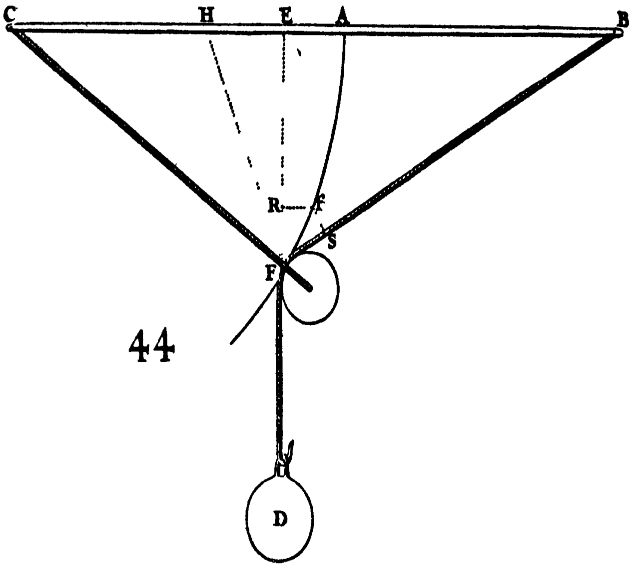
原典をたどってもう一度話の内容を思い出そう！！

【問題部分】

60. Soit une poulie *F* qui pend librement au bout d'une corde *CF* attachée en *C*, avec un plomb *D* suspendu par la corde *DFB* qui passe au dessus de la poulie *F*, & qui est attachée en *B*, en sorte que les points *C*, *B* sont situés dans la même ligne horizontale *CB* On suppose que la poulie & les cordes n'ayent aucune pesanteur, & l'on demande en quel endroit le plomb *D* ou la poulie *F* doit s'arrêter.



44

【解答部分】

Il est clair par les principes de la Mécanique que le plomb *D* descendra le plus bas qu'il luy sera possible, au dessous de l'horizontale *CB*, d'où il suit que la ligne à plomb *DFE* doit être un *plus grand*. C'est-pourquoy nommant les données *CF*, *a*, *DFB*, *b*, *CB*, *c*, & l'inconnuë *CE*, *x*, l'on aura $EF = \sqrt{aa - xx}$, $FB = \sqrt{aa + cc - 2cx}$, & $DFE = b - \sqrt{aa + cc - 2cx} + \sqrt{aa - xx}$ qui doit être un *plus grand*, & partant sa différence $\frac{cdx}{\sqrt{aa + cc - 2cx}} - \frac{xdx}{\sqrt{aa - xx}} = 0$, d'où l'on tire $2cx^3 - 2ccxx - aaxx + aacc = 0$, &

G ij

divisant par $x - c$, il vient $2cxx - aax - aac = 0$, dont l'une des racines fournit pour *CE* une valeur telle que la perpendiculaire *ED* passe par la poulie *F* & le plomb *D* lorsqu'ils sont en repos

☆皆さん考えてきましたか？☆

課題

（DFE）'＝０を解くことによって何が求まるでしょうか？そして、この状態のときにロピタルはつりあうといっているけれどもこの（DFE）'＝０の解を求めることの意味は一体何だろうか？

この原典の続きはこのような文章が続いています。

On pourroit encore résoudre cette question d'une autre maniére que voicy.

～まだこれとは別のやり方があります。～

なぜだろう

この当時微分法というものは、すべての人に認められていなかったため幾何を用いて再度確認の必要がありました。参考資料参照）

実際に原典に戻ってみると幾何学の解法が次に載っています。

さっそく原典の幾何学的方法の部分をみてみよう！！

【幾何部分　原典　一部抜粋】

Nommant *EF*, *y*, *BF*, *z*; l'on aura $b - z + y =$ à un *plus grand*,

ou bien (ce qui revient au même) que les angles *BFC*, *DFC* soient égaux

Cela posé, si l'on mene *FH*, ensorte que l'angle *FHC* soit égal à l'angle *CFB* ou *CFD*, les triangles *CBF*, *CFH* seront semblables, comme aussi les triangles réctangles *ECF*, *EFH*, puisque l'angle *CFE* est égal à l'angle *FHE*, étant l'un & l'autre le complément à deux droits, des angles égaux *FHC*, *CFD*, & par-conséquent on aura $CH = \frac{aa}{c}$, & $HE \left(x - \frac{aa}{c}\right)$. $EF(y)$ .. $EF(y)$ $EC(x)$ Donc $xx - \frac{aax}{c} = yy = aa - xx$ par la proprieté du cercle, d'où l'on tire la même égalité que ci-devant.

