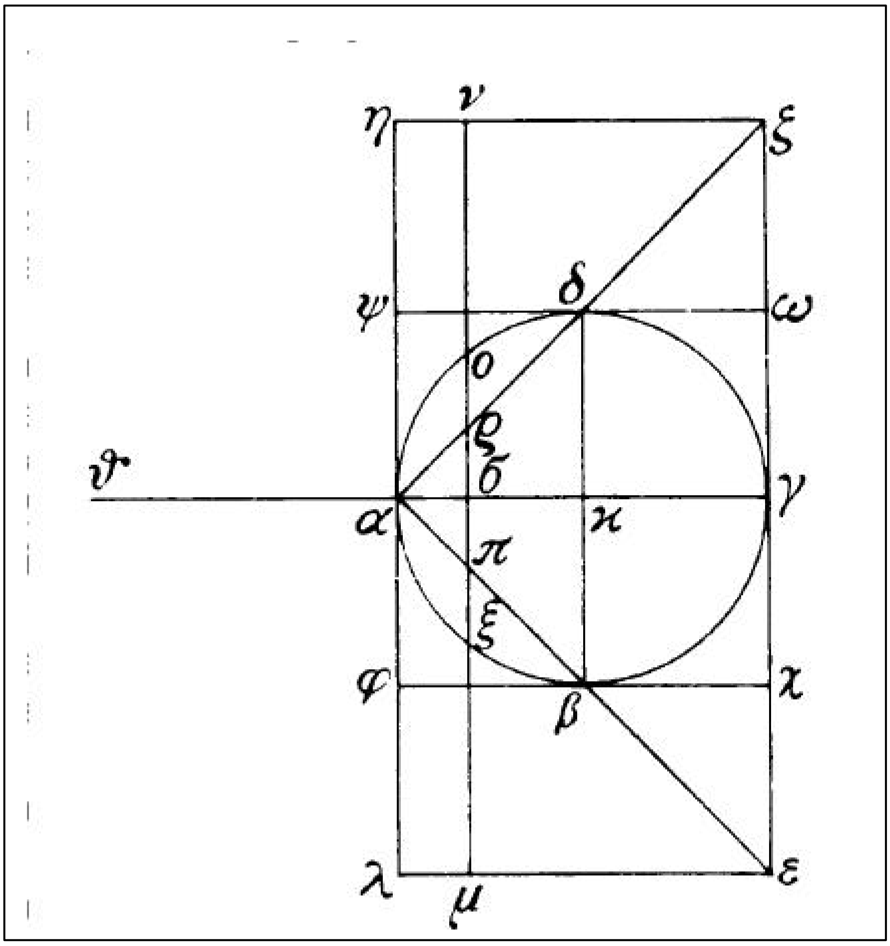
# 授業資料




２年１組　＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

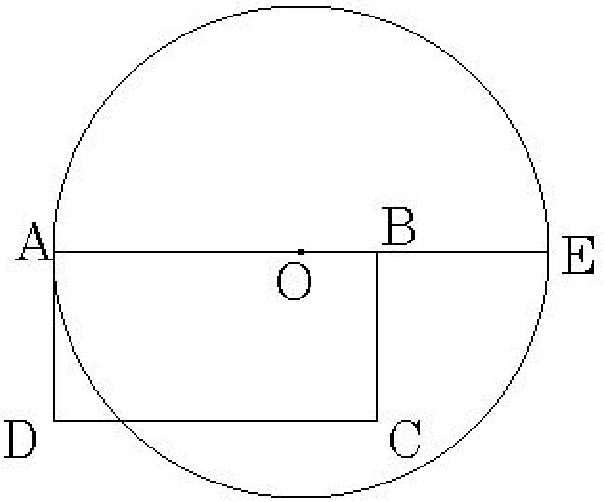

授業者　筑波大学大学院教育研究科１年

小林　　真人

まずは先週の復習から・・・。

Ⅱ巻ー命題１４

与えられた直線図形に等しい正方形をつくること




① BC を B の側に延長し，円との交点を F とする。

② F と O を結ぶ。

③ ＢＥ＝ＢＣより，ＡＢとＢＥに囲まれた図形は，ＡＢとＢＣに囲まれた長方形と等しい。

④ 長方形ＡＢＣＤとＢＯ上の正方形は，ＯＥ上の正方形に等しい。

⑤ ＯＥ＝ＯＦより，長方形ＡＢＣＤとＢＯ上の正方形の和は，ＯＦ上の正方形に等しい。

⑥ 長方形ＡＢＣＤとＢＯ上の正方形の和は，ＯＢ上の正方形とＢＦ上の正方形の和に等しい。（$OF^2=OB^2+BF^2$）

⑦ よって，長方形ＡＢＣＤとＢＯ上の正方形の和は，ＯＢ上の正方形とＢＦ上の正方形の和に等しい。

⑧ つまり，長方形ＡＢＣＤとＢＦ上の正方形は等しい。（⑦の双方よりＢＯ上の正方形を引く。）

⑨ ＢＦ上の正方形が，求めるべき正方形であった。

- 「円は直径上の正方形に比例する」（ユークリッド原論ＸⅡ巻－命題２）
- 平面、立体ともに比を利用して体積を求めようとしていた。
- ユークリッド原論
