道具からの数学化による文化的営みとしての数学授業
―日時計を用いた円錐曲線の教材開発―

筑波大学大学院修士課程教育研究科
高見　香織

章構成

要約

本研究では、古代ギリシア時代の「日時計」についての探究から、円錐曲線についての考え方が生み出されたという仮定の下、生徒が数学を文化的営みとして捉えるように変容することを目的とした。アポロニウスの円錐曲線の数学化の活動を追体験する授業を行うことにより、生徒は数学が人間の文化的営みであると捉えるようになった。また、円錐曲線についてどのような性質があるのか理解を深めることができ、数学史を取り入れた円錐曲線の授業が有効であることを示した。

キーワード：数学化、文化的営み、数学史、解釈学、追体験

１．はじめに

数学 C では、「いろいろな曲線」の中で円錐曲線の３種類を取り上げている。その扱い方は、平面上において、「2 定点 F,F’からの距離の和が一定である点の軌跡を楕円という」などの定義に基づき、その曲線上の点を記号で表し、曲線を表す一般式を導くというものである（文部省,1997）。そして、３種類の曲線を扱った後、円錐を母線に対し鋭角・平行・鈍角に切断することにより３種類の曲線が得られることから「円錐曲線という」と説明している。このような学習に対して、Freudenthal（1968）が指摘するように、「どのような数学を」ではなくて「どのように数学を教えなければならないか」という立場にたって教材開発する必要があると考える。彼が指摘するように、数学を学習するということは、「閉じた体系としての数学ではなく、むしろ活動としての数学、すなわち、実在を数学化する過程や、できることならば、数学を数学化する過程」を重視した活動を行うことである。数学は人の営みによって生み出され、発展してきた。したがって、数学化する過程を学習する際には、「数学と人間のかかわりを、その人間への共感を通じて主観的にその生き様と認め、そこでの教訓を共有していくパースペクティブを数学教育学に提供する」（礒田,2002,p.9）解釈学を用いることが重要である。このような解釈学的視野に基づいて数学史を取り入れた生徒の数学観の変容に関する研究においては、成果が上げられている（礒田・土田,2001,pp.497 - 498）。

円錐曲線について学習する際には、数学史を取り入れた授業、例えば原典としてアポロ

ニウスの「円錐曲線論」を使用し、アポロニウスの数学化の活動を追体験する授業が有効である。高校生は放物線や双曲線を関数のグラフとして学習してきている。そのため、これらの曲線は３次元空間の円錐を切断した平面に現れる切り口として考え出されたという異文化体験を通じて、曲線の性質についての理解を深めることもできる。

先行研究には、曲線の歴史的変遷の１つとしてアポロニウスの円錐曲線論を扱ったものに、後藤（1997)、薬師寺（1998）がある。アポロニウスの円錐曲線論を扱い、カブリを用いた幾何的作図の教材開発を行ったものには中嶋（2002）がある。しかし、なぜ円錐曲線を考え出しのかという当時の人々が探究した原点に立ち返っての教材は開発されていない。筆者は O.ノイゲバウハー(1990,p.169）と同様に、古代ギリシア人たちが日時計について探究する過程で、円錐を切断し、円錐曲線を得たのだと考える。そこで、「真正の歴史資料である一次文献、そしてその時代の道具（言語表現、用具など)」（礒田,2001,ｐ.98）の解釈と他者の立場に立って共感的に考えることを重視し、古代ギリシア時代に存在した日時計を解釈することを通して、円錐曲線を見いだすことに焦点を当てた。

以上のことから、当時の生活上使用されていた日時計をもとに円錐曲線について学習する授業は、数学化の過程を追体験でき、理解も深められ有効であると考え、実践した。

２．研究目的・研究方法

(1)．研究目的

円錐曲線に関する数学史を取り入れた授業を通して、数学を文化的な営みとして捉えることにより、数学観を変容することができるか、また円錐曲線の性質について理解を深めることができるかを考察する。

上記の目的を達成するため、以下の課題を設定する。

課題１：日時計を題材とし、数学史を用いて曲線を導くアプローチの現在との違いを知ることにより、数学が人の文化的営みであり、数学化による活動であると数学に対する生徒の見方を変えることができるか。

課題２：円錐曲線について数学史的なアプローチをし、現在生徒が考えているグラフとしての曲線とは異なった作図方法を体験することで、曲線の性質について理解を深めることができるか。

(2).研究方法

日時計を題材とした円錐曲線に関するテキストを開発し、それを用いて授業実践を行う。そして、授業前後のアンケート、各授業時間後の生徒の感想、ビデオによる授業記録に基づき考察する。

３．円錐曲線の教材化

教材開発においては、「テキストの歴史的な内容に没頭することができる適当な疑問点を見つける」（Jahnke,2000,p.315）ことが重要である。そこで円錐曲線を学習するにあたって、いつ、どのように円錐曲線の概念が生まれたのかがわかるよう数学史を取り入れた教材を開発することにした。そのため原典として、もっとも一般化された

アポロニウスの円錐曲線論を用いることにした。このアポロニウスの円錐曲線論の命題にかかれている曲線の性質を理解するためには、比例中項の関係についても理解しておく必要がある。比例中項の関係とは、「BE：Eθ＝Eθ：EZ」の関係であり、この関係が成り立つとき、「Eθを BE と EZ の比例中項」という。古代ギリシアの数学では作図をもとに議論していたため、この関係の証明も作図によって議論していたのである。当時の数学を理解するために、ユークリッド原論を原典として使用し、現在よく行われる相似を用いた証明と比較し、その違いがわかるよう比例中項の関係を扱うことにした。この古代ギリシア人の数学を追体験することから、数学における考え方は発展してきていると理解できると考えた。