【日本語　要約】

EF=y　BF=zとする。b－z＋yの値は最大の長さになることが前提である。
そのとき、線分 FH を、角 FHC が角 CFB または角 CFD と等しくなるようにとる。そのときに①（△　　　　）と（△　　　　）は相似である。また、角 FHC と角 CFD は等しいのでそのときの余角である角 FHE と角 CFE も等しくなることから、

②（△　　　　）と（△　　　　）は相似になる。以上のことから

CH=（　　　　　　　）（∵①より）

③HE（　　　　　）:EF（　　　）=EF（　　　）:EC（　　　）。（∵②より）

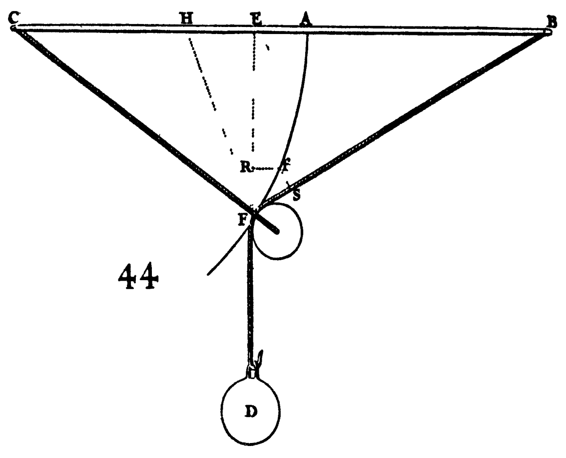
ゆえに、④（　　　　　　　　）=（　　　）=（　　　　）となる。

前ページの原典の穴埋めをしよう！！そしてそこから読み取れる内容を下の図を用いて説明してみよう！！

【ヒント】

（1）下線部①のカッコ内は x,y,a,c,の記号を用いて記入してください。

（2）下線部②は下線部分を整理した式かつその式につながるものを考えて３つのカッコを埋めてください。



微分法の結果と同じ結果が導けましたか？

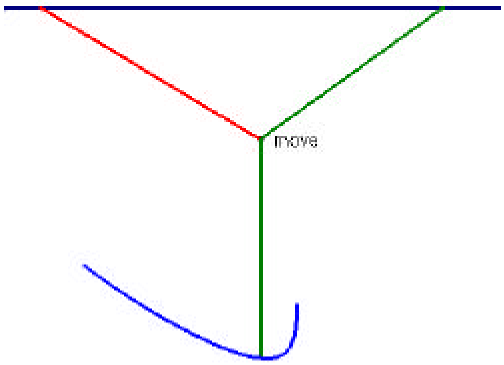
☆ もとの原典の表記はこのようになっています☆

Nommant *EF*, y, *BF*, z, l'on aura $b - z + y =$ à un *plus grand*, & partant $dy = dz$. Or il eſt clair que la poulie *F* décrit le cercle *CFA* autour du point *C* comme centre, & partant ſi du point *f* pris infiniment prés de *F*, l'on mene *fR* parallele à *CB*, & *fS* perpendiculaire ſur *BF*, l'on aura $FR = dy$, & $FS = dz$. Elles ſeront donc égales entr'elles, & par-conſéquent les petits triangles rectangles *FRf*, *FSf*, qui ont de plus l'hypotenuſe *Ff* commune, ſeront égaux & ſemblables; d'où l'on voit que l'angle *RFf* eſt égal a l'angle *SFf*, c'eſt-a-dire que le point *F* doit être tellement ſitué dans la circonférence *FA*, que les angles faits par les droites *EF*, *FB* ſur les tangentes en *F* ſoient égaux entr'eux : ou bien (ce qui revient au même) que les angles *BFC*, *DFC* ſoient égaux.

