授業資料

第３日目

3 年　組　　番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

等積図形

―古代ギリシアの数学―

授業者：福間　政也

（筑波大学大学院修士課程教育研究科 1 年）

【１日目の復習】

（ギリシア数学について）

作図とは、

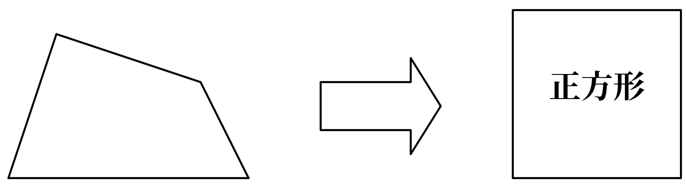
◎コンパスと定木のみを使い、これらを有限回使って作図するものとする。

注意：定木には目盛りはなく、ただ線を引く道具のみとして使用。

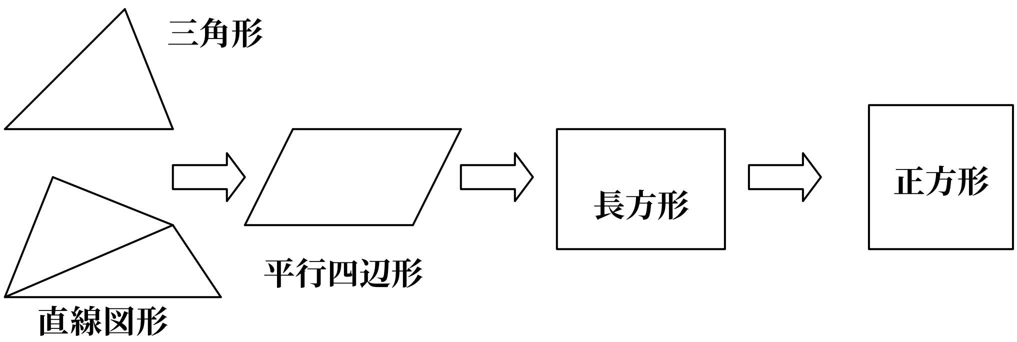
正方形に作り直す理由

　長方形では、面積が等しくても形が違う。それでは、面積の大きさを比べることができない。でも、それを正方形に作り直すと面積の大きさを比べることができる。このことにより、正方形に作り直すのである。

○どんな直線図形も面積が等しい正方形を作図することができる。



【手順】



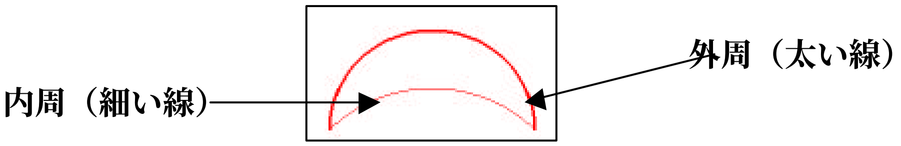
【２日目の復習】

○ヒポクラテスの月形求積法とは、

- 円積問題を解こうとする方法の一つ。
- ヒポクラテスは、円のままでは無理だと感じたので、円の一部である月形をその面積と等しい直線図形に変えて、月形を円に近づけて円をその面積と等しい直線図形にかえようとする方法のことである。

