授業資料

２年２組　　番氏名

LA
GEOMETRIE.
LIVRE SECOND.

De la nature des lignes courbes.

Les anciens ont fort bien remarqué, qu'entre les Probleſmes de Geometrie, les vns ſont plans, les autres ſolides, & les autres lineaires, c'eſt a dire, que les vns peuuent eſtre conſtruits, en ne traçant que des lignes droites, & des cercles; au lieu que les autres ne le peuuent eſtre, qu'on n'y employe pour le moins quelque ſection conique; ni enfin les autres, qu'on n'y employe quelque autre ligne plus compoſée. Mais ie m'eſtonne de ce qu'ils n'ont point outre cela diſtingué diuers degrés entre ces lignes plus compoſées, & ie ne ſçaurois comprendre pourquoy ils les ont nommées mechaniques, plutoſt que Geometriques. Car de dire que ç'ait eſté, a cauſe qu'il eſt beſoin de ſe ſeruir de quelque machine pour les deſcrire, il faudroit reietter par meſme raiſon les cercles & les lignes droites; vû qu'on ne les deſcrit ſur le papier qu'auec vn compas, & vne reigle, qu'on peut auſſy nommer des machines. Ce n'eſt pas non plus, a cauſe que les inſtrumens, qui ſeruent a les tracer, eſtant plus compoſés que la reigle & le compas, ne peuuent eſtre ſi iuſtes; car il faudroit pour cete raiſon les reietter des Mechaniques, où la iuſteſſe des ouurages qui ſortent de la main eſt deſirée; plutoſt que de la Geometrie, ou c'eſt ſeulement la iuſteſſe du raiſonnemēt qu'on recherche,

Quelles ſont les lignes courbes qu'on peut receuoir en Geometrie.

Rr 2

授業者：筑波大学大学院教育研究科１年
井野口　浩

§２　デカルトの接線法

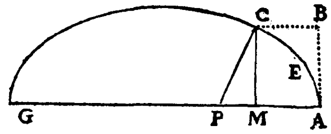
デカルトの接線法を使って曲線のある点を通る接線を見つけよう。

〔出典〕

『LA　GEOMETRIE　RENÇ　DESCARTES』

Soit C E la ligne courbe, & qu'il faille tirer vne ligne droite par le point C, qui face auec elle des angles droits. Ie suppose la chose desia faite, & que la ligne cherchée est C P, laquelle ie prolonge iusques au point P, ou elle rencontre la ligne droite G A, que ie suppose estre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne C E : en sorte que faisant M A ou C B $\propto y$, & C M, ou B A $\propto x$, iay quelque equation, qui explique le rapport, qui est entre x & y. Puis ie fais P C $\propto s$, & P A $\propto v$, ou P M $\propto v - y$, & a cause du triangle rectangle P M C iay ss, qui est le quarré de la baze esgal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui sont les quarrés des deux costés. c'est a dire iay $x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, oubien $y \propto v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cete equation, i'oste de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'vne des deux quantités indeterminées x ou y. ce qui est aysé a faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d'x, & le quarré de cete somme au lieu d'xx, & son cube au lieu d'x^3, & ainsi des autres, si c'est x que ie veuille oster ; oubien si c'est y, en mettant en son lieu $v + \sqrt{ss - xx}$, & le quarré, ou le cube, &c. de cete somme, au lieu d'yy, ou y^3 &c. De façon qu'il reste tousiours aprés cela vne equation, en laquelle il ny a plus qu'vne seule quantité indeterminée, x, ou y.

Comme si C E est vne Ellipse, & que M A soit le segment de son diametre, auquel C M soit appliquée par ordre, & qui ait r pour son costé droit, & q pour le trauersant, on à par le 13 th. du 1 liu. d'Apollonius. $xx \propto ry - \frac{r}{q}yy$, d'on ostant xx, il reste $ss - vv + 2vy - yy \propto ry - \frac{r}{q}yy$. oubien,

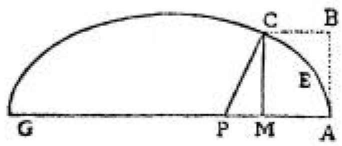


$yy \frac{+ qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ esgal a rien. car il est mieux en cet endroit de considerer ainsi ensemble toute la somme, que d'en faire vne partie esgale a l'autre.

