授業資料

第１日目

3 年　組　　番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

等積図形

―古代ギリシアの数学―


ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛ. ΙΕ.
ΕΚ ΤΩΝ ΘΕΩΝΟΣ ΣΥΝ-
ΟΥΣΙΩΝ.
Εἰς τοῦ αὐτοῦ τὸ πρῶτον, ἐξηγημάτων Πρόκλου βιβλ. δ.
Adiecta præfatiuncula in qua de disciplinis
Mathematicis nonnihil.

BASILEAE APVD IOAN. HERVAGIVM ANNO
M. D. XXXIII. MENSE SEPTEMBRI.

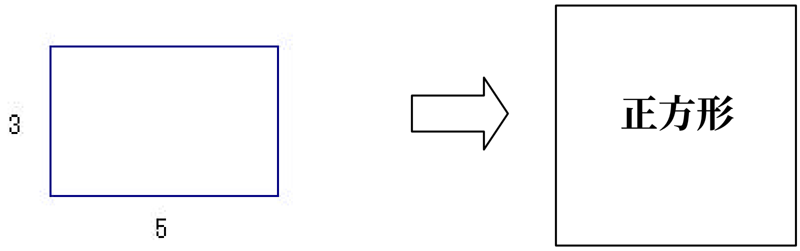
授業者：福間　政也

（筑波大学大学院修士課程教育研究科１年）

【問題】

下の左図は、横の長さが 5、縦の長さが３の長方形です。この長方形の面積と同じ正方形を作ってみよう。

いろいろな考えを出してみよう！



【自分の考え】

MEMO

長方形の面積と等しい正方形を作図するときギリシア人は次のようにやった。

君も<u>ギリシア人</u>になりきって<u>コンパス</u>と<u>定木</u>を使ってＴＲＹ！

【作図方法】

① ＤＡの延長線上にＤＥと等しい長さＤＣをとる。
② ＡＣを直径とする円をかく。その中心をＯとする。
③ ＤＥの延長線と円周の交点をＢとする。
④ ＢＤを一辺とする正方形をかく。
⑤ すると、（四角形ＡＤＥＦ）＝（ＢＤを一辺とする正方形）
⑥ 証明のための補助線ＡＢとＢＣを引く。

◎ 上の作図方法の順を追ってワークシート①に作図してみよう！

◎長方形 ABCD と正方形の面積が等しいことを証明してみましょう！

【証明】

⊿ＡＢＣ∽⊿ＢＣＤの証明

⊿ＡＢＣ∽⊿ＢＣＤより

ＡＤ：$\boxed{}$ ＝ $\boxed{}$ ： $\boxed{}$

よって　ＢＤ^2＝ $\boxed{}$ × $\boxed{}$

ところで、　ＣＤ＝ $\boxed{}$

したがって、

ＢＤ^2＝ $\boxed{}$ × $\boxed{}$

＝長方形ＡＤＥＦ　　　（証明終）

その使い方は次のとおり！

【コンパスの使い方】

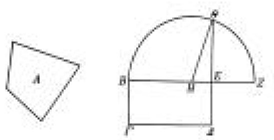
① 輪に鉛筆もしくは、シャーペンを差し込みます。
② 次に鉛筆もしくは、シャーペンの先を書こうとする始点に合わせます。
③ そして、支点であるところを指で押さえ、そして、糸がピンと張るように鉛筆もしくは、シャーペンに力を入れて作図します。

【参考】

14

与えられた直線図形に等しい正方形をつくること。

与えられた直線図形を A とせよ。このとき直線図形 A に等しい正方形をつくらねばならぬ。



直線図形 A に等しい直角平行四辺形 $B\Delta$ がつくられたとせよ。そうすればもし BE が $E\Delta$ に等しければ、命じられたことはなされたことになるであろう。なぜなら正方形 $B\Delta$ が直線図形 A に等しくつくられたから。もし等しくなければ、BE, $E\Delta$ の一方が大きい。BE が大きいとし、BE が Z まで延長され、EZ が $E\Delta$ に等しくされ、BZ が H で2等分され、H を中心とし、HB, HZ の一を半径として半円 $B\Theta Z$ が描かれ、ΔE が Θ まで延長され、$H\Theta$ が結ばれたとせよ。