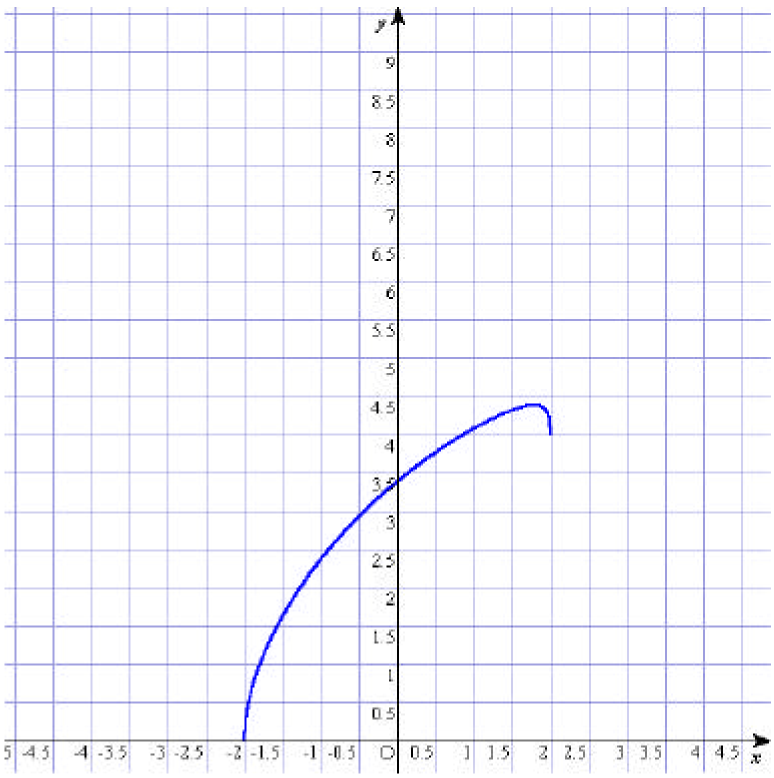
Cela poſé, ſi l'on mene *FH*, enſorte que l'angle *FHC* ſoit égal à l'angle *CFB* ou *CFD*, les triangles *CBF*, *CFH* ſeront ſemblables, comme auſſi les triangles rectangles *ECF*, *EFH*, puiſque l'angle *CFE* eſt égal à l'angle *FHE*, étant l'un & l'autre le complément à deux droits, des angles égaux *FHC*, *CFD*, & par-conſéquent on aura $CH = \frac{aa}{c}$, & HE $(x - \frac{aa}{c})$. EF (y) .. EF (y) EC (x). Donc $xx - \frac{aax}{c} = yy = aa - xx$ par la proprieté du cercle, d'où l'on tire la même égalité que ci-devant.

今度は、別の角度から結果を確認してみよう♪

☆作図ツールを用いた時のおもりＤの軌跡はこのようになります☆



☆グラフツールを用いるとこのようなことがわかります☆



今 DEF の式に $a=2,b=5,c=3$ を代入してます。（ただし $a<c, 0<x<a$）

この原典の最初の序章でロピタルはこんなことを言っています！！

この計算法（微積分法）の適用範囲は広大なものである。力学的な曲線にも幾何学的な曲線にも適用される。根号も何の困難も起こさず、しばしば便利でさえある。望むだけの数の変数にも拡張される。あらゆる種類の無限小量の比較も容易である。その上、接曲線や接線、最大最小問題、曲線の変曲点や尖点（せんてん）、反射や屈折の焦点などなどに関する驚くべき発見を無数に生み出す。そのことを本書で見ていくことにしよう。（ロピタル『無限小解析』序章より）

このことから彼の一番いいたかったことはなんだと思いますか？あなたの思うことを自由に書いてください。

☆この２日間ありがとうございました☆

♪付録のページ♪

この問題を力学で考えたらどのような解答になるのでしょうか？参考にしてみてください！

T_1をBFに働く張力とし，滑車がついているCFに働く張力をT_2とします。角q_1とq_2を図aのようにとる。糸がつり合いの状態にあるので，FDが引っ張る力は，吊り下げられたおもりのWと等しくなる。Fの滑車は自由に回転できるので，BFDの張力は，どこも一定でなければならない。これは，$T_1 = W$を意味する。

