍が２０であり、６の３分の１である２をとる。その立方は８である。定数の半分である１０を平方すると 100 である。８と 100 を加え 108 となり、その平方根 $\sqrt{108}$ をとる。そしてこれに定数の半分である１０を加え、また１０を引くと $\sqrt{108}+10$ と $\sqrt{108}-10$ を得る。これらの立方根をとり、前者の立方根から後者の立方根を引いたものが求める未知数の値である。

すなわち $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$

第１１章　－解説－

　例として GH の立方と GH の６倍が２０に等しいとしよう。GH＝x とおけばこれは $x^3+6x=20$ を表す(現代表記)。ここで二つの立方体の一辺である AC=u, CK=CB=v を次を満たすように定める。

　$u^3-v^3=20$

　$uv=6/3=2$

このとき $u-v=x$ となる。

なぜならば立方体 AE（＝u^3）は次のように分割できる。

✧　一辺 u-v の立方体１個

✧　一辺 v の立方体１個

✧　それぞれの辺が u-v, u-v, v である直方体３個

✧　それぞれの辺が v, v, u-v　 である直方体３個

すなわち、

$u^3=(u-v)^3+v^3+3v(u-v)^2+3v^2(u-v)$

ここで、下のそれぞれ二つの直方体はくっついて u, v, u-v の直方体になるので、

$u^3=(u-v)^3+v^3+3uv(u-v)$

よって、

$u^3-v^3=(u-v)^3+3uv(u-v)$

仮定より u^3-v^3＝20、uv=2 であるから

$20=(u-v)^3+6(u-v)$

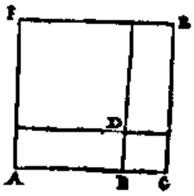
ここで

$20=x^3+6x$ であるから $u-v=x$ が成り立つ。

De cubo æquali rebus & numero. Cap. XII.

Demonstratio.

Sit etiam cubus æqualis rebus & numero, & sint duo cubi D C & D F, quorum latera A B & B C, producãt tertiam partem numeri rerum, inuicem ducta, & ipsi cubi iuncti æquales illi numero, dico A C esse rei quæsitæ æstimationẽ, cum enim ex A B, in B C, fiat tertia pars numeri rerum, ex A B in B C ter, fiet numerus rerũ, & ex A C in productum ex A B in B C ter, fient res ipsæ, posita A C re, at ex A C in productum A B in B C ter, fiunt sex corpora, quorum tria sunt ex A B in quadratum B C, alia tria ex B C in quadratum A B, hæc igitur sex corpora, æqualia sunt rebus, ipsa uero cum cubis D C & D F, ex primo supposito capituli sexti constituunt cubum A E, cubi etiam D C & D F, æquiualent numero proposito, igitur cubus A E, æqualis est rebus & numero propositis, quod erat demonstrandum, superest ostendere, quod triplum A C in productum A B in B C, fit æquale sex corporibus, id ostendã, si probauero ex A B, in B C ducto in A C, fieri duo corpora ex A B in quadratum B C, & ex B C in quadratũ A B, nam quod fit ex A C in productum A B in B C, æquale est ei, quod fit ex A B in superficiem B E, latera enim omnia omnibus sunt æqualia, sed hoc æquale est ei, quod fit ex A B in C D & D E, quod autem fit ex A B in D E, æquale est ei, quod fit ex C B in quadratum A B, quoniam latera omnia omnibus sunt ęqualia, quod igitur ex A C, in productum A B in B C fit, æquale est his, quæ fiunt ex A B in quadratum B C & ex B C in quadratum A B, quod est propositum.



Regula.