そうすれば線分 BZ は H において等しい部分に、E において不等な部分に分けられたから、BE, EZ にかこまれた矩形と EH 上の正方形との和は HZ 上の正方形に等しい。そして HZ は $H\Theta$ に等しい。それゆえ矩形 BE, EZ と HE 上の正方形との和は $H\Theta$ 上の正方形に等しい。ところが ΘE, EH 上の正方形の和は $H\Theta$ 上の正方形に等しい。ゆえに矩形 BE, EZ と HE 上の正方形との和は ΘE, EH 上の正方形の和に等しい。双方から HE 上の正方形がひかれたとせよ。そうすれば残りの BE, EZ にかこまれた矩形は $E\Theta$ 上の正方形に等しい。ところが EZ は $E\Delta$ に等しいから、矩形 BE, EZ は $B\Delta$ である。それゆえ平行四辺形 $B\Delta$ は ΘE 上の正方形に等しい。そして $B\Delta$ は直線図形 A に等しい。ゆえに直線図形 A も $E\Theta$ 上に描かれた正方形に等しい。

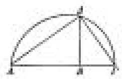
よって与えられた直線図形 A に等しい正方形、すなわち $E\Theta$ 上に描かれうる正方形がつくられた。これが作図すべきものであった*)。

ユークリッド原論第 2 巻命題 14

13

与えられた2線分の比例中項を見いだすこと。

与えられた2線分を AB, $B\Gamma$ とせよ。このとき AB, $B\Gamma$ の比例中項を見いださねばならぬ。



それらが一直線をなすようにおかれ、$A\Gamma$ 上に半円 $A\Delta\Gamma$ が描かれ、点 B から線分 $A\Gamma$ に直角に $B\Delta$ がひかれ、$A\Delta$, $\Delta\Gamma$ が結ばれたとせよ。

角 $A\Delta\Gamma$ は半円内の角であるから、直角である。そして直角三角形 $A\Delta\Gamma$ において直角から底辺に垂線 ΔB が下されたから、ΔB は底辺の2部分 AB, $B\Gamma$ の比例中項である。

よって与えられた2線分 AB, $B\Gamma$ の比例中項 ΔB が見いだされた。これが作図すべきものであった。

ユークリッド原論第６巻命題１３

ギリシア数学では、

作図と証明

古代ギリシアの数学では、作図によって組み立てられる図形のみが、存在するもの（現在に手元にあるもの）としてみなされていた。また、作図をすることによって、証明を示している。

では、ギリシア時代における作図とは、どういうものだったのだろう？

ユークリッドって誰？

【人物紹介】

ユークリッド（ギリシア名はエウクレイデス。ユークリッドは英語名）の生涯について知られているのは、彼がムセイオン－それは真の大学であって、同時に高等教育施設－の最初の教師の一人で、最高の教師の 1 人だったことだけ。

ユークリッド原論を編集した人である。

ユークリッド原論とは、

紀元前 4 世紀ごろ、ユークリッドという人が、それ以前の数学研究や成果をたくみに統合し、体系化した本です。かつてかかれた数学書の中でもっとも大きい影響力を持ったものである。しかも、本来これが編集されたのは学生のための教科書として用いられた。

作図とは

◎コンパスと定木のみを使い、これらを有限回使って作図するものとする。

あれ、定木の漢字が違うぞ！

◎ここで、注目！
　みなさんが持っている定規とここでの定木はちょっと違いがあります。それは、この定木には目盛りはなくただ<u>線を引くもの</u>として用いられていました。

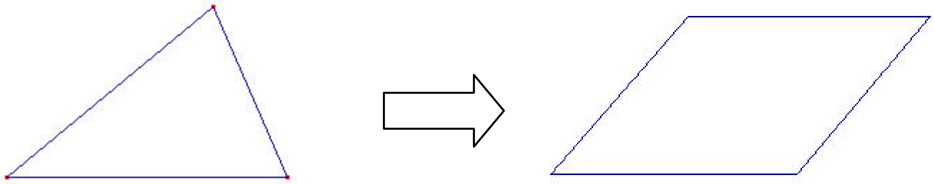
では､もう一度３ページとワークシート①に振り返ってみよう！
定木には目盛りがついていないので長さをはかることができなかった。
でも、ギリシア人の方法では、長さをはからずに長方形の面積と等しい正方形をかく事ができます。このことを確認しておいてください。