課題１を達成するために、礒田（2002,序章）の視点に基づき、解釈学的な営みによって、他者の立場になって数学化の活動を理解することを重視する。円錐曲線の学習においては、なぜ古代人らは円錐を切断し、円錐曲線を得るに至ったのだろうかということを疑問とし、当時の人々の視点をもち、数学化の活動を追体験できるよう教材を工夫する必要がある。ここでの数学化とは、「ある理論を構成する際に利用される数学的方法（認識方法）を対象化して新しい理論を構成すること」（礒田,1984)、つまり、それまでの数学的な考え方や理論をもとに、新たな「円錐曲線」という数学的な理論を構成する活動である。なぜ円錐を切断したのだろうかということについては、古代ギリシア人の道具や原典を解釈することから始めることにした。当時使用されていた日時計の目盛として描かれている曲線は、日周運動によってできる日時計の針（グノモン）の影の先の軌跡である。ではなぜ、影の軌跡が曲線になるのだろうか。地球は自転しているため、地球から見ると太陽は円運動していると見なせる。これからグノモンの先を通る太陽光線は、太陽が日周運動することによって円錐を形作ることがわかる。したがって、日時計の影の軌跡の曲線は、円錐の切断面の切り口であり、円錐曲線になるのである。アポロニウスの「円錐曲線論」の円錐の定義を見ると、日時計において円錐が形作られることと同様の方法で円錐を定義していることがわかる。つまり、原典と日時計という道具を解釈することによって、古代ギリシア人がなぜ、円錐を切断することによって円錐曲線を得たのかということに対して、日時計に対する探究の過程からであったのではないかと仮定できる。このように当時の道具や原典を解釈する活動を用いることにより、数学を人の文化的営みであると捉えることができると考え、日時計を教材化した。

導入では、遺跡「風の塔」の壁面にある実際の日時計（礒田，2003）をもとに考えることにした。遺跡を見ていくことにより、どのようにして古代ギリシア人たちは日時計に曲線を描くことができたのだろうという疑問をもち、意欲的に相手の立場になって考えようとする動機付けができると考えた。

円錐曲線の性質について理解を深めるために、アポロニウスの円錐曲線論における３種類の円錐曲線の命題をもとに、作図ツールを用いて作図し、グラフとして得る曲線とは異なる方法を知る（異文化体験)。さらに、３次元空間上の円錐を切断することによって切断面に曲線ができること、切断の角度を円錐の母線に対して鈍角・平

行・鋭角と変えることによって、双曲線・放物線・楕円の３種類の曲線が現れることを視覚的に捉えられるよう、作図ツールを用いたファイルを作成した。

４．円錐曲線の授業概要

(1).授業環境

① 対象：埼玉県公立高校 2 学年（2 クラス　80 名）

② 日時：平成 14 年 10 月 28 日，29 日，30 日（65 分×３時間）

③ 準備：コンピュータ（Windows），作図ツール（Cabri GeometryⅡ），Microsoft Power Point，プロジェクター，実物投影機，事前・事後アンケート，授業資料，授業後課題

(2).授業展開

１時間目：ギリシア人の立場になって日時計について探究し、アポロニウスの円錐・円錐曲線の数学化の活動を追体験する。

写真①　「風の塔」の壁面が日時計であることを確認する。

導入では、古代ギリシア人たちの数学を追体験するために当時の生活背景を知ることから始めた。ここでは、現在のギリシアの風景や遺跡の写真を見せ、生活の様子を説明した。

「風の塔」の壁面の写真をもとに、針が出ていること、直線や曲線が彫られていることをマジックでなぞり、注目させ、どのような目的で使用されていたのか想像した（写真①）。

「風の塔」の壁面が日時計であることを確認し、その直線や曲線が何を表すものなのか問いかけをした。生徒は直線が時刻を表し、曲線が日周運動によるグノモン（太陽の光を投ずる物体，針）の影の先の軌跡であることに気付いた。上下の曲線について夏至と冬至の様子であることはすぐにわかるが、それぞれどちらの場合か意見が分かれた。地面において高度が低い冬の方が、影が長くなるという視点を壁面においても用いる生徒が多かったため、壁面における影のでき方について確認した。

日時計が古代ギリシアの人々の生活において使用されていたことを確認するため、その歴史について文献（資料①）をもとに確認した。また日時計について、どのような道具なのか簡単に確認した。

> 祭司たちの語るところでは、この王（ラムセス２世）はエジプト人のひとりひとりに同面積の方形の土地を与えて、国土を分配し、これによって毎年年貢を納める義務を課し、国の財源を確保したという。河の出水によって所有地の一部を失う者があった場合は、当人が王の許に出頭して、そのことを方向することになっていた。すると王は検証のために人を遣わして、土地の減量分を測量させ、爾後は始め査定された納税率で（残余の土地について）年貢を納めさせるようにしたのである。私の思うには、幾何学はこのような動機で発明され、後にギリシアへ招来されたものであろう。現にギリシア人は日時計（ポロス）、指時針（クノーモーン）、また一日の十二分方をバビロン人から学んでいるのである。

