出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(8)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.185-194、2001年3月

数学観を変容させる数学史の効果

～中世の代数史を用い，数学を文化として捉えることをねらって～

筑波大学大学院修士課程教育研究科
伊藤賢二郎

1、　はじめに
2、　研究目的および方法
3、　授業概要
4、　議論・考察
5、　おわりに

要約

本論文は平成11年学習指導要領で新設された「数学基礎」の目標に着目し，「数学と人間とのかかわりや，社会生活において数学が果たしている役割」は伝えることによって，生徒の数学観を変容させ，数学に対する意欲・関心に結びつくのかを検討する。授業において原典を用い，数学と人や社会とのかかわりなど文化的側面を重視した。結果として生徒は歴史の中に意義を見出し，自分なりの解釈ができた。授業後の生徒の記述では，生徒の関心は数学者の発想や数学の概念の形成過程など様々なところに向けられた。数学観において，数学を文化として捉える視点を持つことができるようになること，またそれが数学を学ぶ意欲に結びつくことが得られた。

1、　はじめに

平成11年学習指導要領数学の各科目第1節，数学基礎の目標に「数学と人間とのかかわりや，社会生活において数学が果たしている役割について理解させ，数学に対する興味・関心を高めるとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し数学を活用する態度を育てる。」とある。このことに関連して国立教育研究所による「児童・生徒の基礎学力の形成と指導方法との関連に関する総合的研究」（1994年）の「算数・数学」での児童生徒質問紙結果から，筆者は二つの問題を提起する。第一に，多くの生徒は数学を学ぶ意義を見出せていないこと。第二に，数学観において数学を文化として捉えられていないことである。モリス・クラインは著書「数学文化史」の中で以下のように述べている。「学校の授業や教科書は「数学」を無意味な計算技術の連続として扱っている。（中略）数学も人間文明の中

における位置を見失い，単なる計算技術に引き直されると，いちじるしくゆがんだものになる。」これは 50 年前に書かれたものだが，彼の批判は今日の学校数学にもなおあてはまる。

筆者は上に述べた問題を改善するために数学史が重要な役割を果たすと考える。数学史に残された経験は数学を文化として捉えるのに有効に働き，生徒の数学観を変容させると思われる。数学史活用には塚原の研究があるが，これは数学を文化として捉えさせることを主としたものではない。筆者は中世の代数（方程式）を題材にとり，数学の概念形成の過程や人・社会とのかかわりに目を向け，そこから文化という側面に気づかせたい。また数学基礎の目標にあるように，数学を文化として捉えることによって，それが意欲や関心に結びつくのかどうかを明らかにする。