【日本語訳】

[与えられた曲線，またはその接線を直角に切る直線を見いだす一般的方法]

曲線 CE [第 11 図(*)] があり，点Cを通って，これと直角をなす直線をひかねばならないとせよ．問題がすでに解かれたと仮定し，求める線を CP とする．これを延長して点Pで線GA と交わらせ，線 CE のすべての点を GA の点に関係づけることにする．そこで，MA または CB ∞y, CM または BA∞x とし，x と y の間の関係を説明する何らかの方程式を得る．次に，PC∞s, PA∞v, つまり PM$\infty v-y$ とすれば，PMC は直角三角形であるから，底辺の平方 ss は 2 辺の平方である $xx+vv-2vy+yy$ に等しくなる．すなわち，



[第 11 図]

$$x\infty\sqrt{ss-vv+2vy-yy},\quad \text{あるいは}\quad y\infty v+\sqrt{ss-xx}$$

であり，この方程式を用いて，曲線CE のすべての線が直線GA の点にたいしてもつ関係を説明している他の方程式から，ふたつの未定量 x, y の一方を除く．これは容易であって，もしxを除こうとするのであれば，至るところで x のかわりに $\sqrt{ss-vv+2vy-yy}$ をおき，xx のかわりにこの量の平方をおき，x^3 のかわりにその立方をおき，以下同様にすればよく，もし y を除こうとするのであれば，そのかわりに $v+\sqrt{ss-xx}$ をおき，yy, y^3 などのかわりにこの量の平方，立方などをおけばよい．このようにすれば，残る方程式にはもはや 1 個の未定量，x または y しかないわけである．

たとえば，CE が楕円で，MA がその直径の部分であり，CM がそれに規則正しく立てられており，r がその通径，q が横径であるならば，アポロニウス第 1 巻の定理 13[43] によって，

$$xx\infty ry-\frac{r}{q}yy$$

を得，そこから xx を除けば，

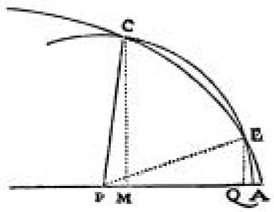
$$ss-vv+2vy-yy\infty ry-\frac{r}{q}yy,$$

あるいは $yy+\dfrac{qry-2qvy+qvv-qss}{q-r}$ がゼロに等しい．

実際，いまの場合は，計の一部を他の部分に等しいとおくより，計全体をこのように一括して考える方がまさっているのである．

(デカルト著作集　第 1 巻『デカルトの幾何学』より抜粋)

Or aprés qu'on à trouué vne telle equation , au lieu de s'en feruir pour connoiftre les quantités x, ou y, ou z, qui font defia données, puifque le point C eft donné, on la doit employer a trouuer v, ou s, qui determinent le point P, qui eft demandé. Et a cet effect il faut confiderer, que fi ce point P eft tel qu'on le defire, le cercle dont il fera le centre, & qui paffera par le point C, y touchera la ligne courbe C E, fans la coupper: mais que fi ce point P, eft tant foit peu plus proche, ou plus efloigné du point A, qu'il ne doit, ce cercle couppera la courbe, non feulement au point C, mais auffy neceffairement en quelque autre. Puis il faut auffy confiderer, que lorfque ce cercle couppe la ligne courbe C E, l'equation par laquelle on cherche la quantité x, ou y, ou quelque autre femblable, en fuppofant P A & P C eftre connuës, contient neceffairement deux racines, qui font inefgales. Car par exemple fi ce cercle couppe la courbe aux poins C & E, ayant tiré E Q parallele a C M, les noms des quantités indeterminées x & y, conuiendront auffy bien aux lignes E Q, & Q A, qu'a C M, & M A; puis P E eft efgale a P C, a caufe du cercle, fi bien que cherchant les lignes



E Q & Q A, par P E & P A qu'on fuppofe comme données, on aura la mefme equation, que fi on cherchoit C M & M A par P C, P A. d'où il fuit euidemment, que la valeur d'x, ou d'y, ou de telle autre quantité qu'on aura fuppofee, fera double en cete equation, c'eft a dire qu'il y aura deux racines inefgales entre elles; & dont l'vne fera CM, l'autre EQ, fi c'eft x qu'on cherche; oubien l'vne fera M A, & l'autre Q A, fi c'eft y. & ainfi des autres. Il eft vray que fi le point E ne fe trouue pas du mefme cofté de la courbe que le point C, il n'y aura que l'vne de ces deux racines qui foit vraye, & l'autre fera renuerfée, ou moindre que rien: mais plus ces deux poins, C, & E, font proches l'vn de l'autre, moins il y a de difference entre ces deux racines;

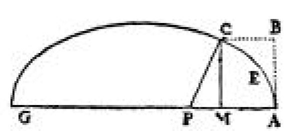
nes;

nes; & enfin elles font entierement efgales, s'ils font tous deux ioins en vn; c'eft a dire fi le cercle, qui paffe par C, y touche la courbe C E fans la coupper.

De plus il faut confiderer, que lorfqu'il y a deux racines efgales en vne equation, elle a neceffairement la mefme forme, que fi on multiplie par foy mefme la quantité qu'on y fuppofe eftre inconnuë moins la quantité connue qui luy eft efgale, & qu'aprés cela fi cete derniere fomme n'a pas tant de dimenfions que la precedente, on la multiplie par vne autre fomme qui en ait autant qu'il luy en manque; affin qu'il puiffe y auoir feparement equation entre chafcun des termes de l'vne, & chafcun des termes de l'autre.

