「積分」の導入における数学史の活用

～１７世紀における積分概念の発展過程にふれる～

筑波大学大学院修士課程教育研究科
中嶋　恭子

要約
本研究では数学史を取り入れた実践例として、礒田[1]が言うように、今日の積分法の直接的萌芽である不可分量の方法を一般化したカヴァリエリの原理、更にウォリスの方法を原典を解釈することにより、積分概念を歴史的に再認識する授業を実践した。その結果から、定積分の公式が誕生するまでの先人の試行錯誤を追体験することは「積分」するという意味を理解するために有用であると考える。

キーワード：数学史、追体験、積分、概念、公式

１．はじめに

高等学校学習指導要領解説(1999 年発行)[2]において、目標のひとつとして「基本的な概念や原理・法則の理解」が示され、特に重視された「数学的活動」では、内的活動が中心となり、「数学的活動」を通して、「論理的思考力」、「想像力及び直観力」などの創造性の基礎を培うことを目指している。高等学校の段階においては、新しい概念の導入や理論の拡張が、いつも実際的な問題から始まるわけではなく、「数学的活動」が純粋に数学的な問題から始まることもある。礒田[3]は高校での関数の学習過程では、必ずしも事象の扱いは重視されず、むしろ関数自体の代数的・解析的研究が中心になっていると指摘し、三輪[4]がいうように高等学校数学では実例を手近かに見つけることは難しく、実例の持つ背景すらも現実そのものと言うよりかなりモデル化されたもので生徒からは現実から遠いと感じられることが多い。そのため、直観的な数学的概念理解が困難な生徒が少なくないと考えられる。そこで、数学的概念理解のための「想像力及び直観力」を発現させる授業実践として、数学Ⅱにおける「積分」をとりあげる。現行の教育課程のもとで[5]「積分」は、「『微分』の逆の演算」として導かれる。また、教科書の編成から、いかにも「微分」が完成した後に「積分」が発見されたような錯覚に多くの生徒は陥る。更に多くの生徒は、なぜ積分すると(定積分)面積が求まるのかを理解できないまま、機械的に数値を代入することによって計算を行う。数学史上、「求積」は「幾何学」的感覚で「無限」という概念を秘めて

発達してきたと考えられる。その概念が理解できれば、生徒も「積分」をただの記号遊びではなく理解が深まり、更に、その「求積」の応用を考えることによって、想像力及び直観力を培う、すなわち幾何学的な推論をおこなう能力を育てることができると考えられる。

H.Freudenthal【6】は、「数学的な考えはけして今まで発見された方法で発表されてはいない」(p.250-280)と指摘する。この点について、C.Tzanakis と A.Arcavi は、【7】「数学教育に歴史を適切に統合することは数学的な概念、構造を学習者に知らせ、動機づけをし興味関心を引き出す」(p.204)、更に、【8】「数学と数学的活動のより正確な見解は歴史的に重要な質問、問題、あるいは解答によって規定されるかもしれない。生徒にとって問題に対して、誤り、発展的な議論、不安、疑い、直観的な議論・・・は必用なものである。・・・数学は内容だけでなく、その形、表記、用語、計算方法、表現のモードも進化してきており、数学史は視覚的、直観的に生徒の理解を手助けする」(p.205)と言っており、G.Guinness【9】は「歴史は、概念、法則、定理、公式、理論の起源、発展、衰退を繰り返すような考え方の現実的世界を提供するものである」と言う。更に礒田は、【10】数学史を用いて「どうしてこういうことを考えたのか？」というような子供自身が疑問符による活動を通じて数学の形成過程を追体験することが創造的な活動としての数学に対する理解、数学的な思考方法の理解を深めると指摘し、【11】「実際の歴史上の原典を開き、その原典を記した人の立場や考え方を想定し、その人に心情を重ねて解釈すると、今、自分たちの学ぶ数学が、異なる時代・文化背景に生きた人々によって、まるで異なる思考様式で研究され、表現されていたことが体験でき、自分たちが学ぶ数学も生き生きした人間の営みとして改めて認めなおせる」と言う。そこで、本研究では、「数学的活動」を通して、数学への興味・関心を一層喚起するとともに、論理的思考力、想像力及び直観力などの創造性の基礎を培うために「積分」をとりあげる。それは、数学史において「無限」という「数学的概念」が堅固たるものとして基礎づけられていく過程において数学者の苦悩を追体験することが、まさしく「幾何学的な直観的なものから面積と定積分との関係」や「いくつかの具体的な値から直観的に一般化」できるようにな力を培うこととなると考えるからである。したがって、数学史を取り入れ、一次文献、更にテクノロジーを利用し、概念の発達段階を追体験することが有効であることを確認するための授業を実践した。

2．研究目的・方法

本研究では、「数学的活動」を通して、数学への興味・関心を一層喚起するとともに、新しい概念の導入や理論の拡張を促すためには数学史の利用が有効であることを確認することを目的とする。そのために以下の課題を設定する。

課題１：数学者の「求積」に対する思考の変遷や試行錯誤を追体験することによって、生徒は新しい概念の導入への理解を深め、「数学的活動」のよさを知ることができるか？

課題２：原典を読むことで数学者の思考を追うという「数学的活動」により、

教科書に登場する「公式」に対する生徒の考え方は変わるか？
課題３：作図ツールや、グラフツールを利用して「求積」を経験することは生徒が抽象化された概念に気づくために有効であるか？

３．数学史を用いた「積分概念」導入の教材化

原典として、Struik,A Source Book in Mathematics から

５CAVALIERI　PRIENCIPLE　OF　CAVALIERI　(pp209-214)

６CAVALIERI　INTEGRATION　(pp214-219)