２、 研究目的および方法

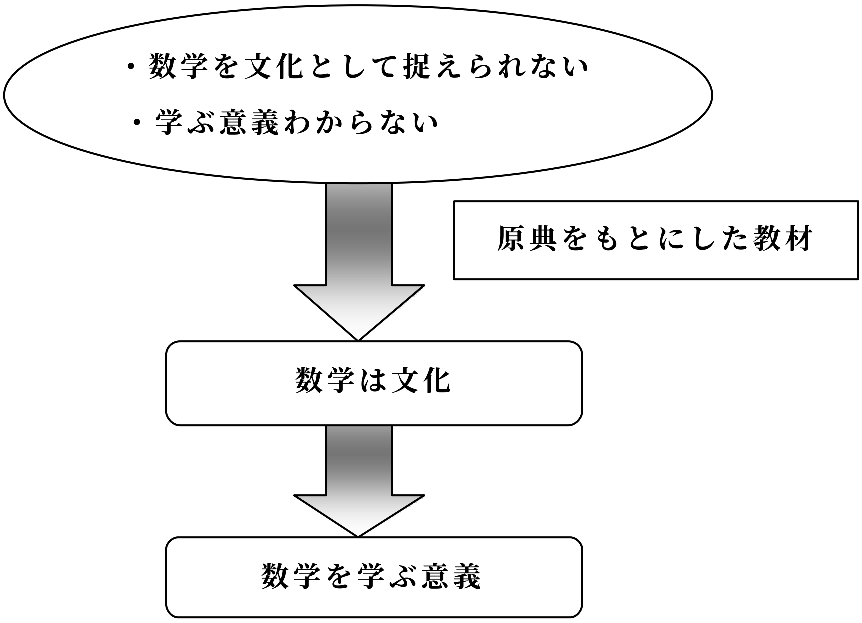
（１）目的

原典を読み追体験することにより，生徒ひとりひとりが数学を文化として捉えられ数学観が変容するか，またその中で数学を学ぶ意義を見出せるかを明らかにする。

（２）目的を達成するために

資料として原典（「ジャブルとムカーバラ」の一部，「アルスマグナ」第 11，12 章），その英訳・和訳を載せ，追体験させるために必要な最小限の解説を用い原典を読みすすめる。生徒が数学を文化として捉えられたか，またそれが数学を学ぶ意欲に結びついたか，またはどのように結びつくのかを，授業後に行ったアンケートの記述から読み取り，判断するものとする。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(8)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.185-194、2001年3月



3、　授業概要

（１）対象：私立茗渓学園 3 年 E 組（二次方程式は既習、三次は未習）

（２）教材の解説

＜原典について＞

「ジャブルとムカーバラ」

９世紀アラビアの数学者アル＝フワーリズミーによって著された。現在の一次，二次方程式にあたるものを分類し，それぞれの解法を記した。また二次のものについてはその解法に幾何的な説明を加えている。

「アルスマグナ」

16 世紀イタリアの数学者ジェロラモ　カルダノ（1501～1576）によって著された。三次方程式を分類し 11 章から 23 章で扱っている。それぞれの解法(Regvla，Rule と訳される)と，立体を用いた幾何的な説明(Demonstratio)を与えている。

＜教材開発について＞

生徒になじみ深い方程式の歴史を取り上げた。数学者以外の主観を除くため原典を扱った。原典「ジャブルとムカーバラ」,「アルスマグナ」はそれぞれギリシア数学，インド数学の影響の下に方程式を扱っており,教材にすることによって代数の発達の過程を理解しやすいと考えた。原典を教材化するにあたって，それを忠実に英訳したと判断したものを和訳し，原語のテキスト，その英訳，和訳を

授業資料とした。解説は最小限にとどめ，２・３時間目の幾何的説明のため立方体の模型を用意した。

（３）展開

◆ 「ジャブルとムカーバラ」を読み，現在の方程式にあたるものの当時の解法，またその幾何的説明を体験する（一時間目）

- 原典の問題からマール（二次の量）とジズル（一次の量）の関係を予想する。

①「“２０に等しい４個のジズル”, すると１個のジズルは５であり，そこから生じるマールは２５である。」

②「“10 個のジズルに等しい 5 個のマール”，すると１個のマールは２個のジズルに等しい。そのジズルは２であり，マールは４である。」

⇒マールはジズルの平方：仮にジズルを x とおけば，マールは x^2

- 現在の方程式にあたるものは当時文章で書かれ，負の数、式が無いこと，また負の数を認めないことから生じる方程式の分類の必要があったことを知る。

③「“数に等しいマール”とは、例えば　“９に等しいマール”というようなものである。するとその９がマールであり、ジズルは３である。」

授業風景

T「この文章で何か気づくことない？」

S「－３がない。」

T「そうだよね。今みんなが解けば±３だよね。そう，この本には負の数が出てこないんだよ。」

S「じゃあいつから出てくるようになったんですか？」

T「いい質問だね。実は負の数は９世紀よりも前，インドにはあったらしいんだよ。アラビア数学はインド数学の影響を受けていたことはわかってるんだ。だからアラビアにも負の数は伝わって存在していたのかもしれない。でも「ジャブルとムカーバラ」には出てこない。そもそも無かったのか、負の数はあったけど方程式の中では認めなかったのかはわからない。どっちなんだろうね。」