図　aは，Fに作用する力及び，T_1とT_2の垂直成分と水平成分への分解も示されている。２つの水平線分がそれぞれ　$T_1 \cos q_1$　と　$T_2 \cos q_2$　で，垂直成分が$T_1 \sin q_1$　と　$T_2 \sin q_2$　となる。力がバランスを保っているので，２つの水平成分は等しくなければならず，また２つの垂直成分を加えると重さWでなければならない。したがって

$T_1 \cos q_1 = T_2 \cos q_2$　・・・①，　$T_1 \sin q_1 + T_2 \sin q_2 = W$　・・・②

となる。②の式の両辺を$T_1 \cos q_1$　でわり，$W = T_1$　を使うと

$$\frac{T_1 \sin q_1}{T_1 \cos q_1} + \frac{T_2 \sin q_2}{T_1 \cos q_1} = \frac{T_1 \sin q_1 + T_2 \sin q_2}{T_1 \cos q_1} = \frac{W}{T_1 \cos q_1} = \frac{T_1}{T_1 \cos q_1} = \frac{1}{\cos q_1}$$

さらに　①から，$\dfrac{T_1 \sin q_1}{T_1 \cos q_1} + \dfrac{T_2 \sin q_2}{T_2 \cos q_2} = \dfrac{1}{\cos q_1}$　**となり，**$\tan q_1 + \tan q_2 = \dfrac{1}{\cos q_1}$

を得る。図　　を見て，原典において$EC = x, BE = c - x, EF = \sqrt{a^2 - x^2}$,

$BF = \sqrt{(c-x)^2 + (a^2 - x^2)}$　**であったことを思い出し**

$$\tan q_1 = \frac{EF}{BE} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{c - x}, \tan q_2 = \frac{EF}{EC} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}, \cos q_1 = \frac{BE}{BF} = \frac{c - x}{\sqrt{(c-x)^2 + (a^2 - x^2)}}$$

を代入すると　$\dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{c - x} + \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \dfrac{c - x}{\sqrt{(c-x)^2 + (a^2 - x^2)}}$

$\dfrac{x\sqrt{a^2 - x^2} + (c - x)\sqrt{a^2 - x^2}}{x(c - x)} = \dfrac{\sqrt{(c-x)^2 + (a^2 - x^2)}}{c - x}$　**であるから**

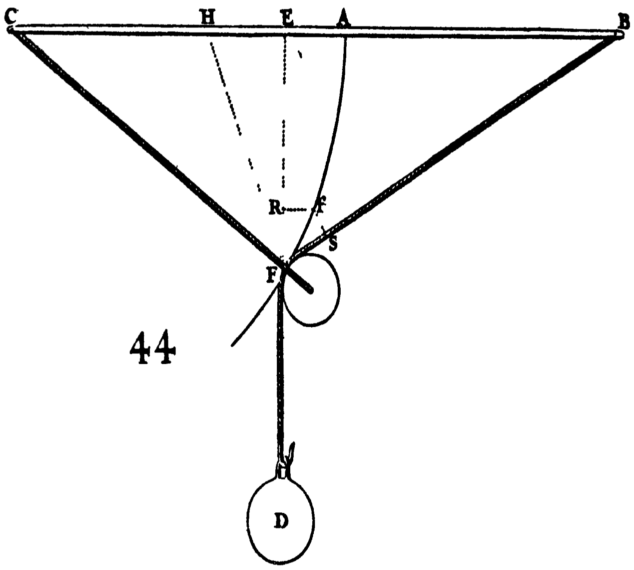
$c\sqrt{a^2 - x^2} = x\sqrt{(c-x)^2 + (a^2 - x^2)}$　　**となり，両辺を二乗して**

$c^2(a^2 - x^2) = x^2\left\{(c-x)^2 + (a^2 - x^2)\right\}$　　**これを展開整理すると**

$2cx^3 - 2c^2x^2 - a^2x^2 + c^2a^2 = 0$

$(x - c)(2cx^2 - a^2x - ca^2) = 0$　　**となり，原典と同様の結果が導かれる。**

図α



44