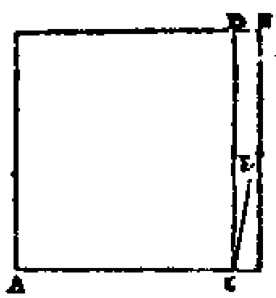
Regula igitur est, cum cubus tertiæ partis numeri rerum, maior non fuerit quadrato dimidij numeri æquationis, aufers ipsum ex eodem, & residui radicem, adde dimidio numeri æquationis, atque iterum minue ab eodem dimidio, habebisque ut dicunt, Binomium, & Apotomen, quorum ℞ cubicæ iunctæ rem ipsam constituunt. Exemplum, cubus æquatur 6 rebus p:40, duc 2, tertiam partem numeri rerum, ad cubum, fit 8, aufer ex 400, quadrato 20, dimidij numeri, fit 392, huius radicẽ adijce ad 20, fit 20, p: ℞ 392, detrahe etiam ab eodem, fit 20 m: ℞ 392, horum ℞ cubicæ iunctæ, faciunt rei æstimationem,

nem, ℞ v: cubicam 20 p: ℞ 392 p: ℞ v: cubica 20 m: ℞ 392. Aliud, cubus ęquatur 6 rebus p: 6, tertiam partem numeri rerum, quę est 2, ad cubum, ducito, fit 8, detrahe ex 9 quadrato dimidij 6 numeri ęquationis, relinquitur 1, cuius ℞ est 1, hanc adde & minue à 3, dimidio numeri, fiunt partes, 4 & 2, quarum ℞ cubicæ iunctę, faciunt ℞ cubicam 4 p: ℞ cubica 2, æstimationem rei.

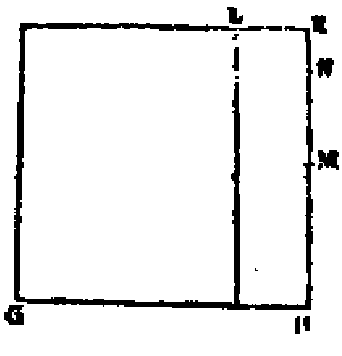
At ubi cubus tertiæ partis numeri rerum, excedat quadratum dimidij numeri, æquationis, quod accidit quandocunque numerus æquationis est minor $\frac{3}{4}$ cubi illius, uel ubi ex $\frac{2}{3}$ numeri rerum, producitur in ℞ $\frac{1}{3}$ eiusdem numeri maior numerus numero ęquationis, tunc hoc dissoluitur per quæstionem Alizam, de qua in libro de quæstionibus Geometricis dictum est, sed si libet tantam effugere difficultatem, plerunque capitulum 25ᵐ huius tibi satisfaciet.

De cubo & numero æqualibus rebus. Cap. XIII.

DEMONSTRATIO.



HOc capitulum ex præcedenti trahitur, sit igitur cubus G H, æqualis rebus A B, quæ describuntur quadrata superficie & numero F, & sit basis cubi G H, quadratũ G K, cuius pars quarta sit H L, residuum autem æquale A D superficiei, latus autem, quod Græce tetragonicum uocant, residui C D sit C E, sit uero H M dimidium H K, à qua abscindatur M N, æqualis C E, dico quod tam H N, quã N K, cubi, cum numero F, æquantur rebus A B, ut numerus rerũ & ęquationis idem maneat, & primò ostendamus de H N, constat enim cubũ H N continere latus suum, H N in quadrato H N, quadratum autem A B (quia G L æqualis est A D, & G L triplum est quadrati H M) æquale est triplo q̃drati H M, & quadrato M N, hæc autem superant, ex 4ª 2ⁱ elementorum, quadratum H N, in duplo N M in N K, quare in eo quod fit ex N K in N K, quia H K dupla est ad H M, cubus igitur H N, cõtinet latus suum



F .... numerus.

N M

－第１２章冒頭の英訳－

Let the cube be equal to unknowns and number. I take two cubes DC and DF whose sum shall be the number, so that the product of the side AB by the side BC shall be a third of the number of unknowns. Then I say that if it is done thus, the line AC is equal to the value of the unknowns.

