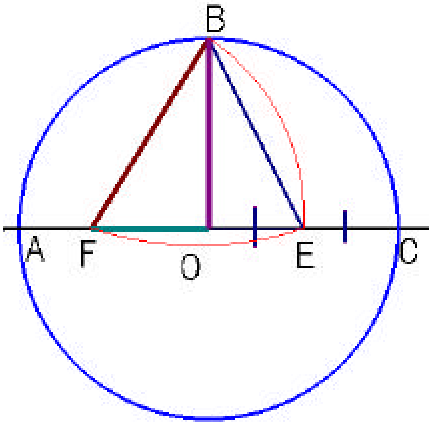
ワークシート①　　　　　　　　　　　　　　**授業者　中村友也**

1/2°**ずつの弦の長さの表を完成しよう。**

1、ABC を中心 O、直径 AOC の半円とする。そして、O から AC に垂直な OB を引き、OC を E で二等分し、EB を結ぶ。そして、EB と同じ長さの EF をとり、FB を結ぶ。FO は十角形の一辺で、BF は五角形の一辺といえる。

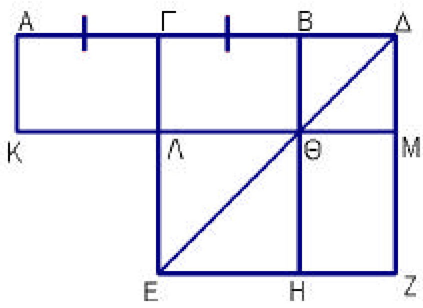


補題Ⅰ※　　ユークリッド原論Ⅱ、6

右図において、AΓ＝ΓB の線分 AB に適当な長さの BΔが加えられたならば、

AΔ・ΔB＋BΓ²＝ΔΓ²

が成り立つ。



補題Ⅱ　　ユークリッド原論ⅩⅢ、9

同一の円に内接する六角形の辺と、

十角形の辺が与えられたならば、

十角形の一辺：六角形の一辺

=六角形の一辺：（十角形の一辺＋六角形の一辺）

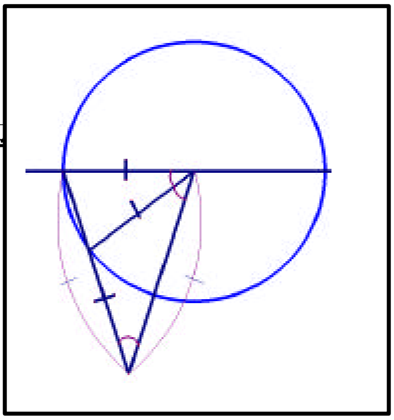
つまり、

六角形²＝（六角形＋十角形）・十角形

＝六角形・十角形＋十角形²

が成り立つ。

外中比に分けられるという。

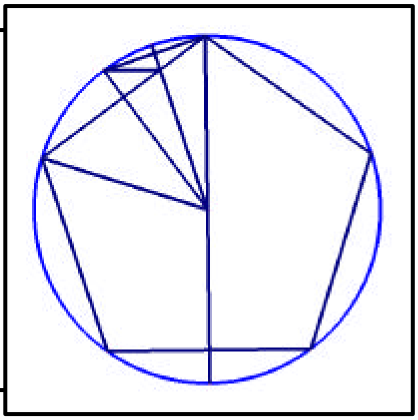


補題Ⅲ　　ユークリッド原論ＸⅢ、１０

同じ円に内接する正五、六、十角形において、

五角形の一辺^2＝六角形の一辺^2＋十角形の一辺^2

が成り立つ。



【証明】

直線 OC **は** E **によって二等分されており、線分** CF **はそれに加えられているので、**

CF・FO＋EO^2＝EF^2＝BE^2 **（ユークリッド原論Ⅱ、６より）**

また、三角形 BOE **において、三平方の定理より**

①＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

それゆえに、

CF・FO＋EO^2＝②＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

両辺に共通な EO^2 **を取り除くと**

CF・FO＝OB^2＝OC^2

よって、FO **は外中比に分けられ、**

このとき、六角形の辺と十角形の辺が同じ円内にかかれるので、OF は十角形の辺に等しくなる。

（ユークリッド原論ＸⅢ、９より）

また、三角形 BFO **において、三平方の定理より**

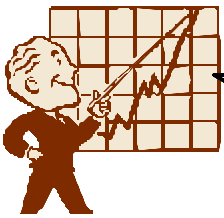
③＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