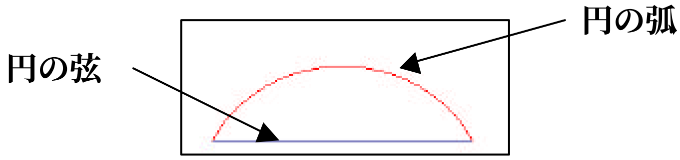
【月形求積法を考える前に！】

・月形とは、半径の違う円の一部と円の一部を組み合わせて作られる図形のこと。



◎このような図形の形をしたものを月形と呼ぶ。

・　弓形とは、円を一つの弦で切り離して作られる図形のこと。



◎このような図形の形をしたものを弓形と呼ぶ。

・扇形の相似の定義

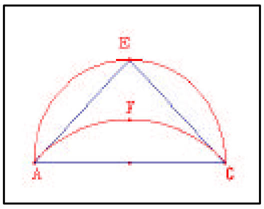
○円の中心角の等しい扇形は、相似である。

月形求積法を考えるときに重要な命題

（ユークリッド原論第１２巻命題２）
・円の比はそれらの直径の平方の比に等しい。　・・・・・・（＊）

・相似な円の弓形の比はそれらの底辺の平方の比に等しい。　・・・（＊＊）

○【第一の求積法】では、外周が半円の求積法を考えた。
ここでは、
（月形ＡＥＣＦ）＝（三角形ＡＦＣ）

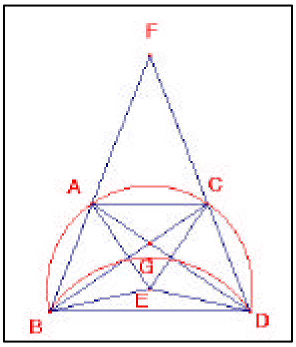


外周が半円の場合の月形とその面積の等しい直線図形が作れた。

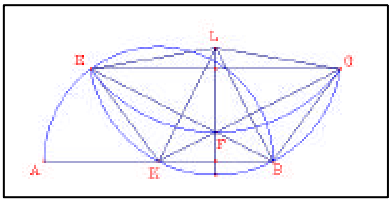
○【第 2 の求積法】、【第 3 の求積法】では、外周が半円より大きい場合と小さい場合を考えた。

【第 2 の求積法】では、
（月形ＢＡＣＤG）＝（台形ＡＢＤＣ）

【第 3 の求積法】では、
（月形ＥＫＢＧＦ）＝
（三角形ＢＦＧ、ＢＦＫ、ＫＦＥの和）

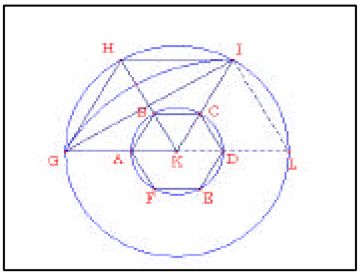


外周が半円より大きい場合と小さい場合の月形とその面積に等しい直線図形が作れた。



これらの 3 つの求積法で、ヒポクラテスは、「すべての月形が直線図形に平方化（面積が等しい正方形に作図できる。）した」と言っている。
はたして、本当にすべての月形が平方化できるのだろうか？

○【第 4 の求積法】では、月形と円の面積の和について考えた。
ここでは、
（月形ＧＨＩ）＋（内円）
＝（三角形ＧＨＩ）＋（六角形ＡＢＣＤＥＦ）



２日目はヒポクラテスの４つの月形求積法を考えた。

では、この月形求積法で、円積問題は解けるだろうか？それとも解けないだろうか？できると思うならその解法を、できないと思うならその理由を考えてみよう。

１日目と２日目にやったことを参考にしながら考えよう！

MEMO

次は、レオナルド・ダ・ヴィンチの数学に触れてみよう。

レオナルド・ダ・ヴィンチ〔1451〜1519〕

【人物紹介】

偉大な画家であり、建築家でもあるレオナルド・ダ・ヴィンチは、その晩年の 15 年間の多くの時間を幾何学の研究に費やした。彼は、ユークリッドやアルキメデスをざっと 8 年間研究した後に、彼自身の数学を導き出している。

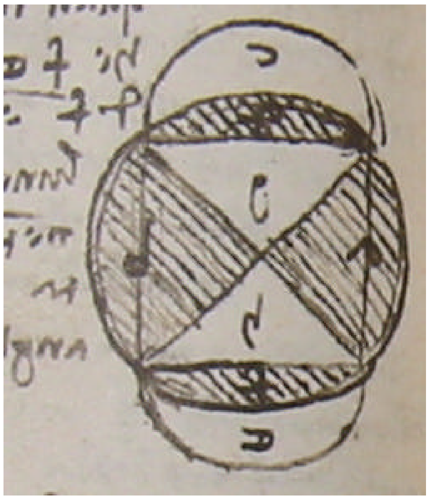
ちなみに、有名な絵画である「モナリザ」は、１５０４〜１５０５年の間にかかれたものである。

