出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.192-200、2002年3月

フェルマとデカルトの接線法による生徒の数学観の変容
～原典を用いた文化的営みとしての数学授業～

筑波大学大学院修士課程教育研究科
井野口　浩

章構成

〈要約〉

本研究では、２００３年度から施行される数学基礎における数学史利用の実践例を､微分法の草創期にみられる問題、接線法をフェルマ、デカルトの方法の原典を題材として、接線法の比較から、生徒の数学観を再構築し、数学を文化であると捉えるような授業の可能性を考察し、その結果、生徒の数学観は変容され、数学を学ぶ価値を見出すことができたといえる。

1. はじめに

IEA（国際教育到達度評価学会）の第３回国際数学・理科教育調査の報告によると、日本の中学２年生において、成績は良好であるが、数学好きのレベルは比較国中で下位であり、数学離れが進んでいることがうかがえる。今日、学んでいる数学が、生徒にとって、暗記、難しい、面白くないといった否定的な考えが先行している。生徒は数学を、問題を解くというものとしてみなしていると考えている。そういった生徒の数学観が存在していると思われる。そのような生徒の数学観を築き直すのが今後の数学において必要である。

　数学観を築き直すための機会として２００３年度より高等学校で導入される「数学基礎」がある。その「数学基礎」の目標の１つに『数学と人間との関わり』に関して数学における概念の形成や原理・法則の認識の過程と人間や文化との関わりを中心として、数学史的な話題を取り上げることが例示されている。例えば、神長(1984)、沖田(1995)、恩田(1998)などが研究している。

今回の研究は、数学史の原典を解釈することにより、数学が人間の営みを通して構成されたものであることを体感し、生徒の数学観の変容を図り、その成果について検討する。

2. 研究目的・研究方法

研究目的：数学史教材を、生徒自身に解釈・追体験させることによって、数学を文化として捉えられ、生徒の数学観が変容するか、また数学を学ぶ意義を見出せるかを明らかにする。

研究方法：授業実践を行い、授業観察と事前･事後アンケートを実施する。
授業観察で記録したビデオと授業で使用したワークシートの記述とアンケートから考察を行う。

また、以下を下位課題とする。

・一次文献である原典を読みながら追体験することで、連続性・発展性を感じとり、数学では絶えず新発見が行われていることを認知する。

・子どもが数学に対する見方を変え、数学が変化し、発展するものであると捉えられるよう、数学史を生かした指導を提案することである。

3. 授業概要

３．１　授業環境

（１）対象　　筑波大学附属高等学校　第２学年　１９名（男１０女９）
（数学Ⅱ「微分法」既習を望んだが未習であった。）

（２）時間数・実施月日
２時間（５０分×２）平成１３年１２月６日（木）７日（金）

（３）準備
コンピュータ(windows)、ビデオプロジェクター 1 台、
Microsoft PowerPoint 2000、事前アンケート、事後アンケート、
ワークシートを含む授業資料

（４）教材開発について

青木(2001)は、17 世紀の微分草創期を題材とした授業研究として、『フェルマの極大及び極小値研究のための方法』用いて、一次文献である原典を読みながら追体験することで、「生徒は数学の連続性・発展性を感じ取ることができたと認識でき、数学観の変容がうかがえる。」と報告している。

本研究では、フェルマ・デカルトの接線法（『極大及び極小値研究のための方法』、『幾何学』）の原典を考察の材料として挙げていきたい。

接線法とは、曲線に対して、曲線上の任意点で接線を引く方法であり、数学Ⅱを既習していれば微分法を使うことで、接線を引くこと

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.192‐200、2002年3月

が可能である。では、その微分法が生まれた１７世紀から１８世紀において接線法を研究した数学者である、フェルマ・デカルトに焦点をあてて、微分法の出生を探る。また、１７世紀以前において、接線法はどのように扱われてきたのか。

・ユークリッド（B.C.４００～３５０頃）

　『原論』の中〔第３巻第１７命題〕にて、「円の接線」について

・アルキメデス（B.C.２８７～２１２頃）

　『方法』にて、螺旋への接線について

・アポロニウス（B.C.２６２～１９０頃）

　『円錐曲線論』の〔法線論〕にて、放物線、楕円、双曲線の法線（接線）

このことから、特定の曲線に対して、接線をひくことは可能であったが、平面上のいかなる曲線に対して、接線を作図する方法は確立されていなかった。

そこで、フェルマは、周の長さが決まった長方形の面積が最大になる図形が正方形であることを題材に、 $f(x)$ が極値をとる x の値 a の周りでの関数の値の変化が緩慢なり、ｅを極めて微少な値としてとり、 $f(a) \quad f(a+e)$ なる近似等式を作ることができる。この式の両辺を整理し、共通項を消去して、ｅで割り、ｅを消去するという操作により極値αを得る。