であり、FO は十角形の一辺、OB は六角形の一辺なので

BZ は五角形の一辺である。（ユークリード原論ＸⅢ、１０）

補題※・・主要な定理を証明するために、準備として証明され、使われる定理。

補助定理ともいう



cabri **で確認しよう！**

2、プトレマイオスの定理

ABCD を円に内接する四角形とし、AC と BD を結ぶ。AC と BD にはさまれる長方形が AB と CD、そして AD と BC にはさまれる長方形の和に等しいといえる。

∠DBC と等しくなるように∠ABE をとる。

①相似条件

それゆえに、三角形 ABD は三角形 EBC と等角※である。

∴BC：CE＝BD：DA

∴BD・CE＝BC・DA・・・（1）

②相似条件

三角形 ABE と三角形 DBC は等角である。

∴BA：AE=BD：DC

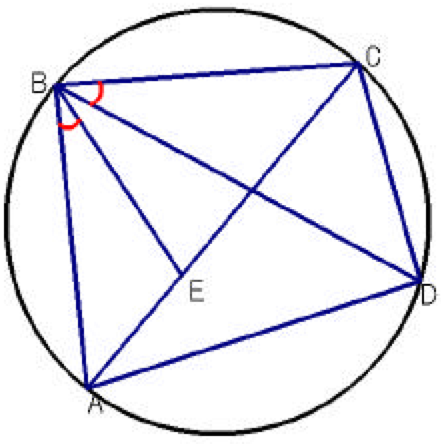
∴BD・AE ＝BA・DC・・・（1）

よって（1）、（2）を加えて、

AC・BD＝AB・DC＋AD・BC

これが証明されるものであった。

等角※・・・現代の相似のこと。



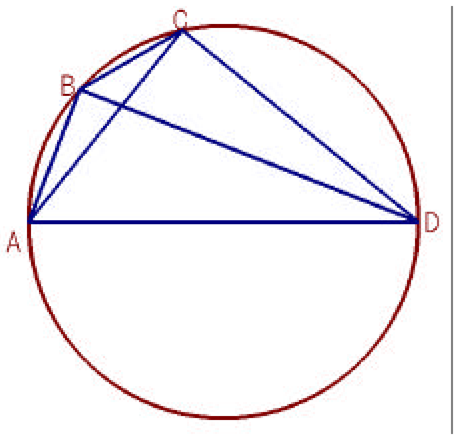
3、もし、2 つの等しくない弧と、それに対する弦が与えられたならば、弧の差に対する弦の長さが与えられる。

ABCD を直径 AD の半円とする。そして、A から 2 つの弦 AB、AC を引き、直径１２０ᴾ に対して、それぞれの長さは与えられているとする。BC を結ぶと、この長さも与えられるということが示すことである。

BD、CD を結ぶとしたことから、明らかにそれらは与えられる。なぜなら、半円の残りに対する弦だからである。よって、ABCD は円に内接する四角形なので、

①　　　　　　　　　　　　　　　　　　（プトレマイオスの定理）

そして、AC・BD と、AB・CD は与えられているので、残りの項である AD・BC も与えられる。そして、AD は直径なので、それゆえに弦 BΓ は与えられる。



4、ある弧にたいする弦が与えられたとき、その弧の半分に対する弦の長さが与えられる。

ABC を直径 AC の半円とし、弦 CB は与えられているとし、弧 CB は D によって二等分されていて、AB、AD、BD、DC を結び、そして D から AC に垂直な DF を引く。FC は AB と AC の差の半分であるといえる。なぜなら、AB と等しい AE をおき、DE を結ぶ。

三角形 ABD と三角形 AED において、

AB＝AE、AD 共通、

等しい弧に対する弦の長さは等しいので∠BAD＝∠EAD

より、三角形は合同。よって、BD＝ED。また、BD=DC。

よって、DE=DC。したがって、三角形 DEC は二等辺三角形 で、DF は底辺に垂直に交わるように引かれたので、EZ=ZT。

よって、辺 FE は辺 AB と辺 AC の差の半分である。

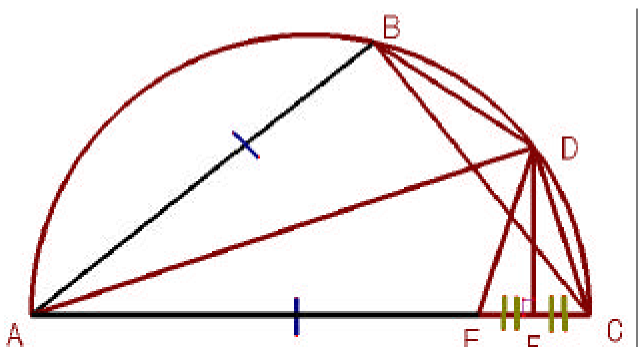
ゆえに、BC は与えられており、BA は直角三角形 ABC から求まるので、FC も求めることができる。