  「すべての角錐はそれと同じ底面、等しい高さをもつ角柱の 3 分の 1 である」
  「すべての円錐はそれと等しい高さをもつ円柱のそれぞれ 3 分の 1 である」

アルキメデス（紀元前２８７頃～２１２頃）
　シチリアのシラクサで生まれた。
　アルキメデスは、数学だけでなく、
天文学、流体力学、など幅広い分野に
関心をもっていた。

# エラトステネスに宛てた機械学的な定理についてのアルキメデスの方法

アルキメデスからエラトステネスさまへ御挨拶申し上げまする．

（中略）

さて，もとより貴殿は，ご熱心な学徒であり，哲学に携わる有名な学者であられ，しかも，機会あるごとに数学における探究を賛美しておられますのを拝見しておりまするので，この書のなかに，貴殿に，ある種の独特な方法を書き記しまして説明申し上げるのが適切かと存じました．その方法と申しまするのは，このやり方によって，<u>数学におけるある種の問題を機械学によって探究することができるためのきっかけを貴殿に得ていただくためのものであります．そしてこの方法は，定理の証明そのものにとりましても，同様に有用であると信じております．と申しまするのは，この方法による探究は証明を与えるわけではありませんので，機械学的に最初明らかにされたいくつかのことは，あとで幾何学的に証明されねばなりませぬが，その際，この方法によって，追究されている問題について，いくつかの知識をあらかじめ得ておきまするとなんらの知識なしに追究するよりも，その証明を求めますのがはるかに容易であるからなのでございます．</u>