資料①　岩波文庫「ヘロドトス　歴史（上）」訳：松平千秋　より

そして「ギリシア人はどのようにその曲線を描いたのだろうか。」という発問をし、当時のギリシア人の立場になって考え、日時計が探究の対象になったに違いないことを共通の理解とした。

写真②　グノモンの先の影の軌跡を考える生徒１

次に、日周運動による太陽光線の動きを確認できるよう立体的な図と真上から見た平面的な図を授業資料に載せ、自由にかき込み、影の軌跡を考えた（写真②③）。ここでは生徒のかいたものを実物投影機で移し、マジックで太陽光線をかくなど補足説明をし、いくつかの考え方を示した。

ここで、影の軌跡は漠然と曲線となるとし、「なぜ曲線が現れるのか、この曲線はいったいどのようなものなのであろうか」ということを問いかけ、曲線の性質や特徴、作図の方法について数学史をもとに考えていく必要性を感じられるようにした。

写真③　グノモンの先の影の軌を考える生徒２

アポロニウスの追体験としては、まず、太陽光線が１日中見えるとし、日周運動によってできる太陽光線の軌跡はどのような空間図形を描くか予想した。

【対話 1】

教師：太陽光線がグノモンの先を定点として、太陽が円運動することによって動くとどのような空間図形を描くかな？

生徒：球。

教師：球になる？太陽光線、つまり直線が１点を固定して、円を描くように動かすと・・・。

生徒：円錐だ。

教師：そうだね。直線が１点を固定して、このように円を描くと円錐になるんだね。

3.『光　学』

この書名の「オプティカ」(’οπτικά) という言葉は「オプシス」(ὄψις) に由来しており，「オプシス」とは目から直線的に投射されて対象に当たり視覚を生じる“視線”のことであるから，これは対象から目に入射してくる光線の学としての「光学」ではなく，むしろ正確にはこのような「オプシス」を論ずるものとして「視論」とでも訳すべきものかもしれない。これがユークリッドの真作であることは，伝えられた手写本の内容のくずれなどから長い間疑われてきたが，ハイベルクがフィレンツェでより古い整った形のマニュスクリプトを見いだして以来，真作であることが認められるようになった。これは七つの定義(内容的にはむしろ公準)と60の命題からなるが，今その定義と命題 II をを訳出して例示しておこう。

定　義

次のことがらが仮定されよ。

1. 眼から発出する直線は，ある大きさの量の上にひろがって進行する。
2. 視線によって包まれる図形は円錐であり，その頂点は眼にあり，その底は見られるものの限界である。
3. 視線がそこにおちるものは見られ，視線がそこにおちないものは見られない。
4. より大きな視角で見られたものはより大きく見え，より小さな視角で見られたものはより小さく見え，等しい視角で見られたものは等しく見える。
5. より高い視線によって見られたものはより高く見え，より低い視線によって見られたものはより低く見える。
6. 同様に，より右側の視線によって見られたものはより右側に見え，より左側の視線によって見られたものはより左側に見える。
7. より多くの視角で見られたものは，より正確に(＝はっきりと)見られる。

資料②　ユークリッドの「光学」(中村幸四郎による)

円錐という空間図形が当時考えられていたことを確認できるように、ユークリッドの「光学」の定義（資料②）を読み、興味・関心が高められるようにした。

そして、地面が切断面となり、曲線が現れることを発問をもとに確認した。ここで、円錐を切断して得られる曲線のことを円錐曲線ということを説明した。

円錐曲線について考えた人物を順に挙げ、円錐曲線の理論はどのように発展してきたのか、それぞれの考え方の違いを説明した。日時計の解釈にもっとも忠実なアポロニウスの円錐の定義（資料

定義

1．<u>もし、1 本の直線がその点と同じ平面にない円周の点から描かれ、どの方向へも延長でき、また、その点が固定され、その直線が描き始めた点に戻ってくるまで円周上を動くとき、つくられた表面を**円錐面**と呼ぶ。</u>それは、互いに垂直に反対の位置にある 2 つの表面から構成される。それらのうちの各々は、それらを描く直線が無限につくられるとき、無限につくられる。固定された点を**頂点**と呼び、この点から円の中心まで描かれる直線を**軸**と呼ぶ。

2．円と頂点と円周の間の円錐面によって囲まれた図形を**円錐**と呼ぶ。そして、表面の頂点である点を“**円錐の頂点**”という。また、頂点から円の中心へ描かれたまっすぐな線を**軸**という。そして、円を**円錐の底面**という。

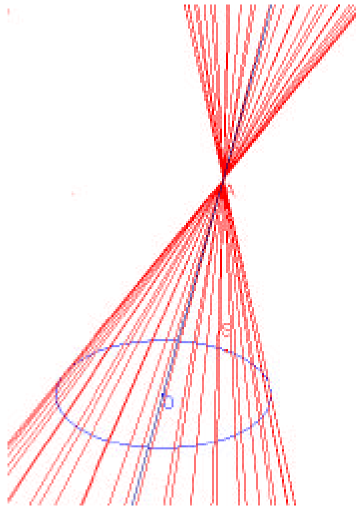
3．円錐について、<u>底辺に対して直角の軸をもつものを**直円錐**</u>、<u>底辺に対して直角でない軸をもつもの**斜円錐**</u>と呼ぶ。ひとつの平面上のどのような曲線においても、与えられた直線に平行な曲線に引いたすべての直線を二等分する、この曲線から引いた直線を**直径**という。曲線上におけるこの直線(直径)の先端を**曲線の頂点**という。　　　　　（訳・下線：高見香織）