レオナルド・ダ・ヴィンチの幾何学 数学や幾何学に関する、レオナルドの教養の他の主たる源泉は、ユークリッドの『原論』であった。手稿は、１０年間の研究と熟考の後を示し、すべてユークリッドの幾何学で文字通りおおわれている。 マドリッド手稿Ⅱの一部と、ないしは、アトランティコ手稿の数百枚の紙葉とは、曲線図形を、同数の直線図形の面積に移す問題の研究によって埋められている。第一は、３本の曲線でできている三角形か、あるいは１本あるいは２本の曲線からできているいわゆる〈鎌状〉がそれである。それらは、円の部分であり、あるいは、円の内部にかかれた多角形の辺と円周との間に作られる〈部分〉である。数度にわたって、彼はその研究の結論を、ひとつあるいはそれ以上の論文にまとめようとする意図を見せている。その論文を彼は、『等量学』『等面積論』または『幾何図形による遊戯』と名づけている。その成果は、厳密な科学的な視点から考えると、意味はない。が、レオナルドが無意味な仕事に没頭したと考えることはできない。おそらく何か考えがあったのだろう。

手稿とは、レオナルドが残した研究の成果を書いたもの。

【レオナルド・ダ・ヴィンチの手稿】

G 手稿の一部



拡大図

これは、パリ手稿の一部である。この文字は、レオナルド・ダ・ヴィンチ独特の文字で、鏡文字に似ているといわれている。要するに、この文字を鏡に写す正しく読めるようになっていると言うことである。

なぜ、このような鏡文字をレオナルド・ダ・ヴィンチが書いたのかは、色々な説がある。例えば、レオナルド・ダ・ヴィンチが左利きだったから袖が汚れないようにするため等である。しかし、本当のところは分かっていない。

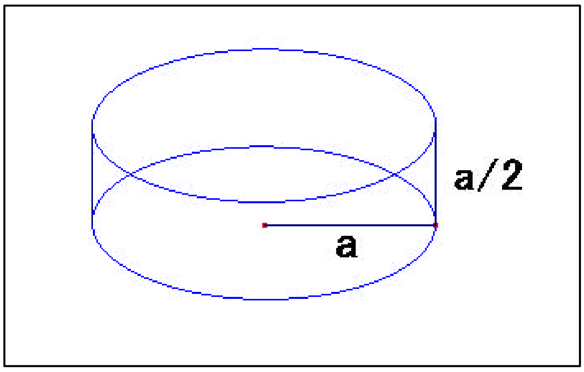
レオナルド・ダ・ヴィンチは、円積問題を解くのに一番簡単な方法を示した。それを一緒に考えてみよう！