（後略）

「エラトステネス」とは・・・

アルキメデスの友人であり，アレクサンドリアのムセイオンの司書で，後に館長となった人間である。

**釣り合いとは・・・**

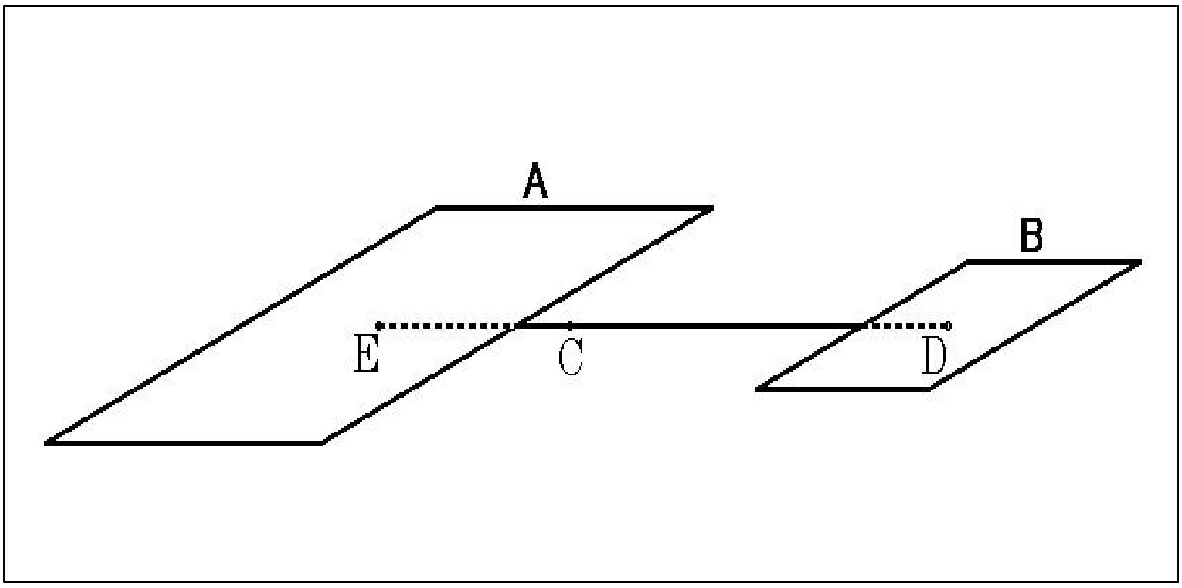
**重心とは・・・**

**アルキメデスの著書「平面板の平衡」について見ていこう。**

***「二量は重量に反比例する距離において釣り合う。」***

**これは・・・**

**「それぞれの重量がａ，ｂの時、点Ａ，Ｂがそれらの重心であるとし、ＤＥはある長さの直線で、点Ｃにおいて分割されて、ａ：ｂ＝ＤＣ：ＣＥになるとする。そして、ＡとＢの結合された量の重心がＣであるということである。」**



β'.

Ὅτι δὲ πᾶ|σα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶν τοῦ | κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος | ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν | τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ | κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ὁ κύλιν|δρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῷ | μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, | ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαί|ρας, ἡμιόλιος τῆς σφαίρας ἐστίν, | ὧδε θεωρεῖται κατὰ τρόπον τόνδε·

Ἔστω γάρ τις σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος | κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετροι δὲ αἱ | ΑΓ, ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις οὖ|σαι, ἔστω δὲ κύκλος ἐν τῇ σφαί|ρᾳ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθὸς | πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, καὶ ἀπὸ | τοῦ ὀρθοῦ κύκλου τούτου κῶνος ἀναγε|γράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ Α ση|μεῖον, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ἐπιφα|νείας αὐτοῦ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπι|πέδῳ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν βάσιν· | ⟨ποιήσει δὴ κύκλον ὀρθὸν πρὸς⟩ | τὴν ΑΓ, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΕΖ. | ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος | ἀναγεγράφθω ἄξονα ἔχων τῇ | ΑΓ ἴσον, πλευραὶ δὲ ἔστωσαν τοῦ κυλίν-|δρου αἱ ΕΛ, ΖΗ· καὶ ἐκβεβλήσθω | ἡ ΓΑ, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ | νοείσθω ζυγὸς ὁ ΓΘ, μέσον δὲ αὐ|τοῦ τὸ Α, καὶ ἤχθω τις παράλληλος ὑ|πάρχουσα τῇ ΒΔ ἡ ΜΝ, τεμνέτω | δὲ αὕτη τὸν μὲν ΑΒΓΔ κύκλον κατὰ | τὰ Ξ, Ο, τὴν δὲ ΑΓ διάμετρον κατὰ τὸ Σ, | τὴν δὲ ΑΕ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Π, τὴν | δὲ ΑΖ κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ | εὐθείας ἐπίπεδον ἀνεστάτω | ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ· ποιήσει δὴ τοῦ|το ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν | ⟨κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ ΜΝ, | ἐν δὲ τῇ ΑΒΓΔ σφαίρᾳ⟩ | κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν | δὲ τῷ ΑΕΖ κώνῳ κύκλον, οὗ *ἔσται δι|άμετρος ἡ ΠΡ.*

*καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶν τὸ | ὑπὸ ΓΑ, ΑΣ τῷ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ· ἴση γὰρ | ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΣΜ, ἡ δὲ ΑΣ τῇ ΠΣ· τῷ δὲ | ὑπὸ ΓΑ, ΑΣ ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΑΞ, του-| τέστιν τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ, ἴσον ἄρα τὸ ὑ|πὸ τῶν ΜΣ, ΣΠ τοῖς ἀπὸ τῶν ΞΣ, ΣΠ. | καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ἡ | ΜΣ πρὸς ΣΠ, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ, ὡς ἄρα | ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, ἡ ΜΣ πρὸς ΣΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ | ΜΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ. τῷ δὲ ὑπὸ ΜΣ, | ΣΠ ἴσα ἐδείχθη τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ· ὡς ἄρα | ἡ ΑΘ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ | ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ | ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὰ | ἀπὸ ΞΟ, ΠΡ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὰ | ἀπὸ ΞΟ, ΠΡ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ | κυλίνδρῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς | ⟨ἀμφοτέρους τοὺς κύκλους τόν τε | ἐν τῷ κώνῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ,⟩ | καὶ τὸν ἐν τῇ σφαίρᾳ, οὗ ἐστιν διά|μετρος ἡ ΞΟ· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως | ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ πρὸς τοὺς | κύκλους τόν τε ἐν τῇ σφαίρᾳ καὶ | τὸν ἐν τῷ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν, ὡς ἡ ΘΑ | πρὸς ΑΣ, οὕτως αὐτὸς ὁ κύκλος ὁ ἐν | τῷ κυλίνδρῳ αὐτοῦ μένων ἀμφο|τέροις τοῖς κύκλοις, ὧν εἰσιν διάμε|τροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, μετενεχθεῖσιν καὶ τε-| θεῖσιν οὕτως ἐπὶ τὸ Θ, ὥστε ἑκατέρου | αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ | Θ, ἰσορροπήσουσι κατὰ τὸ Α σημεῖ|ον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλ|λη ἀχθῇ ἐν τῷ ΑΖ παραλληλογράμ|μῳ παρὰ τὴν ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀ|χθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν | πρὸς τὴν ΑΓ, ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος ἐν | τῷ κυλίνδρῳ ἰσορροπήσει πε|ρὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένων ἀμ|φοτέροις* τοῖς κύκλοις τῷ τε | ἐν τῇ σφαίρᾳ γινομένῳ καὶ τῷ | ἐν τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τε|θεῖσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, | ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι | τοῦ βάρους τὸ Θ. συμπληρω|θέντος οὖν τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τῶν | ληφθέντων κύκλων καὶ τῆς σφαί-|ρας καὶ τοῦ κώνου ἰσορροπήσει | ὁ κύλινδρος περὶ τὸ Α σημεῖον αὐ|τοῦ μένων συναμφοτέροις τῇ | τε σφαίρᾳ καὶ τῷ κώνῳ μετενε|χθεῖσι καὶ τεθεῖσι ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ | τὸ Θ, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον | εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ | τ̣ὰ̣ εἰρημένα̣ σ̣τ̣ε̣ρ̣ε̣ὰ̣ κατὰ τὸ Α̣ σ̣η|μ̣ε̣ῖ̣ο̣ν̣ τ̣ο̣ῦ̣ μ̣ὲ̣ν̣ κ̣υλίνδρου μένοντος π̣ε̣ρ̣ὶ̣ κ̣έ̣ν̣τ̣ρ̣ο̣ν̣ | τοῦ βάρους τὸ Κ, τῆς δὲ σφαίρας καὶ | τοῦ κώνου μετενηνεγμένων, ὡς | εἴρηται, περὶ κέντρον βάρους τὸ Θ, | ἔσται, ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΚ, οὕτως ὁ κύλιν|δρος πρὸς τὴν σφαῖραν καὶ τὸν κῶ|νον. διπλασία δὲ ἡ ΘΑ τῆς ΑΚ· διπλα̣|σίω̣ν̣ ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος συναμ|φοτέρου τῆς τε σφαίρας καὶ τοῦ | κώνου. αὐτοῦ δὲ τοῦ κώνου τριπλα|σίων ἐστί· τρεῖς ἄρα κῶνοι ἴσοι εἰσὶ δυ|σὶ κώνοις τοῖς αὐτοῖς καὶ δυσὶ σφαί-|ραις. κοινοὶ ἀφηρήσθωσαν δύο | κῶνοι· εἷς ἄρα κῶνος ὁ ἔχων τὸ | διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ Α̣Ε̣Ζ | ἴσος ἐστὶ ταῖς εἰρημέναις δυσὶ | σφαίραις. ὁ̣ δ̣ὲ̣ κῶνος, οὗ τὸ διὰ | τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΕΖ, ἴ̣σος ἐστὶν | ὀκτὼ κώνοις, ὧν ἐστι τὸ διὰ τοῦ | ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΔ, διὰ τὸ | διπλῆν εἶναι τὴν ΕΖ τῆς ΒΔ. οἱ̣ ἄ̣ρ̣α̣ | ὀκτὼ κῶνοι οἱ εἰρημένοι ἴσοι εἰσὶ̣ | δυσὶ σφαίραις. τετραπλασίων | ἄρα ἐστὶν ἡ σφαῖρα, ἧς μέγιστος | κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, τοῦ κώνου, οὗ κορυ|φὴ μέν ἐστι τὸ Α σημεῖον, βάσις | δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύ|κλος ὀρθὸς ὢν πρὸς τὴν ΑΓ.