資料③　アポロニウスの円錐曲線論　日本語訳

③）について、作図ツールを利用して作成したファイル（資料④）を用いて、視覚的にもわかるように確認した。

さらに、日時計とアポロニウスの定義の同一性を確認することによって、日時計を解釈していく上で、円錐や円錐を切断し曲線を得るという実在する現象を数学化することを追体験した。

授業後に、道具を解釈するという数学的活動について生徒はどのように感じたかを知るために、日時計について生徒が考えたこと・授業の感想を書くアンケートをとった。

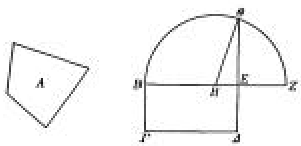


資料④　カブリを用いて作図した図

14

与えられた直線図形に等しい正方形をつくること。

与えられた直線図形を A とせよ。このとき直線図形 A に等しい正方形をつくらねばならぬ。



直線図形 A に等しい直角平行四辺形 $B\Delta$ がつくられたとせよ。そうすればもし BE が $E\Delta$ に等しければ，命じられたことはなされたことになるであろう。なぜなら正方形 $B\Delta$ が直線図形 A に等しくつくられたから。もし等しくなければ，BE，$E\Delta$ の一方が大きい。BE が大きいとし，BE が Z まで延長され，EZ が $E\Delta$ に等しくされ，BZ が H で2等分され，H を中心とし，HB，HZ の一を半径として半円 $B\Theta Z$ が描かれ，ΔE が Θ まで延長され，$H\Theta$ が結ばれたとせよ。

そうすれば線分 BZ は H において等しい部分に，E において不等な部分に分けられたから，BE，EZ にかこまれた矩形と EH 上の正方形との和は HZ 上の正方形に等しい。そして HZ は $H\Theta$ に等しい。それゆえ矩形 BE，EZ と HE 上の正方形との和は $H\Theta$ 上の正方形に等しい。ところが ΘE，EH 上の正方形の和は $H\Theta$ 上の正方形に等しい。ゆえに矩形 BE，EZ と HE 上の正方形との和は ΘE，EH 上の正方形の和に等しい。双方から HE 上の正方形がひかれたとせよ。そうすれば残りの BE，EZ にかこまれた矩形は $E\Theta$ 上の正方形に等しい。ところが EZ は $E\Delta$ に等しいから，矩形 BE，EZ は $B\Delta$ である。それゆえ平行四辺形 $B\Delta$ は ΘE 上の正方形に等しい。そして $B\Delta$ は直線図形 A に等しい。ゆえに直線図形 A も $E\Theta$ 上に描かれた正方形に等しい。

よって与えられた直線図形 A に等しい正方形，すなわち $E\Theta$ 上に描かれうる正方形がつくられた。これが作図すべきものであった*。

資料⑤　ユークリッド原論　第２巻命題 14

２時間目の円錐曲線の性質探究において、重要な考え方となる比例中項の考え方を理解するために宿題を出した。これは当時どのように数学の議論を進めていたのか異文化体験ができるようユークリッド原論第２巻命題 14 の日本語訳の証明（資料⑤）を作り上げ、この証明を自分なりに解釈することを課題とした。また、異文化体験により生徒たちはどのような考えをもつか知るために感想を書くよう指示した。

２時間目：古代ギリシア数学の中心的な考え方であった「比例中項」の関係を理解し、その関係に基づいて、作図ツールにより放物線を作図する。

まず、前時の復習をし、宿題（資料⑤）の確認から始めた。記号を用いた証明になれている生徒たちにとって、言葉で説明しながら証明している文章を読むことは難しかったことが生徒らの感想からわかった。そこで、全体で証明を読んでから内容を確認していくことにした。原典に用いられているギリシア文字の読み方を教え、アルファベットに置き換えるのではなく忠実にギリシア人らが用いていた文字のまま読むことにより、古代ギリシア人の行った数学を追体験しているという意識をもてるようにした。

資料⑤の証明はどのような関係を示そうとしているのか質問した。また現在の数学との違いを明確にするため、一部を空欄にし、現在の数学の証明のように記号を用いた証明を完成させる問題に取り組んだ。さらに、現在の証明との違いを挙げ、比較することにより、当時の証明の特徴に気付けるようにした。