Comme par exemple ie dis que la premiere equation trouuée cy deffus, a fçauoir

$yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q-r}$ doit auoir la mefme forme que celle qui fe produift en faifant e efgal a y, & multipliant $y - e$ par foy mefme, d'où il vient $yy - 2ey + ee$, en forte qu'on peut comparer feparement chafcun de leurs termes, & dire que puifque le premier qui eft yy eft tout le mefme én l'vne qu'en l'autre, le fecond qui eft en l'vne $\frac{qry - 2qvy}{q-r}$, eft efgal au fecõd de l'autre qui eft $-2ey$, d'où cherchant la quantité v qui eft la ligne P A, on à

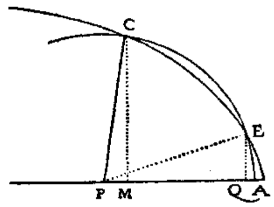


$v \propto e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$, oubiẽ a caufe que nous auons fuppofé e efgal a y, on a $v \propto y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$. Et

Xx 2 ainfi

ainfi on pourroit trouuer s par le troifiefme terme $ee \propto \frac{qvv - qss}{q-r}$. mais pourceque la quantité v determine affés le point P, qui eft le feul que nous cherchions, on n'a pas befoin de paffer outre.

ところで，このような方程式が見いだされたうえは，量 x, y, または z を知るためにこれを使うのではなく——点Cは与えられているのであるから，これらの量はすでに与えられている——求める点Pを定める v または s を見いだすために用いるべきである．このためには，次のことを考えねばならない．もしこの点が求めるとおりのものであれば，Pを中心とし点Cを通る円はそこでCEを切ることなく，これに接するであろう．しかし，この点Pが点Aに少しでも近すぎるか遠すぎるならば，この円は，単に点Cにおいてばかりでなく，必ず他の点においても曲線を切るであろう．さらに，次のことも考えねばならない．この円が曲線CE〔第 14 図〕を切るとき，PA, PCを既知と仮定して量 x, y またはこれに類するものを求めるのに使う方程式は，必ず相等しくない2根を含む．なぜならば，たとえば，もしこの円が曲線を点CとEにおいて切るとすれば，CMに平行にEQをひくとき，未定量の名 x, y は線CM, MAにあてはまると同様に，EQ, QAにもあてはまるであろう．それ



［第 14 図］

に，円の性質からPEはPCに等しいため，PE, PAが与えられたと仮定して線EQ, QAを求めても，PC, PAによってCM, MAを求めるのと同じ方程式を得るであろう．だから明らかに，x, y, そのほか仮定された他の量の値は，この方程式では2重となるであろう．すなわち，方程式は互いに等しくない2根を有し，x を求めるならば，一方はCM，他方はEQであろうし，y を求めるならば，一方はMA，他方はQAであろう．他の量についても同様である．いかにも，点Eが点Cと曲線の同じ側にないならば，2根のうち一方のみが真であり，他方は逆向きと言うか，ゼロより小であろう．[46] しかし，これらの2点C, Eが互いに近づけば近づくほど，これらの2根の間の差は小となり，最後に2点が1点に帰するとき，すなわち，Cを通る円がそこで曲線CEを切ることなく，これに接するとき，2根はまったく等しくなる．

そのうえ，次のことを考えねばならない．ひとつの方程式中に等根がある場合には，それは必ず，未知と仮定された量からそれに等しい既知量を引いたものを自乗し，それでもこの最後の計が前の計と同じ次元をもたないならば，欠けているだけの次元をもった他の計を掛けたものと同じ形をもつ．これによって，一方の計の各項と他方の計の各項の間に別々に相等性が成りたちうるのである．[47]

たとえば，上に見いだされた最初の方程式[48]〔の左辺〕，

$$\text{すなわち}\quad yy+\frac{qry-2qvy+qvv-qss}{q-r}$$

は，e が y に等しいとして，$y-e$ を自乗してできるもの，

$$yy-2ey+ee$$

と同じ形をもつべきである．そこで，これらの各項を別々に比較し，yy という第1項はどちらの方程式でも同じであるから，

一方における第2項 $\frac{qry-2qvy}{q-r}$ は，他方の第2項 $-2ey$ に等しい，

と言うことができる．

そこで線PAである量 v を求めて，

$$v \infty e-\frac{r}{q}e+\frac{1}{2}r$$

を得るが，e は y に等しいと仮定したのであるから，

$$v \infty y-\frac{r}{q}y+\frac{1}{2}r$$

としてよい．

さらには第3項を用い，

$$ee \infty \frac{qvv-qss}{q-r}$$

として，s を求めることもできるが，量 v が十分に点Pを定めており，われわれが求めた点もこれだけなのであるから，それ以上進む必要はない．