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(8)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.185-194、2001年3月

原典を読む

- 文章で書かれた解法（原典中の例として，39 ディルハムに等しい 1 個のマールと 10 個のジズル，に対する解法）の存在を知り，その解法の幾何的説明を原典とワークシートを用いて追体験する。

「“数に等しい、マールとジズル”とは、例えば“３９ディルハムに等しい１個のマールと１０個のジズル”というようなものである。するとその解法は、ジズル（の個数）を半分にすることである。この問題ではそれは５である。そして、それを自身に掛ける。すると２５になる。それを３９に加える。すると６４になる。そこでその根をとる。それは８である。そこからジズル（の個数）の半分、すなわち５を引く。すると３が残る。それが求めるジズルであり、マールは９である。」

T「これを読んでみてほしいんだ。これは何だろう？」

S「わからない。解を求めてる？」

T「そうなんだよ。よくわかったね。これ解を求めてるんだよ。最後の方を見るとジズルは３でマールは９であるって書いてあるよね。みんなもこの方程式解くと同じ答えになったでしょ。これはどう解いているのかな？」

S「わからない。なんか計算してる。」

T「そう，どう解いているかわからないんだよ，ここだけを読むだけでは。でも解けてるよね。だからこれは解法なんだよ。この手順で方程式は解ける。実はこの後続きがあるんだ。彼はこんなことを言ってる。「私は先の問題の解法を説明した。なぜあのように解いたのか、その理由を示すような図を描いた。」彼はどう解いたのかを図を用いて説明してるんだ。今日はそれをみんなに読んでほしい。」

- アラビア数学がギリシア数学（厳密，証明を重んじる）とインド数学（解法のアルゴリズムが発達）の影響を受けていることを知る。

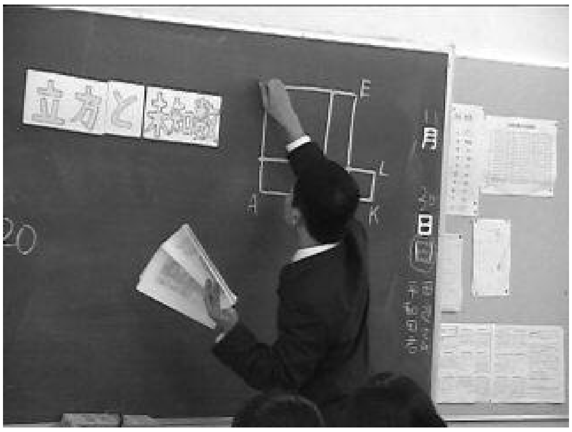
T「今日はみんなに解法の図を用いた説明を読んでもらったよね。彼は図を用いて自分の解法を正当化したんだね。だから彼は図を用いた説明を

証明だと思ったんじゃないかな。「ジャブルとムカーバラ」にははじめに読んだ解法と，今読んだ図を用いた説明の二つが書かれているんだね。数学は昔世界のいろいろなところでそれぞれ発達していたんだ。ギリシアとか中国とかインドとか。でも文化の交流があると数学も互いに影響を及ぼしあったんだよ。アラビア数学はギリシア数学とインド数学の影響を受けているんだ。ほら地理的にもわかる気がするよね。インドでは方程式の解法が発達していたんだ。一方ギリシアでは証明を重んじた厳密な数学が重んじられ発達してたんだよ。はじめに読んだ解法はインドの，図を用いた説明はギリシアの影響を受けたものなんだよ。アラビア数学はこれらを反映したものなんだね。」