【対話２】

教師：この証明では何が等しいといっているのかな？

生徒：面積。

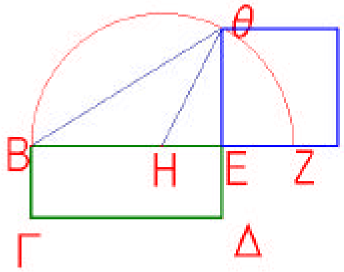
教師：そう面積のことなんだね。面積を求めなさいって言われたらどうする？

生徒：縦かける横。

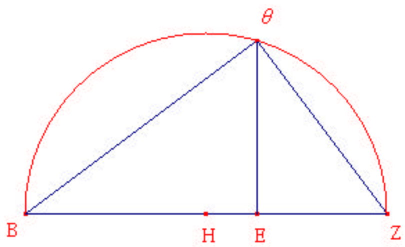
教師：そうだね。面積は縦と横の長さの積だね。でもこの証明では？

生徒：矩形とか。

教師：そうだね。当時は面積は図形そのままだったんだね。



資料⑥　長方形ＢΓΔＥとＥθを１辺とする正方形の面積は等しい



資料⑦　比例中項の関係

$E\theta^2 = BE \cdot EZ$

写真④　作図ツールを用いて作図

先の命題が主張する長方形と正方形の面積が等しい（資料⑥）ことの理解を深めるために、相似の関係を使った証明を現代数学の記号を用いた方法で確認した。

ここで、図の相似関係からわかる「BE：Ｅθ＝Ｅθ：EZ の関係が成り立つとき、Ｅθを BE と EZ の比例中項という」ことを示した（資料⑦）。

このように古代ギリシアの数学と現代の数学との違いを比較検討することによって、現代の証明方法とは異なり、当時ギリシア人たちの数学の議論は、定木（目盛のない定規）とコンパスのみによって行われる作図に基づいていたことを認識できるようにした。そして、作図における制約を等しくできる作図ツールを用いて比例中項の関係を実際に作図することにより、追体験した（写真④）。

作図ツールについては全員操作したことがないため、作図手順を １ 時間目の宿題であったユークリッド原論の命題をもとに確認し、1つ1つの手順について操作方法を演示しながら、一斉に行った。

アポロニウスの命題 11 から円錐曲線の性質を導き出す追体験では、まずギリシア語で書かれたアポロニウスの円錐曲線論の原典とその英語訳を示した。当時文献はギリシア語で書かれ、後に英語に訳され、さらに日本語に訳されることにより現在の日本の数学において用いられていることが感じられるようにした。したがって日本語訳は原典に忠実に訳したもの授業資料に載せた（資料⑧)。

ια΄

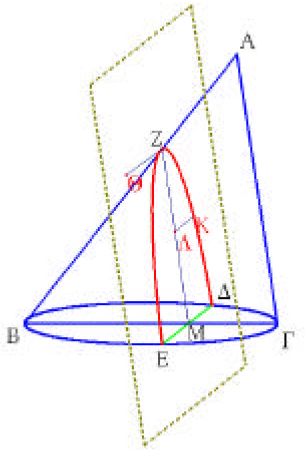
Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἔτι δὲ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς παράλληλος ᾖ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς τοῦ κώνου παράλληλος ἀχθῇ τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου μέχρι τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς καὶ ἄλλης τινὸς εὐθείας, ἣ λόγον ἔχει πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς τοῦ κώνου γωνίας καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν· καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ παραβολή.

Prop. 11

Let a cone be cut by a plane through the axis, and let it be also cut by another plane cutting the base of the cone in a straight line perpendicular to the base of the axial triangle, and further let the diameter of the section be parallel to one side of the axial triangle; then if any straight line be drawn from the section of the cone parallel to the common section of the cutting plane and the base of the cone as far as the diameter of the section, its square will be equal to the rectangle bounded by the intercept made by it on the diameter in the direction of the vertex of the section and a certain other straight line; this straight line will bear the same ratio to the intercept between the angle of the cone and the vertex of the segment as the square on the base of the axial triangle bears to the rectangle bounded by the remaining two sides of the triangle; and let such a section be called a parabola.

ギリシア語　　　　英語

資料⑧　アポロニウスの円錐曲線論　命題 11　　【引用文献：Greek Mathematics Work　I　IVOR THOMAS 著】



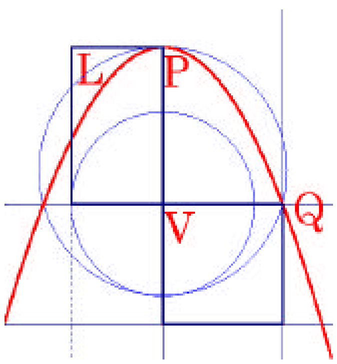
資料⑨　命題 11 における円錐の切断

忠実な定義は内容が理解しにくく、また円錐という空間図形の中における議論であるため、生徒がイメージすることは困難である。そこで、手順を 1 つ 1 つ追いながらどのように円錐を考えていくのか立体的に、視覚的に捉えられるよう作図ツールを用いて演示した（資料⑨)。

アポロニウスの円錐曲線論の命題 11 から「QV^2=PL•PV」の関係が導かれる。この関係が先に示した比例中項であることを生徒に気付かせ、同様に作図できることを確認した。

ここでは、アポロニウスが円錐を一方の母線に平行に対し切断した場合を考え、「QV^2=PL•PV」の関係を導いた。

比例中項の関係の作図と同様に「QV^2=PL•PV」の関係を作図する。さらに、切り口の曲線は点 V が線分 PM 上を移動するときの点 Q の軌跡であることを確認し、作図ツールのトレース機能を用いて、曲線が描け、切断面が曲線になっていることを確認する（資料⑩)。作図結果より、この曲線が放物線であることに多くの生徒が気付いた。しかし、当時アポロニウスはこの曲線を「QV^2=PL•PV」の関係、つまり QV を一辺とする正方形と PL, PV によって作られる長方形の面積が等しい関係から、この曲線の名前を parabola[意味：あてはまる]と名づけたことを説明し、その性質から名称がつけられたことに注意した。



資料⑩　トレース機能による parabola（放物線）の作図

このようにアポロニウスによる円錐曲線についての探究を追体験することによって、３次元の空間に存在する円錐を切断してできる切り口を、３種類の円錐曲線として正確に平面上に表すことが可能となったという数学化の活動を理解できるようにした。