10ROBERVAL.THE　CYCLOID　(pp232-238)

OpereMathematics(JohnWallis) から ARITHMETICA　INFINITORUM　(pp355-478) を取り上げた。今日の定積分という一般的な概念に至るまでには多くの数学者たちによって「求積」の研究が繰り広げられてきた。例えば、取り尽くし法を用いたアルキメデス（B.C.3C）から、各瞬間の速度を考えその瞬間に動く距離を無限個寄せ集めて動いた距離を出すことを考えていたといわれるオレーム（A.D.14C）や、オレームにならって楕円や円の面積は曲線上の点を結ぶたて線全体の和と考えたケプラー（A.D.16C)、「天文対話」の中で「無限小」という概念を述べたガリレイ（A.D.16C)、その弟子であるカヴァリエリ等々があげられる。その中でも本研究では、試行錯誤の過程を追体験するという目的を達成するために、今日の積分法の直接的萌芽と言われる[1]不可分量の方法を一般化したカヴァリエリ、更にカヴァリエリの主張した「面の不可分量は線であり、立体の不可分量は平面である」という不可分量の考えの元、「ある平行線の間に２つの平面図形があるとして、その平行線の間にその平行線から等距離にひかれたどんな直線においても、その直線に含まれる部分がどんな場合にも互いに等しいならば、その２つの図形は互いに等しい」というカヴァリエリの原理をまず理解することから始めた。更にこのカヴァリエリの原理を利用してロベルヴァールによるサイクロイドの求積を体験した。サイクロイドの求積は数学Ⅲにおいて媒介変数表示を用いた定積分による解法を提示されるが、ロベルヴァールは既知の円と長方形の面積で求めたというこの考えのすばらしさに気づいた。そして今日の定積分に繋がるような一般性を生徒各自が発見した上で、カヴァリエリの不可分量の考えの矛盾（不可分量は図形を構成する無限小部分ではないので、まったく幅のない線分をいくら集めても幅のある面がつくられるだろうか？）に目を向けさる。その矛盾を払拭するためにウォリスの求積法（ $y=x^k$ とｘ軸とｘ＝１とで囲まれる面積の，対応する長方形または平行四辺形の面積との比の計算をおこなった）を体験した上で今日の定積分に繋がるような一般性を各自が発見できるような教材を開発した。「積分」の教材開発の先行研究としては、数学史を活した臼田[12]や区分求積法の考えを用いた西川[13]、西本[14]、塚原[15]、溝口[16]等数多いが、本研究においてはただ一つの数学的発見に終わらずに試行錯誤することによって数学が更に発展していくすなわち概念が直観的に形成されていく過程をも追体験することで偉大な数学者も身近な人間として捉えることができ、一つの事象に対して多面的な見方をもつことの必要性を理解でき

るところが特徴として挙げられる。

４．数学史を用いた「積分概念」導入の授業概要

４．１　授業環境

日時：平成 14 年 10 月 28，29，30 日

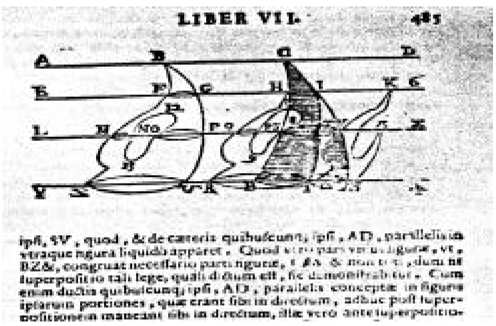
対象：県立高等学校　第２学年（２クラス 79 名）
　　　数学Ⅱ「積分」既習直後

準備：コンピュータ、Microsoft Excel、Microsoft Power Point、作図ツール（Cabri GeometryⅡ）、ビデオプロジェクター、実物投影機、事前事後アンケート、テキスト、ワークシート

４．２　授業展開

【１時間目】カヴァリエリの原理を理解する。

① アンケートを行った。具体的に、「x^n の「不定積分」や「不定積分」の定義式は、どのようにして導かれたか？「微分」と「積分」は、数学史的にはどのような関係にあるか？」というような、授業や教科書の内容をどのように理解しているのかという内容や、「ｘｙ平面において、放物線　$y=x^2$，ｘ軸，$x=1$　とで囲まれた部分の面積はいくらか？」という実際に定積分を求積に応用できるかという内容のものである。



原典 Geometria indivisibilibus continuorum（ラテン語）

②原典として「Geometria indivisibilibus continuorum (Bolona,1635)」を各自訳し、生徒の中から図を使って説明してもらい、カヴァリエリの原理「ある平行線の間に２つの平面図形があるとして、その平行線の間にその平行線から等距離にひかれたどんな直線においても、その直線に含まれる部分がどんな場合にも互いに等しいならば、その２つの図形は互いに等しい。」を原典にそって理解した。理解が定着するために「面積は同じで形の違う図形を書いてみよう」(写真１)という問いに取り組む。できあがったらお互いに説明し合い、数人代表で実物投影機を用いて説明(写真２)した。ほぼ全員理解したようである。カヴァリエリの求積の方法の基礎となる考え方「平面図形は、ある与えられた直線に平行な直線(線分、弦)の無限集合と、平行な(接する)両端の直線に囲まれたものから成り立つ」を再確認した。