よって、三角形 ADC∽三角形 DFC より、

AC：CD＝DC：CF

ゆえに、**AC・CF＝CD²**

よって、辺 AD・DF は与えられているので、CD を求めることができる。



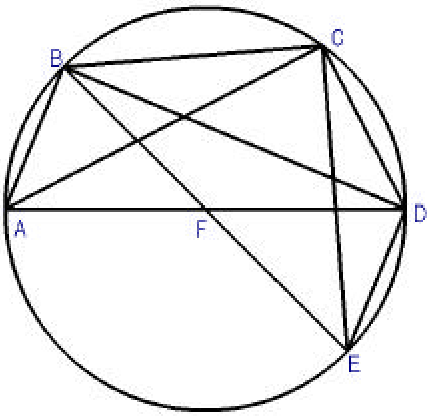
5、ある 2 つの弧と、それらに対する弦が与えられたならば、それらの弧の和に対する弦の長さも与えられる。

ABCD を中心F、直径ＡＤの円とし、Ａから与えられた弧ＡＢ、ＢＣをとる。そして、これらの弧に対する弦ＡＢ、ＢＣを結び、これらも与えられている。ここで、弧の和に対する弦ＡＣが求めるものである。

Ｂから直径ＢＦＥをひき、ＢＤ、ＤＣ、ＣＥ、ＤＥを結ぶと、ＡＢ,ＢＣ既知より、直角三角形を使ってＢＤ、ＤＥ、ＣＥが分かる。よって、し四角形ＢＣＤＥは円に内接しているので、

ＢＣ・ＤＥ＋ＣＤ・ＢＥ＝ＢＤ・ＣＥ

ここで、ＢＣ・ＤＥ、ＢＤ・ＣＥは既知、またＢＥは直径なので、ＣＤがわかり、よって、直角三角形を使ってＡＣの長さも得ることができる。これが求めることであった。



6、1/2°の弧に対する弦の長さを求める。

補題

二つの弦が円内に書かれたならば、この大きい方と小さい方のこの生む比より、弦の大きい方と小さい方の生む比の方が小さい。つまり、

弧 AB：弧 BC＞弦 AB：弦 BC

証明）ABCD をえんとし、その中により短い弦 AB と、より長い弦 AC という 2 つの等しくない弦がかかれているとする。BD によって ∠ABC は二等分されていて、AEC、AD、CD を結ぶ。∠ABC は二等分されているので、弦 CD=AD であり、また、CE＞EA である。D から AEC に垂線 DZ をひく。すると、AD＞ED で、ED＞DZ より、半径 DE で、E を中心として描かれる円は AD と交わり、DZ の外側を通る。HEC をかき、DZ を F まで延長する。したがって、