〈レオナルド・ダ・ヴィンチが考えた方法〉
彼が使ったものはこれだ！

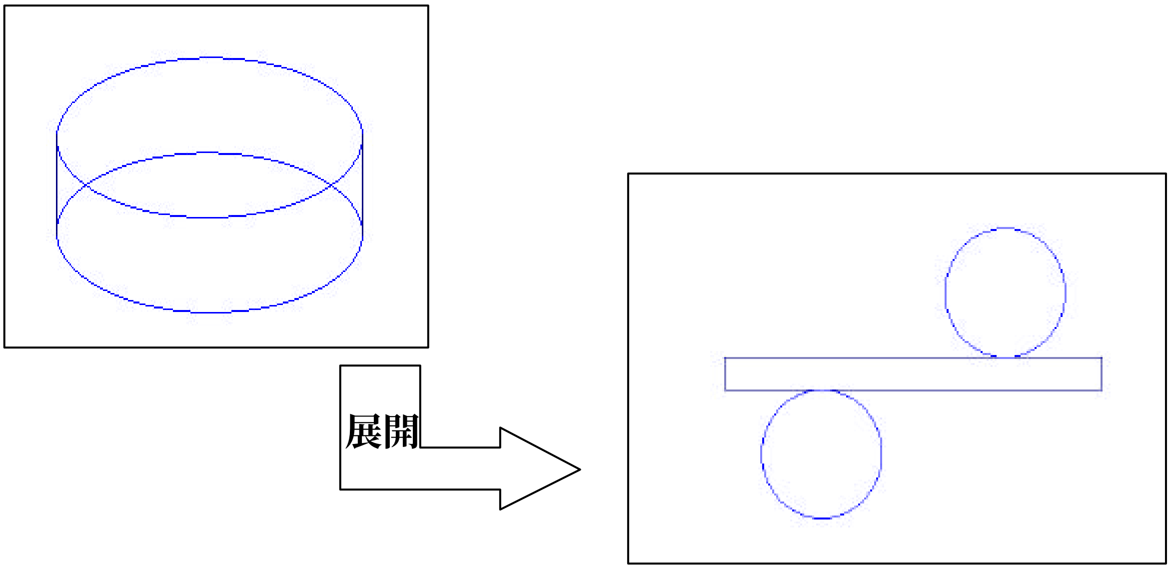
では、この円柱をどのように使ったのだろうか？

【円柱を使った方法】

円柱の底面の半径を a とおき、その高さを $\frac{a}{2}$ とおく。



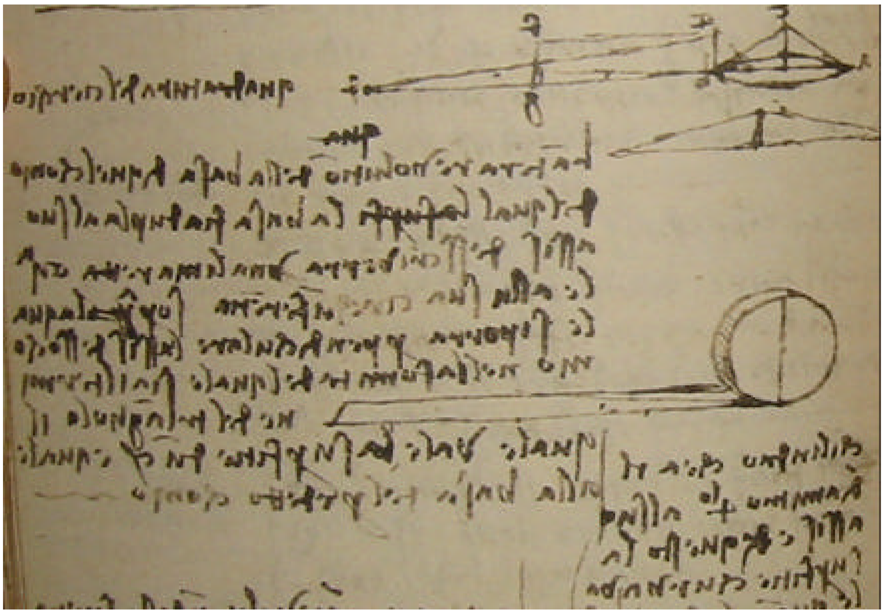
円柱を展開してみると次のようになる。



○ 円柱の高さを底面の円の半径の半分にすると、底面積と側面積にはどのような関係があるだろう？

MEMO

【原典（G 手稿５９Verso)】



【日本語

〔円錐の断面図：〕

円の求積

底面（直径）が軸（高さ）の２倍ある円錐の底を完全に回転させることによって、その円周に等しい直線がかかれる。その直線上に円錐の軸を垂直において、その頂点を三角形の縁とすると、その三角形は前述の円錐の低と等しい円の表面積になる。――