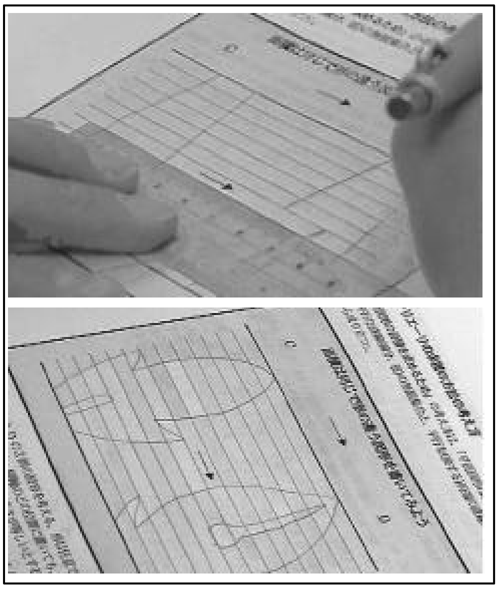
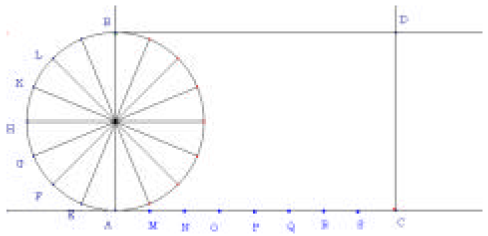
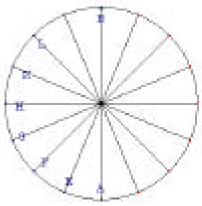


写真１(面積は同じで形の違う図形を書いてみよう)



右の円を切り取って、上の平面上で、ころがしながら点Aの位置をプロットし、サイクロイドを作図してみよう



③次回の授業のためワークシートにサイクロイドを作図してくることを指示した。

写真２(実物投影機を用いた説明)

ワークシート（サイクロイドの作図）

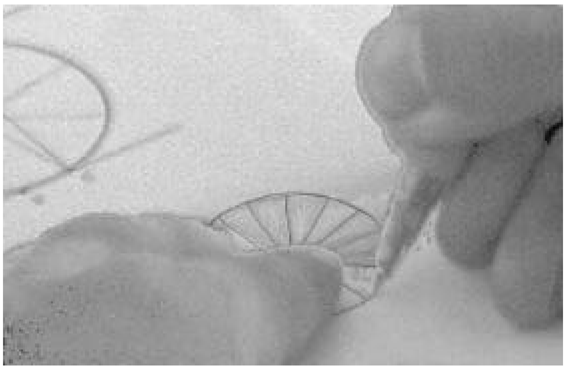


写真３(円を切り取り作図する)

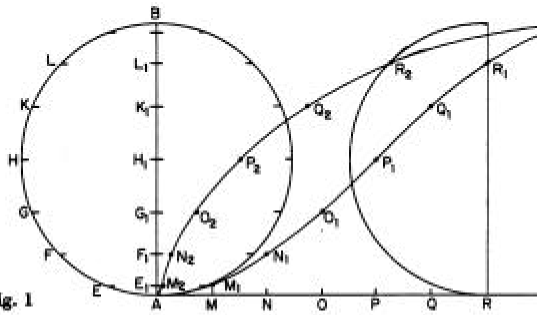


Fig. 1

The Nature of the Cycloid. Let the line AC and the semicircle AGB be divided into an infinite number of parts such that arc AE = arc EF = ···

$$= \text{line } AM = \text{line } MN = \text{line } NO = \cdots.$$

Draw the sine EE_1 perpendicular to the diameter AB, and the versed sine AE_1 is the altitude of A when it has come to E. Similarly draw FF_1, GG_1, etc.

Let MM_1 be parallel and equal to AE_1, NN_1 parallel and equal to AF_1, etc. Let M_1M_2 be parallel to AC and equal to EE_1, N_1N_2 parallel to AB and equal to FF_1, etc. [Roberval's notation for $M_1, N_1, \ldots$ is 1, 2, . . . ; for $M_2, N_2, \ldots$ is 8, 9, ...]

When the diameter has reached the point M, the point A will have reached the position E, the distance of A above AC will be $MM_1 = AE_1$, and the distance of A from the diameter AB will be $EE_1 = M_1M_2$, hence when the

原典 Traite des indivisibles（英語）

【２時間目】サイクロイドの求積と定積分の一般的な式の発見

①生徒の作図してきたサイクロイドの確認をした。更にサイクロイドの生成をカブリでトレースを用いて説明し確認した。

②原典として「Traite des indivisibles(1634)」と日本語訳を対応させながら各自確認し、教師が更に説明を加えた。また、訳とカブリ(作図ツール)による動画を対応させながら随伴曲線としてサインカーブが描かれることを発見した。

教師　：宿題がもう一つあったね。下校途中にサイクロイドはあったかな？

生徒１：体育館の屋根

教師　：なるほど

生徒２：渡ってきたよ(写真４)