授業後、作図ツールを用いて実際に作図することにより、平面に円錐曲線を作図することができることを実感し、曲線について探究しようとする態度を育成することができるか考察するため、作図ツールを操作した感想を書くようにした。

３時間目：双曲線・楕円をアポロニウスの命題で示された性質に基づいて作図し、３つの曲線が平面上にかけることを確認し、日時計との関係を再確認する。

前時までの復習をし、作図ツールのトレース機能によって parabola が作図できることを確認した。

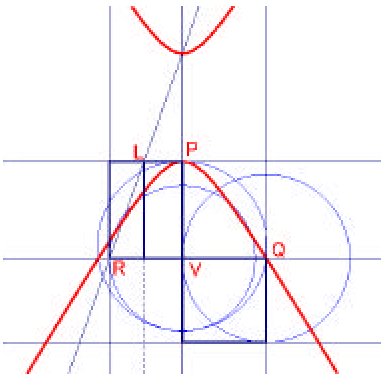
円錐の側面図に切断面を入れ、その切断面を動かすと、その円錐を切断した時の切り口がわかるような作図ツールを基にして作ったファイルを用意した。これを生徒一人ひとりが操作し、切断の仕方と曲線の違いについて観察した。これにより、生徒たちは切断の角度を円錐の母線に鈍角・平行・鋭角と変えることによって、双曲線・放物線・楕円の３種類の曲線が現れることを直感的に捉えることができた（写真⑤）。

写真⑤　カブリファイルを操作する

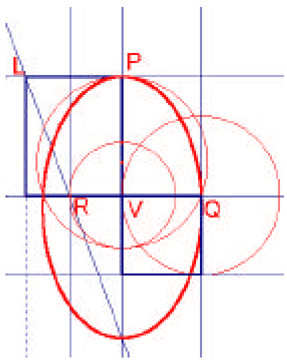
２時間目と同様に、アポロニウスの円錐曲線論命題 12、命題 13 にしたがって、性質「$QV^2=PV\cdot VR$」を確認しそれぞれ作図ツールを用いて作図した。

立体的な図と「$QV^2=PL\cdot PV$」との関係から、命題 12 では、parabola の作図において考えた PL･PV の長方形よりも長方形LR の面積だけ超過したPV･VR の面積に等しい正方形の一辺となる点Q を作図すればよいことを確認した。

前時と同様に作図に関して作図ツールを使うことにまだ生徒たちはなれないので、サポートをつけたり、共通の疑問などに関しては、演示して説明したりするなど考慮した。そして、比例中項の関係とトレース機能によって双曲線を作図した（資料⑪）。双曲線も放物線同様面積の関係において、超過することから hyperbola[意味：超過する]と名づけられたことを確認した。楕円についても同様に扱い、作図し（資料⑫）、面積が不足するという関係から ellipse[意味：不足する]と名づけられたことを確認した。



資料⑪　hyperbola（双曲線）の作図



資料⑫　ellipse（楕円）の作図

写真⑥　３つの円錐曲線が１つの円錐の切断面によってできることを確認する

３つの円錐曲線における面積の関係が視覚的にわかるよう授業資料に図を入れた。また、３つの曲線が１つの円錐を切断した切り口であることを視覚的に捉えるため、作図ツールのトレース機能により、切断面が変化していったときの切り口の様子がわかるようファイルを作成し、演示した（写真⑥）。直線 LR の傾きを変化させることで、切断する角度が変化することと見なせ、切り口に現れる３つの円錐曲線が描かれるものである。

円錐曲線は、円錐の一方の母線に対する切断の角度によって３つに分類できることを確認し、アポロニウスの数学化の過程を追体験した。

さらに、本授業の目標である道具を解釈するという視点に戻り、このように実在する曲線について性質を探究し、関係を導き、数学を生み出すという数学化の活動によって、古代ギリシア人たちは、日時計の目盛の曲線を描くことが可能になったということを確認した。

日時計を解釈することより円錐曲線という概念が生まれたこと、つまり数学化の営みを理解することができたかどうか考察するため、日時計と円錐曲線の関係についてどう考えるか意見を書くようにした。

３時間の授業後、３日間の授業を通して研究課題に対し、生徒たちはどう変容したか考察するため事後アンケートをとった。

５．議論

(1).課題１に対する議論

課題１：日時計を題材とし、数学史を用いて曲線を導くアプローチの現在との違いを知ることにより、数学が人の文化的営みであり、数学化による活動であると数学に対する生徒の見方を変えることができるか。

アポロニウスの円錐曲線論を用いた先行研究、後藤（1997)、薬師寺（1998)、中嶋（2002）では、なぜ円錐を切断したのかという古代ギリシア人が探究した原点に立ち返る機会はなく、円錐曲線論が文化的営みであると捉えることは難しかったのではないだろうか。そこで本研究では、日常生活上使われていた日時計についてその影の軌跡がなぜ円錐曲線になるのか探究し、この日時計についての研究によって円錐曲線が考え出される過程となったことを理解できるよう授業を行った。この授業により数学は人の文化的営みであると実感することができるか議論する。

授業後の感想「何気ない日常的な道具にも数学が隠されているのだということを知った。」などから、日時計を題材として授業を行うことにより、生徒は古代ギリシアで生活上使われていた道具の中にも数学を見いだすことができたといえる。またその驚きから「昔の人はどうやって日時計を開発したのだろう。」などの感想が見られ、生徒は当時の人々の活動について興味・関心を高めている。