では、三角形の面積と等しい正方形は作図することができるだろうか？

その答えは、ユークリッド原論の中にあります。
作図の仕方を見ながら考えてみましょう。

第１巻命題４４

与えられた線分上に与えられた三角形に等しい平行四辺形を与えられた直線角に等しい角の中につくること



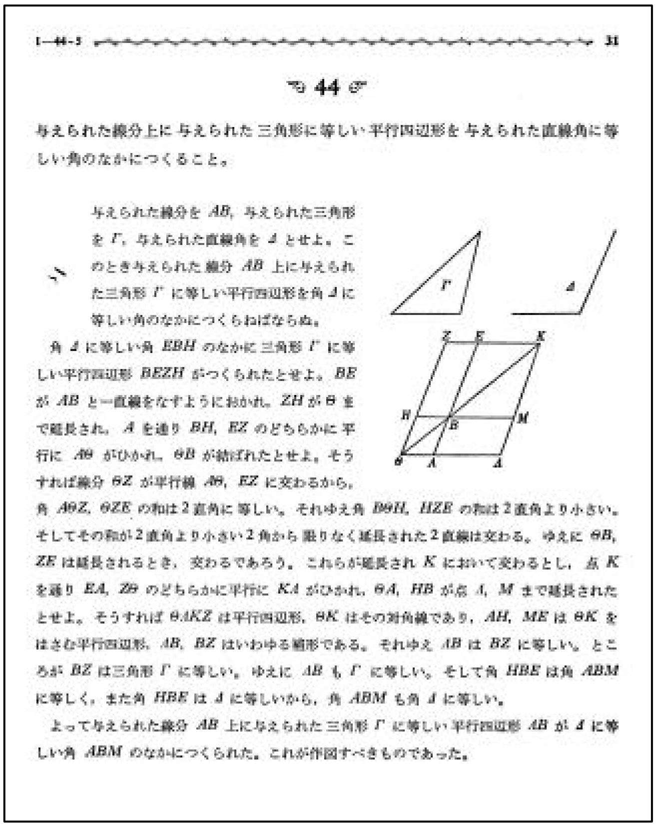
三角形　　　　　　平行四辺形

問題

ワークシート②を見てみよう！

作図の仕方は、前を見よ！

【参考】



1—44-5 31

44

与えられた線分上に与えられた三角形に等しい平行四辺形を与えられた直線角に等しい角のなかにつくること。

与えられた線分を AB, 与えられた三角形を Γ, 与えられた直線角を Δ とせよ。このとき与えられた線分 AB 上に与えられた三角形 Γ に等しい平行四辺形を角 Δ に等しい角のなかにつくらねばならぬ。

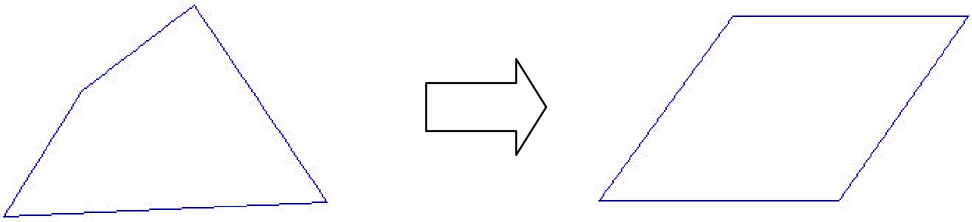
角 Δ に等しい角 EBH のなかに三角形 Γ に等しい平行四辺形 $BEZH$ がつくられたとせよ。BE が AB と一直線をなすようにおかれ，ZH が Θ まで延長され，A を通り BH, EZ のどちらかに平行に $A\Theta$ がひかれ，ΘB が結ばれたとせよ。そうすれば線分 ΘZ が平行線 $A\Theta$, EZ に交わるから，角 $A\Theta Z$, ΘZE の和は2直角に等しい。それゆえ角 $B\Theta H$, HZE の和は2直角より小さい。そしてその和が2直角より小さい2角から限りなく延長された2直線は交わる。ゆえに ΘB, ZE は延長されるとき，交わるであろう。これらが延長され K において交わるとし，点 K を通り EA, $Z\Theta$ のどちらかに平行に $K\Lambda$ がひかれ，ΘA, HB が点 Λ, M まで延長されたとせよ。そうすれば $\Theta\Lambda KZ$ は平行四辺形，ΘK はその対角線であり，AH, ME は ΘK をはさむ平行四辺形，ΛB, BZ はいわゆる補形である。それゆえ ΛB は BZ に等しい。ところが BZ は三角形 Γ に等しい。ゆえに ΛB も Γ に等しい。そして角 HBE は角 ABM に等しく，また角 HBE は Δ に等しいから，角 ABM も角 Δ に等しい。