Sum **和**　product **積**　side **辺**　value **値**　a third of **～**　**～の３分の１**

―配布資料―

CONCERNING A CUBE EQUALS TO UNKNOWNS AND NUMBER

第１２章

立方が未知数と数に等しいとする。そして DC,DF をふたつの立方体とし、その各々の一辺、AB,BC の積が未知数の個数の３分の１に等しいとする。また二つの立方体の（体積の）和が数に等しいとする。このとき AC が未知数に等しいといえる。AB と BC の積は未知数の個数の３分の１であるから、AB と BC の積の３倍は未知数の個数に等しい。よって AC は未知数であると仮定されたから、AC と、AB と BC の積の３倍との積は一次の項（ unknowns）に等しい。しかし AC と、AB と BC の積の３倍は６つの立体をつくる。そのうちの３つは AB と BC の平方との積であり、もう一方の３つは BC と AB の平方との積である。したがってこれら６つの立体は一次の項に等しい。したがって第６章の初めの定理により、これら６つの立体に二つの立方体 DC,DF を加えたものは立方体 AE を構成する。立方体 DC と DF は与えられた（定）数に等しい。したがって立方体 AE は与えられた一次の項と数に等しい。これが示すべきことであった。

まだ AC と、AB と BC の積の３倍との積が６つの立体に等しいことを示すことが残っている。これはもし AB と、BC と AC の積との積が２つの立体、AB と BC の平方との積、BC と AB の平方との積に等しいことが示せれば十分である。AC と、AB と BC の積は AB と面 BE との積に等しい。なぜならすべての辺はすべての辺と等しいからである。しかしこれは AB と、CD と DE の和との積に等しい。AB と DE との積は CB と AB の平方との積に等しい、なぜならすべての辺はすべての辺と等しいからである。したがって AC と、AB と BC の積は AB と BC の平方との積、BC と AB の平方との積に等しい。

RULE

未知数の個数の３分の１の立方が、定数の半分の平方よりも大きくないとき、後者から前者を引け。そしてその平方根を定数の半分に加えよ。また定数の半分から引け。そうすれば binomial と apotome をそれぞれ得る。それらの立方根の和が求める x の値である。

第１2 章　－解説－

$x^3=6x+40$(現代表記)。ここで二つの立方体の一辺である AB=u, BC=v を次を満たすように定める。

$u^3+v^3=40$・・・①

$uv=6/3=2$・・・②

このとき $u+v=x$ **となる。**

なぜならば立方体 AE（＝$(u+v)^3$）**は次のように分割できる。**

- ✧　**一辺** u **の立方体１個**
- ✧　**一辺** v **の立方体１個**
- ✧　**それぞれの辺が** u, v, v **である直方体３個**
- ✧　**それぞれの辺が** v, u, u 　**である直方体３個**

すなわち、

$(u+v)^3=u^3+v^3+3uv^2+3vu^2$

ここで、下のそれぞれ二つの直方体はくっついて $u, v, u+v$ **の直方体になるので、**

$(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$

よって、

仮定より $u^3+v^3=40$、$uv=2$ **であるから**

$(u+v)^3=40+6(u+v)$

ここで

$x^3=40+6x$ **であるから** $u+v=x$ **が成り立つ。**

②を両辺３乗して,

$u^3v^3=8$

これに $v^3=40-u^3$ **を代入して**

$u^3(40-u^3)=8$ **ここで** $u^3=U$ **とおき整理すると,**

$U^2+8=40U$

よってこれはマールと数がジズルに等しいものであるから解ける。

４０を半分にする。すると２０になる。それを自身に掛けると４００になる。そこから８をひく。３９２が残る。その平方根をとると $\sqrt{392}$ **になる。２０にそれを加えたものは** $20+\sqrt{392}$ **であり､**20 **からそれをひいたものは** $20-\sqrt{392}$ **である。（これらが** u^3、v^3 **である。）したがってこれらの立方根の和が求める** x **の値である。よって**

$$x=\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$$