教師　：何を渡ってきたの？

生徒２：橋だよ

教師　：確かにあったね

生徒３：かまぼこ？ちょっと調べてこよう

教師　：かまぼ

生徒４：電線

教師　：なるほど

生徒５：自転車の車輪

教師　：いろいろでてきたね

写真４　渡ってきたよ

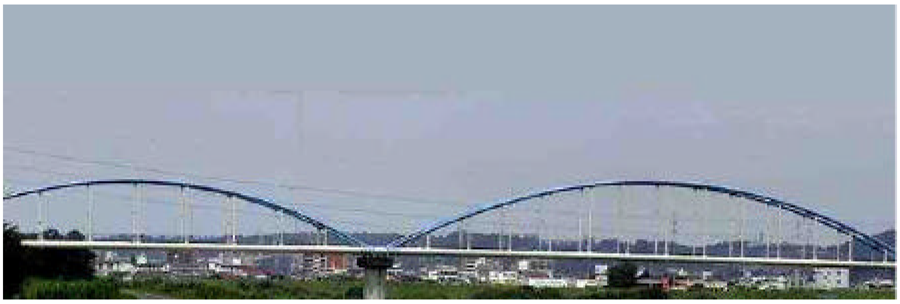
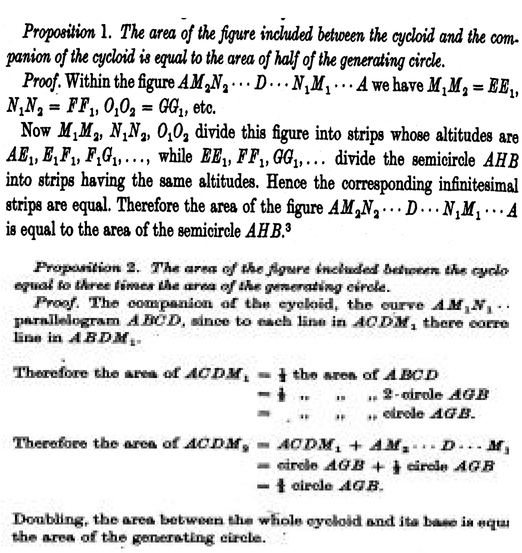


写真５(アーチ型の橋)

アーチ型の橋の写真(写真５)や、カブリによって自転車の車輪の動きを確認し、サイクロイドに近いものが身近にあることに気付いた。上述以外にもサイクロイドではないものやカテナリーのような有名な曲線に関するものも出てきたので次の時間にプリントにまとめて簡単に確認した。



Proposition 1. *The area of the figure included between the cycloid and the companion of the cycloid is equal to the area of half of the generating circle.*

Proof. Within the figure $AM_2N_2 \cdots D \cdots N_1M_1 \cdots A$ we have $M_1M_2 = EE_1$, $N_1N_2 = FF_1$, $O_1O_2 = GG_1$, etc.

Now M_1M_2, N_1N_2, O_1O_2 divide this figure into strips whose altitudes are $AE_1, E_1F_1, F_1G_1, \ldots$, while $EE_1, FF_1, GG_1, \ldots$ divide the semicircle AHB into strips having the same altitudes. Hence the corresponding infinitesimal strips are equal. Therefore the area of the figure $AM_2N_2 \cdots D \cdots N_1M_1 \cdots A$ is equal to the area of the semicircle AHB.[3]

Proposition 2. *The area of the figure included between the cyclo equal to three times the area of the generating circle.*

Proof. The companion of the cycloid, the curve $AM_1N_1 \cdot\cdot$ parallelogram $ABCD$, since to each line in $ACDM_1$ there corre line in $ABDM_1$.

Therefore the area of $ACDM_1$ = $\frac{1}{2}$ the area of $ABCD$
= $\frac{1}{2}$,, ,, ,, 2-circle AGB
= ,, ,, ,, circle AGB.

Therefore the area of $ACDM_2$ = $ACDM_1 + AM_2 \cdots D \cdots M_1$
= circle AGB + $\frac{1}{2}$ circle AGB
= $\frac{3}{2}$ circle AGB.

Doubling, the area between the whole cycloid and its base is equ the area of the generating circle.

原典（英語）サイクロイドの求積

③サイクロイドに囲まれる面積をカヴァリエリの原理を用いて原典に従い求めた。まずはカヴァリエリの原理を覚えているか、挙手によって確認すると大半の生徒が覚えているようで、指名された生徒は確実に答えられた。定着のよさに驚いた。また原典の内容を指名された生徒が説明した。(写真６)

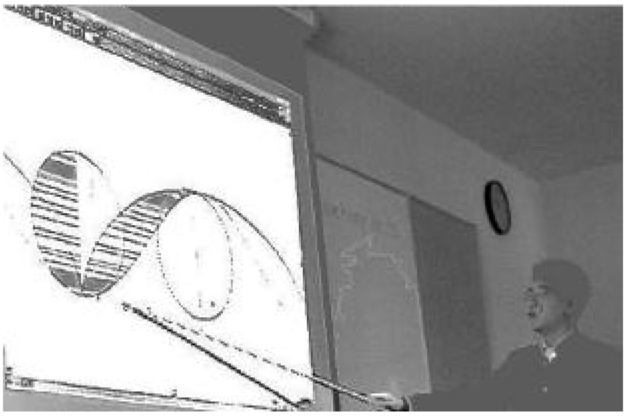
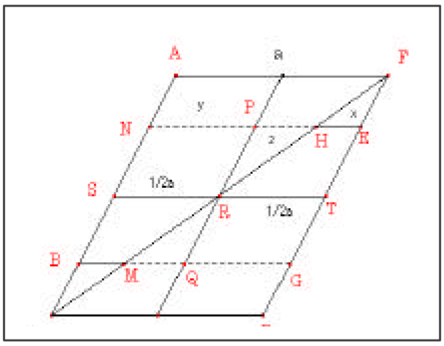


写真６(サイクロイドに囲まれる部分の求積にカヴァリエリの原理をどう用いるかを説明)

④カヴァリエリの功績として、特殊な図形についてその図形の特性を利用しながら個別に求積していた段階をこえて、求積法を系統づけ普遍化したところにある。現代の不定積分の公式（$\mathbf{x}^n$の型のもの）につながる予想をワークシートを用いて行った。カヴァリエリは「不可分」な線や面をいかなる幅も厚さもないものと考え、何かある平面図形を「すべての線」という述語で、図形を構成する互いに平行な線の全体と考えていた。カヴァリエリの不可分量の捉え方は、「線の不可分量は点、面の不可分量は線、立体の不可分量は面」である。原典においては「平行四辺形ＡＤの立方の和は三角形ＦＤＣの線分の平方の和と三角形ＡＣＦの線分ＮＨの立方の和と等しく・・・」（テキスト図参照）というように言葉によって図形的な意味で話がすすんでいく（ギリシャの「幾何学的代数」は１次の量とは長さ、２次のそれには面積というように代数量と幾何学的量とを一律に対応させながら、代数計算を幾何学的にやっていた）。その意味を捉えながらカヴァリエリの直観的な（幾何学的な）発想に従って