よって与えられた線分 AB 上に与えられた三角形 Γ に等しい平行四辺形 ΛB が Δ に等しい角 ABM のなかにつくられた。これが作図すべきものであった。

ユークリッド原論第 1 巻命題 44

では、四角形や五角形などの多角形である直線図形はどうだろう？

第１巻命題４５
与えられた直線角の中に与えられた直線図形に等しい平行四辺形をつくること。



直線図形 **平行四辺形**

長方形も平行四辺形の一つなので、ワークシート②において直線図形の面積と等しい長方形を作図してみよう！

【参考】

45

与えられた直線角のなかに与えられた直線図形に等しい平行四辺形をつくること。

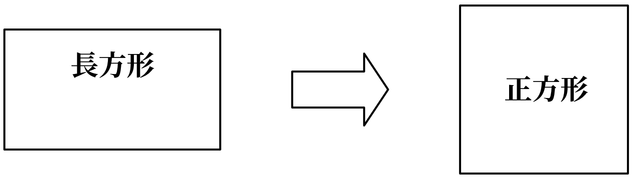
与えられた直線図形を ΑΒΓΔ，与えられた直線角を Ε とせよ。このとき与えられた角 Ε のなかに直線図形 ΑΒΓΔ に等しい平行四辺形をつくらねばならぬ。

ΔΒ が結ばれ，三角形 ΑΒΔ に等しい平行四辺形 ΖΘ が Ε に等しい角 ΘΚΖ のなかにつくられたとせよ。そして線分 ΗΘ 上に三角形 ΔΒΓ に等しい平行四辺形 ΗΜ が，Ε に等しい角 ΗΘΜ のなかにつくられたとせよ。そうすれば角 Ε は角 ΘΚΖ，ΗΘΜ の双方に等しいから，角 ΘΚΖ も ΗΘΜ に等しい。ΚΘΗ が双方に加えられたとせよ。そうすれば角 ΖΚΘ，ΚΘΗ の和は角 ΚΘΗ，ΗΘΜ の和に等しい。ところが角 ΖΚΘ，ΚΘΗ の和は2直角に等しい。ゆえに ΚΘΗ，ΗΘΜ の和も2直角に等しい。かくて任意の線分 ΗΘ に対しその上の点 Θ において同じ側にない2線分 ΚΘ，ΘΜ が接角の和を2直角に等しくする。ゆえに ΚΘ は ΘΜ と一直線をなす。そして線分 ΘΗ が平行線 ΚΜ，ΖΗ に交わるから，錯角 ΜΘΗ，ΘΗΖ は互いに等しい。双方に角 ΘΗΛ が加えられたとせよ。そうすれば角 ΜΘΗ，ΘΗΛ の和は角 ΘΗΖ，ΘΗΛ の和に等しい。ところが角 ΜΘΗ，ΘΗΛ の和は2直角に等しい。ゆえに ΘΗΖ，ΘΗΛ の和も2直角に等しい。したがって ΖΗ は ΗΛ と一直線をなす。そして ΖΚ は ΘΗ に等しくかつ平行であり，他方 ΘΗ も ΜΛ に等しくかつ平行であるから，ΚΖ も ΜΛ に等しくかつ平行である。そして線分 ΚΜ，ΖΛ がそれらを結ぶ。それゆえ ΚΜ，ΖΛ もまた等しくかつ平行である。ゆえに ΚΖΛΜ は平行四辺形である。そして三角形 ΑΒΔ は平行四辺形 ΖΘ に，ΔΒΓ は ΗΜ に等しいから，直線図形 ΑΒΓΔ 全体は平行四辺形 ΚΖΛΜ 全体に等しい。