数学が人の営みによって発展してきたことを味わう活動として、１時間目の宿題・２時間目の『ユークリッド原論』の比例中項に関する命題の原典解釈を行った。原典

解釈は当時のギリシア人の立場になって考え、当時行われていた数学と現在の数学とを比較しながら行った。この活動では、生徒の感想から当時の証明が文章で書かれており、現在の記号を用いた証明とは異なることがとても印象的だったことがわかる。これらの「古代のギリシア人たちが考えてきたことは発展し、現在では記号を用いた表現などより理解しやすくなっている」という感想から、生徒たちは数学を発展してきたものとして捉えたといえる。発展してないと答えた生徒については、その理由を見ると、「その当時の考え方が現在にも生かされているから変わっていない」と考えていることがわかった。したがって、発展してきたことによって、現在に用いられていると考えられることを促す必要があった。

以上のことから、「数学は日常生活に役立たない」という事前・事後アンケートにおいて、反対する意見をもつ生徒が授業後増加するという結果が得られたといえる。したがって、日時計を題材とし、数学史を用いることにより数学が人の文化的営みであり、数学に対する見方を変えることができるといえる。

・数学は日常生活に役立たない。(事前・事後アンケートより)

調査人数/意見	大賛成	賛成	どちらとも	反対	大反対
事前（78）	７（9.0%）	20（25.6%）	27（34.6%）	20（25.6%）	４（5.1%）
事後（74）	2（2.7%）	14（19.0%）	26（35.1%）	28（37.8%）	４（5.4%）

アンケート結果について母平均の差の検定を行った。事前・事後の２つの母集団 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ において、帰無仮説は $H_0: \mu_1 = \mu_2$ であり、対立仮説は $H: \mu_1 < \mu_2$ である。

H_0 のもとでは 2 標本ｔ統計量は、自由度（78＋74－２）のｔ分布 $t(150)$ に従う。$t < -t_\alpha(150)$ のとき帰無仮説を棄却し、それ以外は棄却しない（左辺側）。

$t = -2.56205$ であり、

ｔ分布表より　$t_{0.025}(240) = 1.970 < t_{0.025}(150) < t_{0.025}(120) = 1.980$

$t_{0.010}(240) = 2.342 < t_{0.010}(150) < t_{0.010}(120) = 2.358$

であることから、帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ は棄却される。

よって、生徒の「数学は日常生活に役立たない」に対する意見について、授業前と授業後ではより多くの生徒が反対するようになったといえる。つまり数学に対する日常生活に役立たないという意識を変容したとことがわかる。

・数学の考え方は発展してきたと思いますか？（事後アンケートより）

調査人数/意見	思う	思わない
74	61（82.4%）	13（17.6%）

この他に、事前・事後アンケートでは、「数学は日常の問題を解決するために必要である。」「日常の問題を解決するために新たな数学を発見できる。」について意見を聞いた。これらについては事前アンケートの段階で、生徒たちは賛成の意見が多く、事後アンケートとの差はあまり見られなかった。しかし、授業後の感想から、授業前ではきっとそうであろう・そうあるはずだという意見であったのが、授業を受け実際に経験したことにより、よりはっきりとした賛成の意見へと変わったといえる。

(2).課題２に対する議論

課題２：円錐曲線について数学史的なアプローチをし、現在生徒が考えているグラフとしての曲線とは異なった作図方法を体験することで、曲線の性質について理解を深めることができるか。

円錐曲線をこれまで生徒が考えてきた座標をもとに点を取って描く曲線としてではなく、円錐を切断した切り口として捉えられるよう原典を解釈すること、つまり異文化体験を取り入れた授業を行った。中嶋 (2002) はアポロニウスの円錐曲線論を扱い、カブリを用いて作図を考えることにより、図形の性質の理解をより深めることができることを示している。そこで本研究では、さらに空間と平面の関係をイメージしやすいよう円錐の切断の様子と切断面を、作図ツールを用いて、立面図・側面図と立体的に見える図を組み合わせた動的ファイルを作成し、生徒が操作することにより理解が深まるようにした。

授業後の「３種類の円錐曲線をコンピュータを使って視覚的に学べて、とても楽しかった。」などの生徒の感想からもわかるように、円錐曲線の性質の説明だけでは理解しにくいが、空間を視覚的に捉えることができるため、曲線の外形を捉えやすく理解が深まったといえる。他にも「実際に作図することによって、視覚的に捉えられるためわかりやすかった。」「切断する角度が変わるだけであんなに切断面の図形が変わるとは驚きだった。」という感想が多くあった。比例中項の関係を作図し、トレース機能を用いることにより円錐曲線を描くことができるため、生徒は今まで座標で考えていた曲線が他の性質をもとに描けるということに驚いていた。作図ツールを基にしたファイルの活用や実際に生徒が今まで考えていたグラフとしての曲線とは異なる方法で作図することは、視覚的に図の関係を捉えたり、その性質に関する理解を深めたりすることに有効である。

以上のことから、円錐曲線について数学史的なアプローチをし、現在生徒が考えている曲線とは異なった作図方法を体験することで、曲線の性質や特徴について再認識することができたといえる。