テキストの図(カヴァリエリの証明を考えるための参考図)

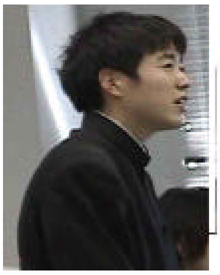


写真７(カヴァリエリはおかしい)

$$\mathrm{omn}\ x = \frac{1}{2}\mathrm{omn}\ a = \frac{1}{2}a^2 \ ,\quad \mathrm{omn}\ x^2 = \frac{1}{3}\mathrm{omn}\ a^2 = \frac{1}{3}a^3$$

を導いていった。(注　カヴァリエリは、omens lineae　(すべての線)の omens を記号として「omn」をもちいた。これこそが、現在「積分」と呼んでいるものを表している。)

⑤カヴァリエリの矛盾を生徒が気付く。

教師：私カヴァリエリは（カヴァリエリの肖像を画面に出し教師がカヴァリエリの役を演じて）、胸にひっかかるものがあります。誰か私の考えに納得がいかない人はいませんか？

数人手があがる

生徒：点が集まって線になったり、線が集まって平面になったりするのは、点や線に量がないのにおかしい(写真７)

手の上がっていなかった生徒たちのなかにうなづく者も

教師：他の手をあげていた人たちはどうですか？

手の上がっていた生徒たちみなうなづく

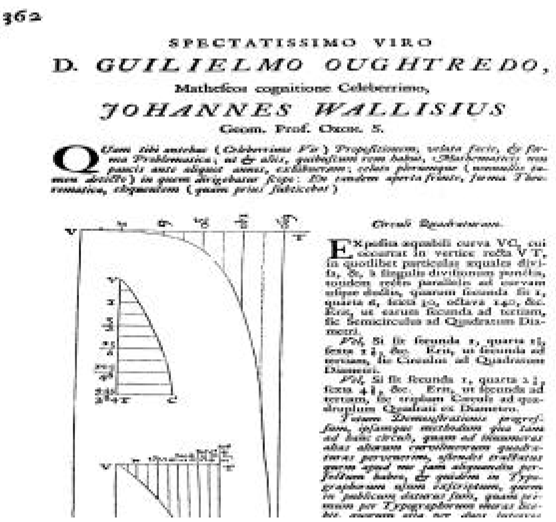
教師：では、みんなが納得いく方法で考えてみよう

疑問を投げかけたまま授業を終えた。

【３時間目】ウォリスによる現代の定積分の概念につながる発見をワークシートを用いて追体験した。

①カヴァリエリの方法の矛盾点を確認した。

②原典「Opere Mathematics(John Wallis)」の中の ARITHMETICA INFINITORUM (pp355-478)を取り上げ、ワークシートでウォリスの現代の定積分の概念につながる発見を追体験した。



362

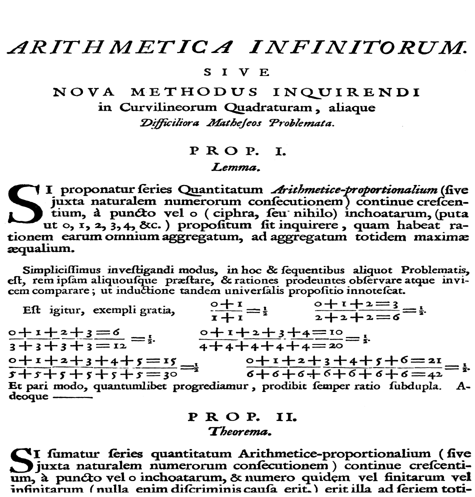
SPECTATISSIMO VIRO

D. GUILIELMO OUGHTREDO,

Matheseos cognitione Celeberrimo,

JOHANNES WALLISIUS

Geom. Prof. Oxon. S.



365

ARITHMETICA INFINITORUM.

SIVE

NOVA METHODUS INQUIRENDI

in Curvilineorum Quadraturam, aliaque

Difficiliora Matheseos Problemata.

PROP. I.

Lemma.

SI proponatur ſeries Quantitatum *Arithmetice-proportionalium* (ſive juxta naturalem numerorum conſecutionem) continue creſcentium, à puncto vel o (ciphra, ſeu nihilo) inchoatarum, (puta ut o, 1, 2, 3, 4, &c.) propoſitum ſit inquirere, quam habeat rationem earum omnium aggregatum, ad aggregatum totidem maximæ æqualium.

Simpliciſſimus inveſtigandi modus, in hoc & ſequentibus aliquot Problematis, eſt, rem ipſam aliquouſque præſtare, & rationes prodeuntes obſervare atque invicem comparare; ut inductione tandem univerſalis propoſitio innoteſcat.

Eſt igitur, exempli gratia, $\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$ $\frac{0+1+2=3}{2+2+2=6}=\frac{1}{2}.$

$\frac{0+1+2+3=6}{3+3+3+3=12}=\frac{1}{2}.$ $\frac{0+1+2+3+4=10}{4+4+4+4+4=20}=\frac{1}{2}.$

$\frac{0+1+2+3+4+5=15}{5+5+5+5+5+5=30}=\frac{1}{2}$ $\frac{0+1+2+3+4+5+6=21}{6+6+6+6+6+6+6=42}=\frac{1}{2}.$

Et pari modo, quantumlibet progrediamur, prodibit ſemper ratio ſubdupla. Adeoque ———

PROP. II.

Theorema.