◆ 「アルスマグナ」を読み、当時の解法、またその幾何的説明を体験する（二，三時間目）

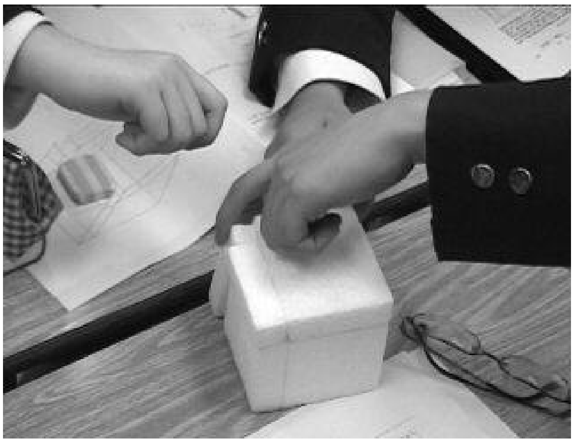
- 中世ヨーロッパの数学がアラビア数学の影響を受けていることを知る。

⇒式，文字，負の数はなく，三次方程式に対して解法のアルゴリズム，それに対する幾何的説明を与えている。



原典の解説

- カルダノがそれぞれの三次方程式に幾何的説明を与えていることを知る。
- 「アルスマグナ」第 11 章を読み、三次方程式（タイプ１）の解法の幾何的説明を理解する（二時間目）
- 「アルスマグナ」第 12 章の英訳を読み、三次方程式（タイプ 2）の解法の幾何的説明を考える（三時間目）



模型を用いて原典を読む

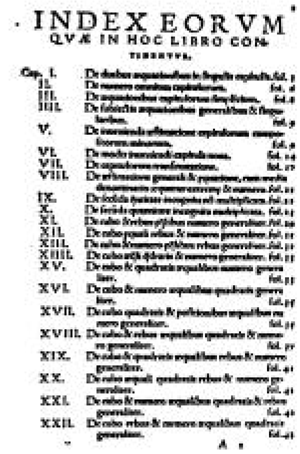
模型を用いて解法を考える

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(8)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.185-194、2001年3月

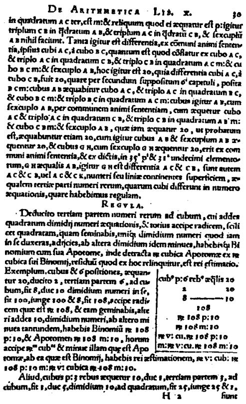
（４）授業資料

アルスマグナ原典：表紙，目次，第 11,12 章

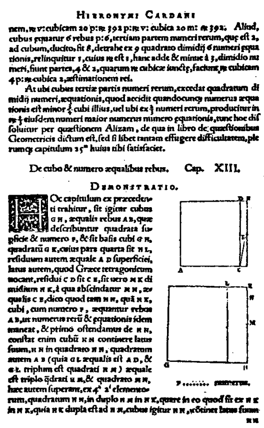

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE-
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
OPVS PERFECTVM


INDEX EORVM
QVÆ IN HOC LIBRO CON-
TINENTVR.

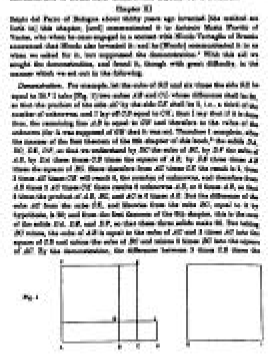

HIERONYMI CARDANI
De cubo & rebus æqualibus numero. Cap. XI.

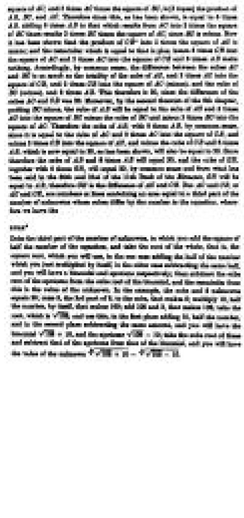

DE ARITHMETICA LIB. X.

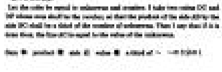

DE ARITHMETICA LIB. X.
De cubo æquali rebus & numero. Cap. XII.


HIERONYMI CARDANI
De cubo & numero æqualibus rebus. Cap. XIII.