ἤχθω|σαν δὴ διὰ τῶν $B$, $\varDelta$ σημείων ἐν | τῷ $AZ$ παραλληλογράμμῳ τῇ | $A\Gamma$ παράλληλοι αἱ $\Phi BX$, $\Psi\varDelta\Omega$, καὶ | νοείσθω κύλινδρος, οὗ βάσεις | μὲν οἱ περὶ διαμέτρους τὰς $\Phi\Psi$, $X\Omega$ κύκλοι, ἄξων δὲ ὁ $A\Gamma$. ἐπεὶ | οὖν διπλάσιός ἐστιν ὁ κύλινδρος, οὗ | ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλλη|λόγραμμον τὸ $\Phi\Omega$, τοῦ κυλίνδρου, | ⟨οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλ⟩|ληλόγραμμον τὸ $\Phi\varDelta$, αὐτὸς δὲ οὗ|τος τριπλασίων ἐστὶν τοῦ κώνου, | οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον | τὸ $AB\varDelta$, ὡς ἐν τοῖς Στοιχείοις, ἑξα|πλασίων ἄρα ὁ κύλινδρος, οὗ ἐστι | τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλό|γραμμον τὸ $\Phi\Omega$, τοῦ κώνου, οὗ | τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ $AB\varDelta$. | ἐδείχθη δὲ τοῦ αὐτοῦ κώνου τετρα|πλασία οὖσα ἡ σφαῖρα, ἧς μέ|γιστός ἐστιν κύκλος ὁ $AB\Gamma\varDelta$· | ἡμιόλιος ἄρα ὁ κύλινδρος τῆς | σφαίρας· ὅπερ ἔδει δειχθῆναι. |

Τούτου τεθεωρημένου, διότι πᾶ|σα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ τοῦ | κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν | μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον | τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, | ἡ ἔννοια ἐγένετο, ὅτι πάσης σφαί-|ρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ | τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαί|ρᾳ· ὑπόληψις γὰρ ἦν, καὶ διότι πᾶς κύκλος | ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχον|τι τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ὕψος | δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, | καὶ διότι πᾶ|σα σφαῖρα | ἴση ἐστὶ κώ|νῳ τῷ βά|σιν μὲν ἔχον|τι τὴν ἐπι|φάνειαν τῆς | σφαίρας, ὕψος | δὲ ἴσον τῇ ἐκ | τοῦ κέντρου | τῆς σφαίρας.

**ここでひとつ注意！！！**

**例えば・・・**

①「『AB、BC **に囲まれる長方形**』**は、**『XY、YZ **に囲まれた長方形**』**に等しい。**」

↓

「**現代風に**『AB・BC＝XY・YZ』**という様に書くことにしよう。**」

②「AB **が** BC **に対するように、**XY **が** YZ **に対する**」

↓

「**これも現代風に**『AB：BC＝XY：YZ』**という様に書くことにしよう。**」

アルキメデスの発見方法をおってみよう！

方法「命題２」

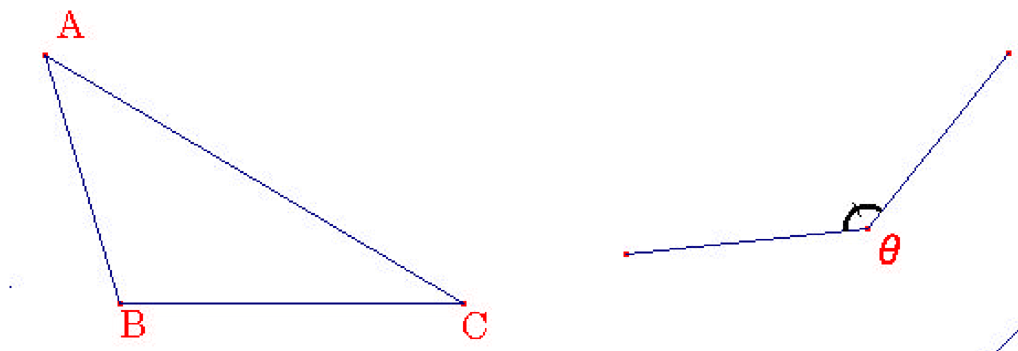
| |
|---|
| すべての球は，球の大円に等しい底面と，球の半径に等しい高さをもつ円錐の４倍である。また，球の大円に等しい底面と，球の直径に等しい高さをもつ円柱は，球の１１/２倍である。これらのことは，次のようなやり方で，以下のように見出される。 |