SI ſumatur ſeries quantitatum Arithmetice-proportionalium (ſive juxta naturalem numerorum conſecutionem) continue creſcentium, à puncto vel o inchoatarum, & numero quidem vel finitarum vel infinitarum (nulla enim diſcriminis cauſa erit.) erit illa ad ſeriem toti-

原典（ラテン語）「Opere Mathematics(John Wallis)」

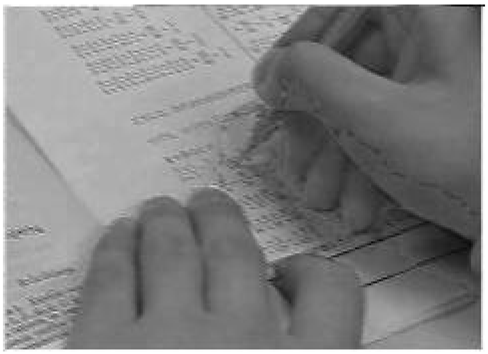


写真８(ウォリスと同じように計算)

写真９　エクセルわかる？

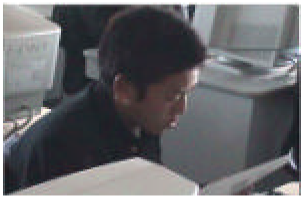
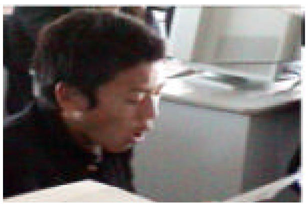


写真 10
計算は大変だ
Excel に挑戦



グラフは？

スゲエ

なあ、スゲエよな

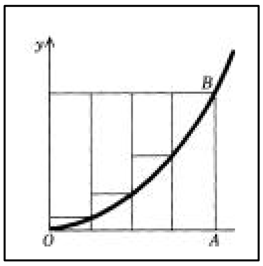
教師：ウォリスの計算の法則はわかりました？分かった人？
　　かなりいますね。

生徒たちはウォリスが原典に記している計算をワークシートに従って黙々と継続していた(写真８)

教師：どうかな？たいへん？

教師：ところでこの計算はいったい何を求めているのだろうか？

$y = x^k$ とｘ軸とｘ＝１とで囲まれる面積の，対応する長方形または平行四辺形の面積との比の計算をおこなった。すなわち、区間OA を等分割し，分点における垂線上に長方形をつくり、これらの長方形の面積の和の，その面積がすべて初めの長方形のなかでの最大のものに等しい長方形の面積の和にたいする比を求めた。



その比を求めることによって現代表記で以下のような結果を得ていたことに生徒たちが気

$$\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$$

③原典で読んだ部分にはわずかな計算結果だけしかなかった（直観的に極限的概念をもっていた）ので、Microsoft Excel を利用(写真９)して近似の精度をあげ（分割する数を大きくし)、更にグラフ化する(写真 10)ことによって予測した結果の信頼性を確認する。更に、この結果は現代でいう極限値の話に繋がることを確認した。

④ウォリスとカヴァリエリの方法の違いを確認した。

教師：前回カヴァリエリの方法に納得してなかった人たち、今回の
　　ウォリスの方法はどうだろう？

生徒：納得いきました。

教師：どこが違った？

生徒：ウォリスは、もともと面積をもつ長方形と比較しているの
　　で問題ないと思います。

多くの生徒たちも納得した(写真 11)

写真 11
なるほど

カヴァリエリは幾何学的方法で「不可分量」の概念を世の中に周知のものとし、特殊な図形についてその図形の特性を利用しながら個別に求積していた段階をこえて、求積法を系統づけ普遍化したという大きな功績を残した。しかし、不可分量は図形を構成する無限小部分ではない。それゆえ、当時の数学者たちから「まったく幅のない線分をいくら集めても幅のある面がつくられるだろうか？・・・」というような攻撃をうけていた（この攻撃に対してカヴァリエリ自身『幾何学演習六篇』(1654)で論破しているが)。その不可分量の矛盾を解決するためにウォリスは「無限の算術」で代数学的に求積法を求めるという功績を残した。しかし、無限性を完全には克服できなかった。だが、今回はわずか２人しかとり挙げられなかったが現在当たり前のように利用している積分公式もギリシャ時代から多くの数学者たちが試行錯誤してきた「求積」から生まれてきたものであり、その後、ニュートン、ライプニッツによって微積分学が確立されることを付け加えて授業を終えた。

５．議論

事前事後アンケートより課題１~３について議論していく。

課題１：数学者の「求積」に対する思考の変遷や試行錯誤を追体験することによって、生徒は新しい概念の導入への理解を深め、「数学的活動」のよさを知ることができるか？

事前アンケートにおいて、数学Ⅱの「積分」履修直後である生徒たちの回答結果は、「不定積分」「定積分」の定義に関する質問に正確に答えられた生徒の割合は 29.3%、簡単な整関数の定積分の計算の正解者の割合は 52.0%。「定積分」がどのような場面で応用できるか？という問いに対して何らかの解答が得られたのは 11.1%であった。しかし、１時間目に取り上げた「カヴァリエリの原理」に関しては時間内での理解の割合及び３時間目までの定着率は、授業中の生徒の活動状況及び反応等でほぼ 100%に近いことがわかった。