アルスマグナ英訳：第 11,12 章


Chapter XI





４、議論・考察

本授業は二つの目的,「原典を読み追体験することにより，生徒ひとりひとりが数学を文化として捉えられ数学観が変容するか」,「またその中で数学を学ぶ意義を見出せるか」を明らかにするために行った。そのため授業（３時間）終了後アンケートを取った。それぞれについてはじめに結果を示し，二つの議論の根拠とする。

事後アンケート結果

「この授業を通して，あなたが変わったと思うことを自由に書いてください。」

◆ 数学観の変容が見られるもの

- 数学（方程式）に対する考え。昔の人は何もないところから新しいものを生み出していた。
- 数学の価値観が変わった。ひとつひとつの公式にも意味があることがわかって驚いた。
- 数学は暗記するものだと思っていたがそうとは思えなくなってきた。
- 数学への考え方。例えば，ただ公式を暗記して問題を解くだけではなく，ひとつひとつきまり，公式に証拠となるものがあるということ，そしてこんなに複雑な証拠を導き出せる昔の人の偉大さに驚いた。
- 前は公式を使ってただ解くだけだと思っていたけど，その公式を発見するまでにもいろいろな苦労があったんだなあと思うようになった。
- どんなものでも証明できないものはないと思うようになった。
- 数学にもいろいろと歴史があることを知って，普段公式を見てそのまま解いている問題も，はじめは誰かが苦労して解いたんだと思うようになった。
- 昔の数学を考えた人とかすごいなあと思った。昔のことも考えるようになった。
- 私たちのように教科書に書いてあることを学ぶのと違って，昔の人は自分で解き方を考えていたことがわかるようになった。
- 資料の本をみて証明にこんなにたくさんのことを書いていたので大変だと思った。公式も昔はなかったのだから発見した人はすごいと思いました。
- 数学を見る目が変わった気がする。
- いろいろな視点から問題を解くことができたと思う。常識にとらわれずに頭をやわらかくして解くことができた。

■ 数学を学ぶ意欲に結びついたもの

- 数学に対する考え方。前はこんなの意味ないとか思ってたけれど，昔の人がこんなこ

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(8)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.185-194、2001年3月

とやってたのかと思ったら意味はあるんじゃないかな，と思い始めた。
- 数学が面白くなるかもしれない。
- 数学に対する情熱
- 昔の人（数学の解き方を考えた人々）のこともわかったしよかった。数学は嫌いだったけどちょっと印象がよくなった。
- 問題を解くのが面白くなった。
- 昔の人が今と違って何もない時代に自分の頭を使って今の数学の原形を創ってくれて，それでいろいろな応用とかができるようになったんだなあと思い，数学をやるときそんなことを頭に入れて私もがんばっていきたいです。昔の人はスゴイ！

今回の授業で筆者は歴史を肯定的に捉えて欲しいと考えていた。歴史を肯定的に捉えるとは，数学を当時の社会，思想の影響を受けた産物として尊重するということ，否定的に捉えるとは，現在の数学に価値基準を置き，それと比較して負の価値付けをするもの，例えば“負の数がなくて不便なもの，知っても意味のないもの”などと見ることであるとする。

第一の議論は「原典を読み追体験することにより，生徒ひとりひとりが数学を文化として捉えられ数学観が変容するか」である。事前アンケートでは生徒は数学者をほとんど誰も知らない，数学は発展していかないなどと捉えている結果が出た。数学は人間とのかかわり，社会や思想の影響の下に生み出された文化であり，日々発展していくものという視点は持っていなかった。しかし事後アンケートから約半数の生徒は数学観の変容が見られ，歴史を肯定的に捉え，数学を文化として捉える視点をわずかでも持つことができるようになったことがわかった。生徒の関心は数学の概念の形成過程に，数学者の発想に，過去の数学そのものの存在価値など様々なところに向けられた。今まで知らなかった数学の側面に生徒は驚きの表情を見せ，感嘆の言葉を漏らした。これは原典（一次文献）を用い，授業中数学と人とのかかわり，社会とのかかわりを重視した結果であると考える。なぜなら原典には他者の主観は存在せず，数学者の発想しか残されていない。それゆえ生徒の主観が自由に入る余地があるのである。しかし生徒の見方には偏りがあり，この自由さによって生徒は歴史を否定的にも捉えることができてし