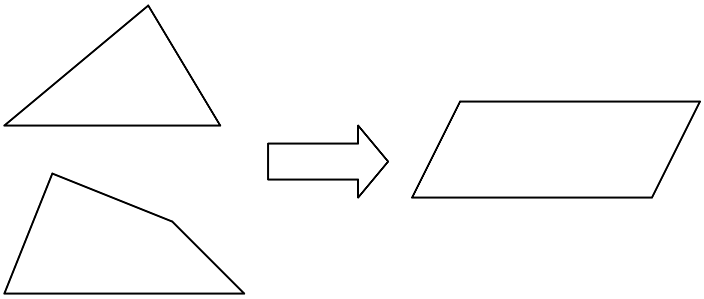
よって与えられた直線図形 ΑΒΓΔ に等しい平行四辺形 ΚΖΛΜ が与えられた角 Ε に等しい角 ΖΚΜ のなかにつくられた。これが作図すべきものであった。

ユークリッド原論第１巻命題４５

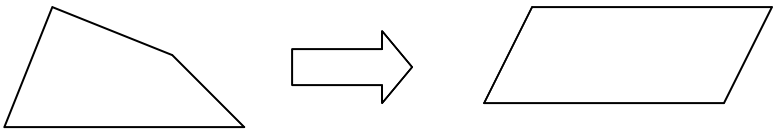
はじめに、長方形の面積と等しい正方形が作れた。



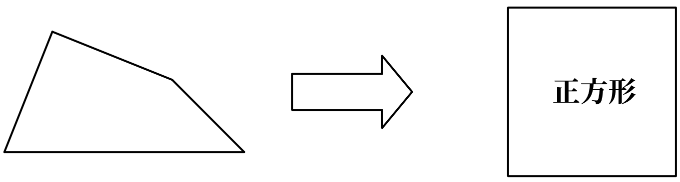
　次に、三角形の面積と等しい平行四辺形が作れ、また、直線図形の面積と等しい平行四辺形が作れた。



　長方形も平行四辺形の一つなのでよって、どんな直線図形も面積が等しい長方形を作ることができる。



　これよりはじめにかえるとどんな直線図形も面積が等しい正方形を作ることができる。



　今、直線図形と同じ面積を持つ正方形を作ることができました。

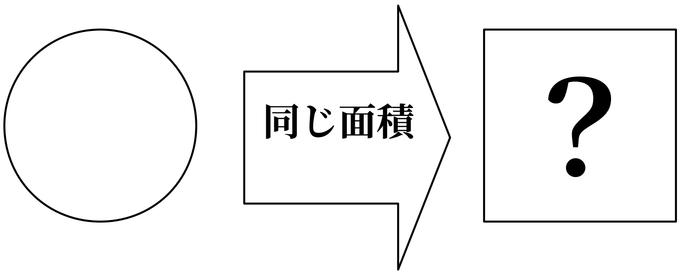
次は、円と同じ面積を持つ正方形はどうすればできるだろうか。

円積問題とは、

　ギリシア数学の三大難問の一つである円積問題は、
「与えられた円とちょうど等しい面積を持つ正方形を作図せよ。」
（コンパスと定木のみを使って）
というものである。

（参考）ギリシア数学の三大難問とは、

・ 倍積問題
　（与えられた立方体とちょうど２倍の体積をもつ立方体を作れ。）
・ 角の三等分
　（与えられた角を三等分せよ。）
・ 円積問題



次の時間の予告

「円積問題ってどうやって解いたの？」という疑問を解決するために、ギリシア時代のヒポクラテスという人が月形求積法を使って円積問題を解こうとした。この方法で果たして、円積問題は解けたのだろうかということを考えていきたいと思う。

　みなさんも円積問題を一緒に解いていきましょう。

古代ギリシアの数学って何？どんな数学だろう？

MEMO