事前事後のアンケートから数学において役に立ちそうな分野を挙げるという項目において変容が見られたのは、30.7%でその内容は「積分」「三角関数」であった。

感想の中に以下のようなものがあった。

・サイクロイドの証明は家でもやってみたがとても面白かった

・サイクロイドの面積の求め方はなるほどなと思った

・日常何気なく目にしているサイクロイドには感心した

・カヴァリエリの原理やサイクロイドなどまだ積分がない時代にすでにわかっていた学者がたくさんいたのに驚いた

以上の結果３点から、原典を用いた数学史を取り入れることによって当時の数学者の「数学の発見」の過程を自ら追体験することにより、「どのような目的」で、「何故」そのような思考にたどり着いたかを直観的に感じ取ることによって新しい概念を吸収し、「どのような場面」で「どのように応用」すべきかを自らの判断で創造できるようになったと考えられる。

課題２：原典を読むことで数学者の思考を追うという「数学的活動」により、教科書

に登場する「公式」に対する生徒の考え方は変わるか？

事前アンケートにおいて、「数学の公式」は「導き出された過程を理解しなくてもただ覚えればよい」と答えた生徒が事後アンケートにおいて、「過程も理解すべきだ」と変容した割合は 72.7%（22 名中 16 名）である。また、その理由を分類し挙げる。

- 「公式」ができる過程を知ることによって「積分の理解」が深まった
- 本質的なことが理解でき、「公式」としての記憶の定着率がよい
- 本質的なことが理解でき、その「公式」をどのような場面でどう利用したらよいかわかるようになった
- 数学はどうやって公式を導くのかというところに興味がわいて、他の公式の過程も勉強してみたいと思うようになった
- 公式がつくられるのに多くの人が努力をしてきたことがわかった
- 昔の人の考えやどういう流れで今の公式にたどり着いたかを知れて楽しかった
- 昔の人は自分の知らない分野があってもそれを他の分野により解いていたのだということがわかりびっくりした
- 数学は１つの考えだけでなくいろいろな方向から問題を解けるのだと改めてわかた

以上のような内容から、「公式」が誕生する過程での試行錯誤することによって数学が更に発展していく、すなわち概念が直観的に形成されていく過程を追体験することによってその本質を知ることができ、その結果深い理解（なぜ積分すると(定積分)面積が求まるのか）と応用を身に付け（なぜ積分すると(定積分)面積が求まるのかを理解したことによりただ公式に数字を機械的に当てはめるだけではない)、数学を「楽しい」と思える（数学を生き生きした人間の営みとしてうけいれられた）までになることを生徒自身が確実に感じ、認識したことがわかる。また、このことは課題１にも関連している。ただ、

- 過程がテスト問題として取り扱われるかもしれない

という、テストを気にした回答も１点あったことも確かである。

課題３：作図ツールや、グラフツールを利用して「求積」を経験することは生徒が抽象化された概念に直観的に気づくために有効であるか？

授業後の生徒のアンケートの感想から抜粋

- コンピュータを使った授業でイメージがつかみやすかった
- コンピュータの便利さを改めて実感した
- コンピュータが理解を早めさせた
- 画面を使った過程の学習はわかりやすく楽しかった
- パソコンを使ってグラフなどを見たり、積分の考え方を見るのは通常よりもわかりやすかった
- 図が手元に出てくるのがわかりやすかった

また、ウォリスの算術計算における極限の概念を直観的にとらえるためにおこなったグラフツールを利用した授業における結果は数値と今回示すことはできなかったが生徒の反応からは多くの生徒が概念を直観的にとらえられたと思われる。

礒田[17]は、現行教育課程の編成上の問題として代数、幾何、微積分の関連を挙げている。現行と歴史上の幾何と関数の水準の内容の差違には、代数、幾何、微積分の関連の差違として認識されると考えられる。このことからも直観を要求する幾何学的

推論能力を十分に身に付けていない生徒、更に紙と鉛筆だけの点プロットによるグラフ作成手段しかもたない生徒にとって、作図ツールやグラフツールの利用は数学者の「求積」に対する思考の変遷や試行錯誤の追体験をする手助けとなって、抽象化された概念に気づくために有効に働く。今回かなりの生徒がテクノロジーを使用したことによって視覚的に内容がつかめそのことが理解を早め深めたことを自ら感じ、坂井[18]が言うように、微積分へのテクノロジーの利用は生徒の発見的な学習活動の幅を広げることができたと思われる。

「積分概念」の導入に関しては、塚原[15]の調査研究にもみられるように逆微分により定義された定積分が面積を表現することを高校生が学習するには教科書の説明を何度繰り返しても教授上の効果はなく現状とは異なる形状の教授上の工夫が必要であることが言われており、区分求積法による導入の有用性を西川[13]、西本[14]、溝口[16]等多くの研究者から提言されている。しかし、現行の学習指導要領の元では厳密な区分求積法から導入することは困難である。また自分たちが学ぶ数学も生き生きした人間の営みとして改めて認めなおすことによって今まで発現しなかった直観も多くの場面で発現し数学的概念理解に有用であることから本研究では１７世紀の積分概念の発展過程を教材としてとりあげる授業を実践した。その結果、定積分の「公式」が誕生する過程での試行錯誤によって数学が更に発展していく、すなわち概念が直観的に形成されていく過程を追体験することによって、「どのような目的」で、「何故」そのような思考にたどり着いたかを直観的に感じ取ることができ新しい概念を理解できる。その本質を知る（ただ公式に数字を機械的に当てはめる方法だけを身に付けるのではなく、なぜ積分すると(定積分)面積が求まるのかを理解する）ことによって、「どのような場面」で「どのように応用」すべきかを自らの判断で創造できるようになり、更に数学を「楽しい」と思える（数学を生き生きした人間の営みとしてうけいれられた）までになることを生徒自身が確実に感じとる。また、認識した直観を要求する幾何学的推論能力を十分に身に付けていない生徒にとっては、作図ツールやグラフツールの利用によって数学者の「求積」に対する思考の変遷や試行錯誤の追体験をする手助けとなって、抽象化された概念に気づくために有効に働くことがいえた。