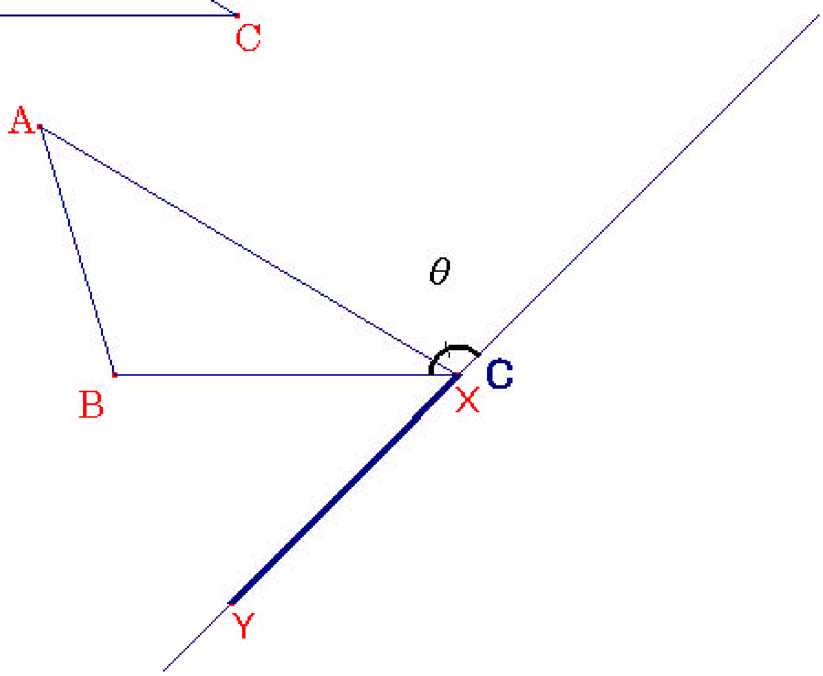
「ＭＳ，ＳＱに囲まれた長方形は，ＲＳ上の正方形とＳＱ上の正方形との和に等しい。」　（$MS \cdot SQ = RS^2 + SQ^2$）　を証明してみよう。

先週の授業で扱った命題の「ユークリッド原論」の中にかかれている証明をおってみましょう。

Ⅰ巻ー命題４４

与えられた線分上に与えられた三角形にひとしい平行四辺形を与えられた直線角のなかにつくること。



① C の中点（D とする）を通り，XY に平行な直線を引く。

② A を通り，BC に平行な直線を引く。（①で引いた直線との交点を E，直線 XY との交点を F とする。）

【これで，三角形 ABC と平行四辺形 EFCD とが等しくなった】－（ⅰ）

③ Y を通り，BC に平行な直線を引く。（直線 DE との交点を G とする。）

④ G と C を通る直線を引く。（直線 AE との交点を H とする。）

⑤ H を通り，XY に平行な直線を引く。（直線 BC との交点を I，直線 GY との交点を J とする。）

⑥ 平行四辺形 XYJI は，平行四辺形 EDXF と等しい。（ⅱ）

【なぜなら，今，四角形 EGJH は平行四辺形なので，三角形 EGH と三角形 HGJ は等しい。同様にして，三角形 DGX と三角形 XGY が等しく，三角形 FXH と三角形 HXI も等しい。よって，等しい三角形からぞれぞれ等しい三角形が引かれたのだから，平行四辺形 EDXF と平行四辺形 XYJI は等しい。】

⑦（ⅰ）（ⅱ）より，平行四辺形 XYJI が求めるべき平行四辺形であった。

**Ⅰ巻―命題４５**

**与えられた直線角の中に与えられた直線図形に等しい平行四辺形をつくること**