まう。塚原は数学史活用の留意点のひとつに,「指導者は生徒の考え方を現代的規範の枠組みの中でのみ評価しないこと」と挙げているが，これは大前提であると筆者は考える。数学史を用いて数学を文化として捉えさせるとき,大切なのは生徒が歴史を現代的規範の枠組みの中でのみ評価しないよう指導者が導くことではないだろうか。これは筆者が授業中最も留意したことである。それによって原典からは数学だけでなく，当時人々に受け入れられていた考え方をも理解し受容することができる。今回の授業では,方程式の解として認められたのば“目に見える量”といえる。これは未知数を線分の長さで表し，すべてを幾何学に変換したギリシア数学の考え方を受け継ぐものである。本授業において文化としての捉え方は様々であるが,生徒の数学観は変容し,生徒はそれぞれの感想を持って受け止め歴史を肯定的に解釈できた。以上の理由から第一の議論は,指導者の歴史に対する肯定的な態度,生徒の偏りある見方への配慮・支援の下で数学観を変容させられると結論する。

第二の議論は「生徒ひとりひとりが数学を文化として解釈することを通して数学を学ぶ意義を見出せるか」である。これも生徒の事後の感想から可能であると結論する。現在の数学からすれば“負の数は解として認められない，実体のあるものしか信じない”というのは一見狭い見方であると思うかもしれない。しかし多くはないが,その時代の社会的価値観の制約を受けた数学者の発想・行為が意義あるものと感じ取れた生徒も見られた。そこには数学を学ぶ意欲への結びつきがあった。現在からすれば狭い見方と思われるものも,その時代の文化の中では認められうる。また数学者はその時代の制約を受けながらも，その制約に抗って数学を動かしたのである。このような学問をする上での自由，制約のなさ，また学問をすることの価値を生徒は感じ取ることができたのではないだろうか。これが学問をすることの意欲を刺激したと考える。

5、おわりに

本授業で以下のことがわかった。

第一に,数学史を扱う際生徒が歴史を現代的規範の枠組みの

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(8)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.185-194、2001年3月

中でのみ評価しないよう指導者が導くことにより，原典は文化としての数学の示唆を与え生徒の数学観を変容させること。
第二に，数学観が変容し数学を文化として捉える視点を持つことができた生徒は，数学を学ぶ意義を見いだせうること。

謝辞

研究授業に際して，私立茗渓学園中学高等学校の島一史先生，永田眞裕先生をはじめ，数学科の先生方に実践についてご指導いただきました。お礼申し上げます。

註１

本研究は科学研究費，基盤研究Ｂ（２）展開研究（課題番号 10558032，研究代表者　磯田正美）の一貫として行われた。

註２

授業の詳細，並びに資料等は次に掲示している。
http://130.158.186.11/mathedu/forall/project/2000/index

引用・参考文献

【１】D.J.Struik(1969) ‘A source book in mathematics,1200-1800’ Cambrige,Mass:Harvard University Press pp62-70
【２】伊東俊太郎（1987）　数学の歴史　現代数学はどのようにつくられたか　中世の数学　共立出版 pp322-375
【３】スチュアート・ポリングテール（2000）　数学を築いた天才たち（上）　講談社 pp177-189
【４】塚原久美子(1999)　高校数学において数学史をどのように捉え位置付け、取り入れるかについての提言　第 32 回数学教育論文発表会論文集　日本数学教育学会
【５】モリス・クライン(1966) 中山茂訳　数学文化史　蒼樹社 pp3-5
【６】文部省　高等学校学習指導要領解説数学編理科編　平成 11 年 12 月 pp31-33