今後の課題として、本研究における導入を行った場合、「微分」と接続させる授業研究をおこなう必要がある。

６．おわりに

本研究では、数学史を取り入れることによって、今日の積分法の直接的萌芽である不可分量の方法を一般化したカヴァリエリの原理、更にウォリスの方法を原典を解釈することにより、積分法という概念を歴史的に再認識させ、「積分」をただの記号遊びとしてではなく理解を深める授業の展開の可能性を検証した。その結果、「積分」するという行為の意味、公式の誕生するまでの先人の努力を知ることによって積分に対するより深い理解、更には、数学に対する生徒の変容が認められた。このことは、今後数学史を取り入れた教材の利用は、新しい概念の導入への理解を深めることや、

創造力及び直観力などの創造性の基礎を培うことができると考える。最後に生徒の声として、「積分は難しいと思いながらやってきたけど今回の授業で積分の原点に帰って勉強できたので、少しだけど積分に対する理解が深まった」「また違った数学を感じたような気がする」「まだまだ自分が知らないことの多さに気づき、数学の奥の深さを知ることができてよかった」等が挙がったことは、「数学史原典」を用いることがその時代の数学的思考をよみがえらせ、共感を与えそれを基礎に別の視点をもつことができたことを裏付けていることを付け加えておく。

謝辞

授業実践に際し、埼玉県立春日部高等学校の早乙女勤先生、坂本昭雄先生、熊谷公孝先生、中島幹夫先生、江森弘明先生をはじめ数学科の先生方には多大なるご協力と共に、貴重なご指導ご指摘をいただきました。厚く御礼申し上げます。

注

本研究は平成 14 年度科学研究費「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」(基盤研究Ｂ、研究代表者礒田正美　No.14380055)の一環として行われた。

（引用・参考文献）

【１】礒田正美(1997).曲線と運動の表現史からみた代数、幾何、微積分の関連に関する一考察～幾何から代数、解析への曲線史上のパラダイム転換に学ぶテクノロジー利用による新系統の提案と関数の水準の関連～.*筑波数学教育研究,１６*,７

【２】文部省(1999).高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編．東京：実教出版

【３】礒田正美・志木廣・山中和人(1990).関数の活用の仕方と表現技能の発達に関する調査研究－小・中・高にわたる発達と変容－*日本数学学会誌,72*,49

【４】三輪辰郎(2001).高等学校数学教育理念検討会(第１回)での意見．*高等学校の科学教育改革に関する総合研究,４,高等学校数学教育の理念(Ｉ)*,58-59

【５】文部省(1999).高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編,積分の考え(pp.64-65).東京:実教出版

【６】Freudenthal,H.(1983).*The didactical phenomenology of mathematical structures* . Dordrech:Reidel

【７】Tzanakis,C. & Arcavi,A.（2000）.Integration history of mathematics in the classroom:an analytic survey.*History in mathematics education : an ICMI study* (pp.204). Dordrecht ; Boston : Kluwer Academic.

【８】Tzanakis,C. & Arcavi,A.（2000）.Integration history of mathematics in the classroom:an analytic survey.*History in mathematics education : an ICMI study* (pp.205). Dordrecht ; Boston : Kluwer Academic.

【９】Guinness,G..I.(1973).Not from Nowhere History and Philosophy behind Mathematical Education .*Int.J.Math Educ.Sci.Technol.(4)*,421-453

【10】礒田正美(1987).数学学習における数学史の利用に関する一考察.*筑波大学附属駒場中・高等学校*

（26）,167

【11】礒田正美（編）(1997).*課題学習・選択数学・総合学習の教材開発*.東京:明治図書

【12】臼田要介(2001).生徒の数学観を変容させるための数学史の活用について～「カバリエリの原理」の教材を通して～.*中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（８）テクノロジーの活用による数学教育内容の創造に関する研究～代数、解析、幾何の改革～　筑波大学数学教育学研究室*,222－235

【13】西川清次(1998).「不定積分は微分の逆の操作である」という考え方を用いないで面積を考察する方法～区分求積法の考えを用いる方法～.*中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（５）テクノロジーの活用による数学教育内容の創造に関する研究～代数、解析、幾何の改革～筑波大学数学教育学研究室*,113-122

【14】西本公英(1990).高等学校における微積分の導入に関する一考察．*筑波数学教育研究（９）筑波大学数学教育研究室*,27-36

【15】塚原成夫(1999).積分における高校生の概念理解への考察．*筑波数学教育研究（18）筑波大学数学教育研究室*,57-62

【16】溝口達也(1993).面積を求める場面における学習者の概念の変容と認知論論的障害．*数学教育論文発表会論文集（26）日本数学教育学会*,127-132

【17】礒田正美(1997).曲線と運動の表現史からみた代数、幾何、微積分の関連に関する一考察～幾何から代数､解析への曲線史上のパラダイム転換に学ぶ　テクノロジー利用による新系統の提案と関数の水準の関連～.*筑波数学教育研究,16*

【18】坂井和裕(1996).微積分へのテクノロジー利用に関する一提案．*中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（４）テクノロジーの活用による数学教育内容の改定に関する研究～解析領域、幾何領域を中心に～　筑波大学数学教育学研究室*,133-144

(上記以外の授業資料作成における参考文献)

・近藤洋逸(1994).*近藤洋逸数学史著作集　第５巻　数学史論論*（佐々木力編）.東京:日本評論社

・ボイヤー(1984).*数学の歴史３*（加賀美鉄雄・浦野由有訳）.東京:朝倉書店

・ニキフォロスキー(1993).*積分の歴史*(馬場良和訳).京都:現代数学社

・安部斎著(1989).*微積分の歩んだ道*.東京:森北出版