扇形 DEF＞三角形 DEZ、三角形 DEA＞扇形 DEF

よって、三角形 DEZ：三角形 DEA＜扇形 DEF：扇形 DEH

しかし、三角形 DEZ：三角形 DEA＝EZ：EA

そして、扇形 DEF：扇形 DEH＝∠ZDE：∠EDA

よって、ZE：EA＜∠ZDE：∠EDA

よって、ZA：EA＜∠ZDA：∠ADE

そして、前の項を倍にすると、

CA：AE＜∠CDA：∠EDA

そこから、ある辺、角を引くと、

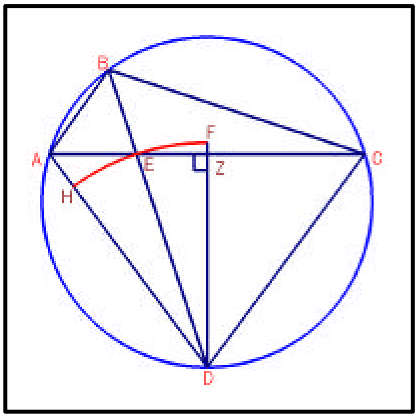
CE：EA＜角 CDA：角 EDA

ここで、BD は∠ABC の二等分線なので、

CE：EA＝CB：BA

よって、

CB：BA＜弧 CB：弧 BA



上の補題を使って、1/2°に対する弦の長さの近似値を求める。

ABC を円とし、その中に 2 つの弦 AB、AC を書き、まず AB を 3/4°に対する弦とし、AC を１°の角に対する弦としよう。すると、上の補題から、

AC：AB＜弧 AC：弧 AB であり、弧 AC＝4/3 弧 AB なので、

AC：AB＜4/3：１

よって、1°に対する弦 AB は０P47′８″と示されたので、

弦 **AB**＜１**P2′50**″。

　また、弦 AB を 1 度の角に対する弦とし、弦 AC を 3/2°に対する弦とすると、同じ理由から

弧 AC＝3/2 弧 AB

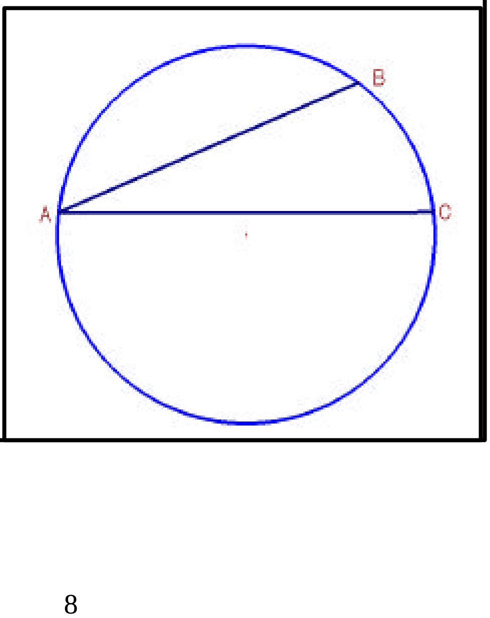
よって、AC：BA＜3/2：１

3/2°に対する弦 AC は１P34′15″と示したので、

それゆえに弦 **AB**＞**1P2′50**″

よって、**1P2′50**″＞弦 **AB**＞**1P2′50**″より、

弦 AB の近似値は **1P2′50**″である。



ワークシート 2 日目

太陽の運動を説明しよう。

太陽の年間の動きを見てみると、一様な速度でまわるのではなく、早くなったり遅くなったりし、見掛けの大きさも変わり、大きくなったり小さくなったりする。また、春分から夏至と、夏至から秋分まではそれぞれ、94 と 1/2 日、92 と 1/2 日と長さが違う。このことを地動説を使って説明してみよう。

プトレマイオスの立てたモデルはどんなものであったと思いますか？また、それによって観測結果をうまく説明することができますか？

春分から夏至の間隔は 94 と 1/2、夏至から秋分の間隔は 92 と 1/2 日ということから数値を決定しよう。

ABCD を中心 E の周りに描かれた黄道とし、点 A を春分点、B を夏至点とし、夏至点及び春分点を通って垂直に交わる二つの直径 AG と BD を引こう。離心円の中心は EA と EB の間に落ちる。このことは観測の数値から明らかである。

よって、離心円の中心を Z におき、2 円の中心を遠地点を通って直径 EZH を引く。Z を中心とし、任意の半径で太陽の離心円 TKLM を描き、Z を通って AG,BD に平行線 NXO,PRS を引く。点 T から NXO へ垂線 TJU,点 K から PRS へ垂線 KFC を引こう。円 TKLM の斉一運動において、太陽は弧 TK を 94 と 1/2 日、弧 KL を 92 と 1/2 日で通過するので、弧 TK、KL はそれぞれほぼ 93°9′、91°11′である。よって、弧 TKL は、184°20′であって、超過している弧 NT,PK の各々は 4°20′の半分であり、よって、弧 KC,TU は 4°20′である。

よって、離心円の半径を 120^{p} として、その弦 TU は $4^{p}32'$ となり、その半分 TJ すなわち EX は $2^{p}16'$ となる。また、弧 TK は 93°9′であり、弧 TN は 2°10′であるから、弧 PK は 0°59′でありその二倍である弧 KPC は 1°58′である。したがって、その弦は $2^{p}4'$ であり、その半分 KF すなわち ZX は $1^{p}2'$ である。よって、三平方の定理により EZ の長さは $2^{p}29'30''$ になる。そのため、離心円と黄道の中心との間隔は、離心円の半径のほぼ 1/24 になる。