６．おわりに

本研究において、円錐曲線に関する数学史的な授業実践は、追体験・異文化体験によって数学を人の文化的営みと捉え、発展してきたと認識すること、そして曲線についての理解を深めることに有効であることを示すことができた。円錐曲線の性質に関する内容は、今回のアンケート結果に、「難しかった」という感想が多くあったように容易な内容ではない。日時計という日常の道具を解釈することから、円錐曲線の概念を作り出す、つまり実在するものを数学化するという活動はとても重要な数学の学習である。数学史を取り入れ、原典解釈するなど、数学化の活動を追体験する学習は、生徒が数学とは何か改めて考えることができる好機である。したがって、数学史を取り入れた数学の教材研究はどの分野においても重要であり、今後より多くの興味深い歴史的背景を踏まえた教材開発を行っていくことが今後の課題である。

今回作図ツールを用いて授業を行った。円錐を切断するという３次元の空間から２次元の平面との対応について視覚的に理解を深められることに対して、作図ツールを用いたファイルを演じすることはとても効果的であった。しかし、作図することに慣れていないために操作に没頭する生徒や操作することに夢中になってしまう生徒がおり、授業の目的が薄れてしまった生徒も見受けられた。テクノロジーを使用する際には、操作自体に生徒が集中しないよう、なぜここでコンピュータを扱うのかという問題意識をしっかりともたせておくことが重要である。特に今回の実施高校のように人数の多い場合は、進行に時間がかかることに注意し、適宜活用する必要がある。生徒の実態との兼ね合いも考慮したテクノロジーの活用が重要である。

謝辞）研究授業の実施に際して、埼玉県立春日部高等学校の早乙女勤先生、坂本昭雄先生、江森弘明先生、熊谷公孝先生、中島幹夫先生、数学科の先生方には多大なるご協力と共に、貴重なご意見・ご指導をいただきました。厚く御礼申し上げます。

注）　本研究は平成 14 年度科学研究費「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」（基盤研究 B、研究代表者　礒田正美　No.14380055）の一環として行われた。

引用・参考文献

１）文部省(1997)．*高等学校数学 C*，啓林館

２）H.Freudenthal(1968)．Why to teach Math. so as to be useful，*Edu.Stu.Math.* Vol.1，p.6

３）礒田正美(2002)．解釈学からみた数学的活動の展開，*筑波数学教育研究*　第 21 号，pp.2－10

４）礒田正美(2001)．異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒に関する一考察－隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて－，*筑波数学教育研究*　第 20 号，pp.39－48

５）礒田正美・土田知之（2001）．異文化体験を通じての数学の文化的視野の覚醒；数学的活動の新たなパースペクティブ，*第 25 回日本科学教育学会年会論文集*，pp.497－498

６）O.ノイゲバウハー（1990）．*古代の精密科学*，矢野道雄・斉藤潔訳，恒星社厚生閣，pp.168－169，pp.193－212

７）礒田正美（2002）．*課題学習・選択学習・総合学習の教材開発～数学する心を育てる～*，明治図書，pp.4－10

８）Hans Niels Jahnke (2000)．The use of original sources in the mathematics classroom, John Fauvel and Jan V.Maanen(eds)，*History in Mathematics Education*，Kluwer Academic Publishers，p.315

９）礒田正美（1984）．数学化の見地からの創造的な学習過程の構成に関する一考察　筑波数学教育研究　第３号．pp.60－71

上記以外に授業に際して参考にした文献

10）ヘロドトス（1978）．*歴史（上）*，松平千秋訳，岩波文庫　p.226

11）IVOR THOMAS(1939)．*Selections illustrating the history of Greek mathematics 1*，Cambridge，Mass.

12）T.L.HEATH（1896）．*APOLLONIUS OF PERGA TREATISE ON CONIC SECTION CAMBRIDGE AT THE*

UNIVERSITY PRESS, pp.1－41
13）T.L.ヒース（1998）. *復刻版　ギリシア数学史*, 平田寛・菊池・大沼訳, 共立出版, pp.129－130, pp.151－153, p.215, pp.221－222, pp.226－231, pp.281－305
14）中村幸四郎・寺坂英孝・伊藤俊太郎・池田美恵訳（1996）. *ユークリッド原論（縮刷版）*, 共立出版, p.48　pp.450－451
15）スチュアート・ホリングデール（1993）. *数学を築いた天才たち（上）*, 講談社, pp.63－106
16）ボイヤー（1984）. *数学の歴史２*, 加賀美鐵雄・浦野由有訳, 朝倉書店, pp.30－55
17）近藤洋逸（1994）. *近藤洋逸数学史著作集　第3巻　数学の誕生　近代数学史論*, 日本評論社, pp.194－201
18）高橋秀樹（2001）. 高校数学における数学史の導入に関する一考察～アポロニウスの問題の解法を通して～, 世界の教科課程改革の動向と歴史的文化志向の数学教育―代数・幾何・微積 For　All プロジェクトの新展開―　中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（8）, 筑波大学数学教育学研究室, pp.143－160
16）中嶋俊郎（2002）. 接線の幾何的作図に関する授業実践―アポロニウスの円錐曲線論を用いて―　歴史的文化志向の数学教育その実証的研究―解釈学的営みを基礎として―　中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（9）, 筑波大学数学教育学研究室, pp.96－107
17）古畑正秋監修（1977）. *星の位置と運動―新地学教育講座 11*, 東海大学出版会
18）礒田正美（2003）. *数学教育*, 明治図書（2003, 4 月号）
19）丸野悟　Web ページ
20）中嶋俊郎　Web ページ
21)東京大学教養学部統計学教室(1991). *統計学入門*, pp242－243, p.281