〔円柱とその側面の展開図：〕

軸の４倍の直径を持つ円柱。この円柱の曲線の表面は、その底面と等積である。

〔４つの同心円と直交する直径の図：〕

球体の直線運動での完全な回転によって、その最大円の円柱がかかれる。それを別の同じ線で直交するように切断すると・・・・・・・。

しかし、この方法は、ギリシア人
の要求に答えていない。

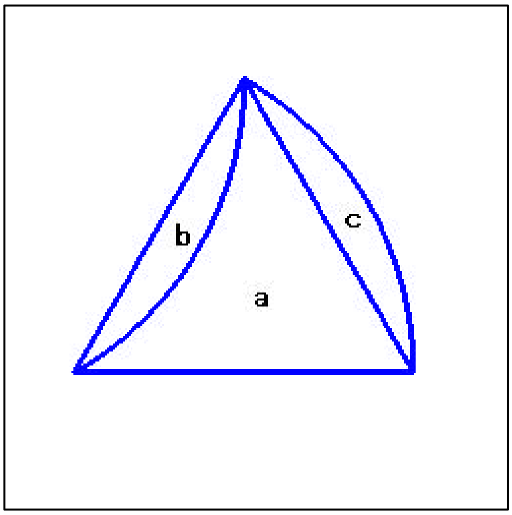
なぜ？

○自分の考えを下に書いてみよう。

<u>MEMO</u>

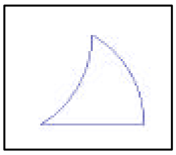
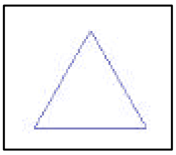
（紹介）

【レオナルド・ダ・ヴィンチの等積図形】



この図形において、ｂをのぞいた図形は鎌形と呼ばれている。

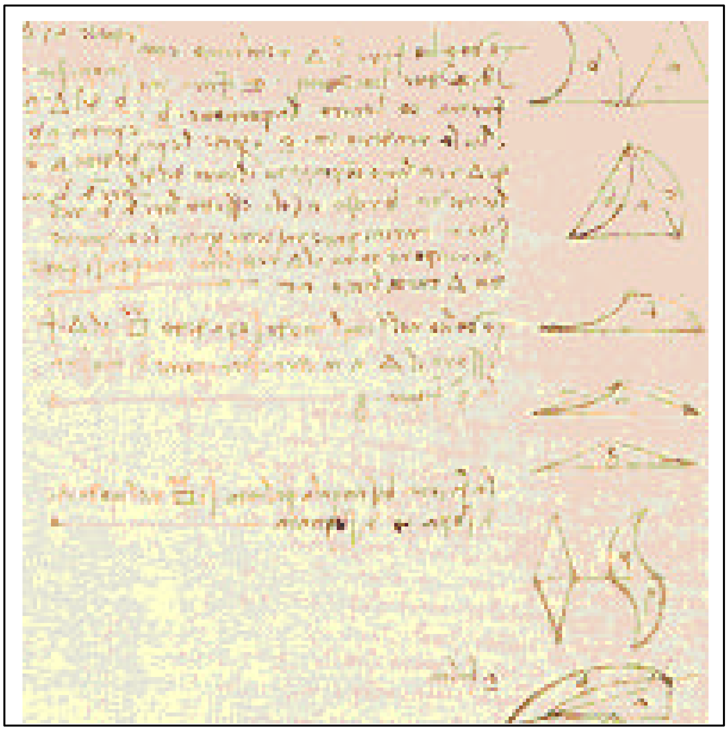
この図形の中に等しい面積の図形が 2 つある。

それは、とである。

なぜそうなるか右のページを見て考えてみよう。

　この他にも、レオナルド・ダ・ヴィンチはたくさんの等積図形を考えている。
参考として、資料①がある。
　資料①には、約１００個の図形があります。
ここには、ある規則がある。時間があったら考えてみよう！

【マドリッド手稿　１１１VERSO】



日本語訳

二彎曲辺を持つ三角形と等しい直線三角形を作りたい。
そこで、こんなふうに形作ろう。
三角形 ab から部分 b を除き、それを c に戻す。
ところで、a と b とで直線三角形の
全体ができ、b を除けば a だけが残るのだから、
もし c の位置に b を戻せば、直線三角形を構成していた
2 部分をお互いに合わせることになる。しかし、
これらはいまや曲線三角形 ac に変形されたことになる。

上記と同じ方法でもって、三角形 f を方形にしたい。それは
三角形 nm、すなわち、第 3 図 g に示された如くになる。

角が対をなす鎌形図形は、上に図示されている方法で持って方形にされよう。