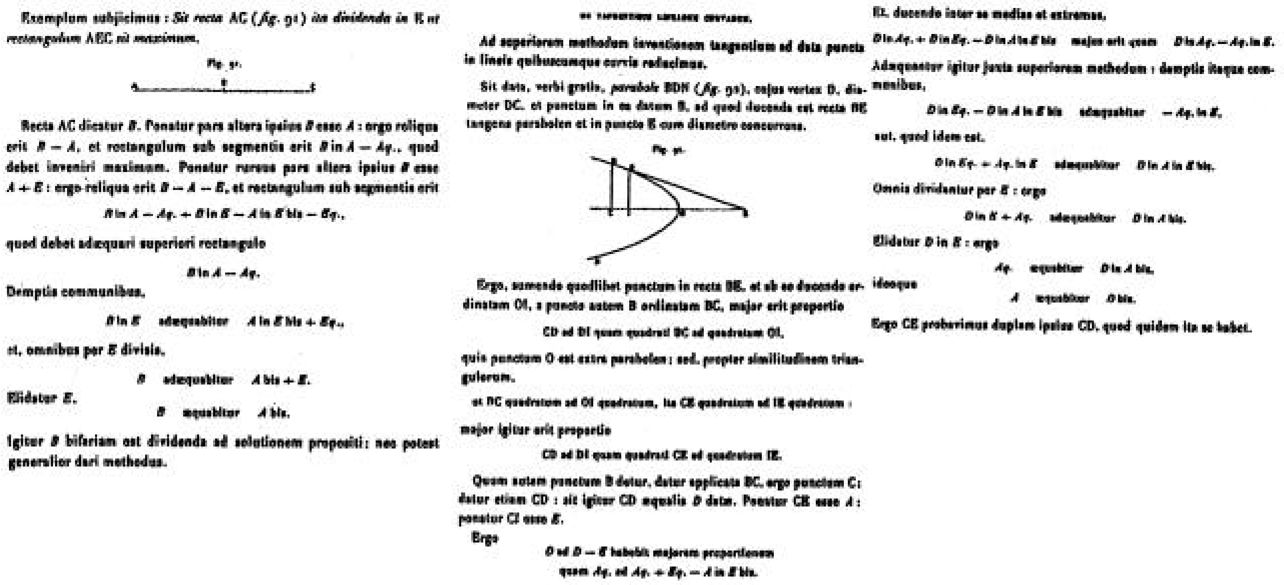
また、デカルトは、曲線上に定点 P と動点 Q を考え、線分 PQ の垂直二等分線と軸との交点を R とする。R を中心とし、PR を半径とする円 C を描く。動点 Q が定点 P に近づくと（極限ではなく動点 Q が定点 P と一致する）、その曲線と円 C が接し、円 C の点 P における接線は、曲線の点 P における接線になる。

以上がフェルマ・デカルトの接線法であり、フェルマの方法では、ｅのあやふやさを問題とされ、デカルトの方法では、代数方程式として重根を持つようにしていることから、超越曲線に対しては、方程式を求めることができないことであった。この両名の間にメルセンヌがお互いの接線法の問題をお互いに手紙でやりとりをして、よりよいものへと昇華していった。

また、授業で取り扱う教材は、新しい教材であるよりも、生徒のある程度の習熟も必要となるので、数学Ⅱ「微分法」を既習していることが望ましい。

３．３　授業展開

（１）　　１時間目　フェルマによる接線法



Exemplum subjicimus : *Sit recta AC (fig. 91) ita dividenda in E ut rectangulum AEC sit maximum.*

Fig. 91.

Recta AC dicatur *B*. Ponatur pars altera ipsius *B* esse *A* : ergo reliqua erit *B* − *A*, et rectangulum sub segmentis erit *B* in *A* − *Aq.*, quod debet inveniri maximum. Ponatur rursus pars altera ipsius *B* esse *A* + *E* : ergo reliqua erit *B* − *A* − *E*, et rectangulum sub segmentis erit

B in *A* − *Aq.* + *B* in *E* − *A* in *E* bis − *Eq.*,

quod debet adæquari superiori rectangulo

B in *A* − *Aq.*

Demptis communibus,

B in *E*　adæquabitur　*A* in *E* bis + *Eq.*,

et, omnibus per *E* divisis,

B　adæquabitur　*A* bis + *E*.

Elidatur *E*.

B　æquabitur　*A* bis.

Igitur *B* bifariam est dividenda ad solutionem propositi : nec potest generalior dari methodus.

Ad superiorem methodum inventionem tangentium ad data puncta in lineis quibuscumque curvis reducimus.

Sit data, verbi gratia, parabole BDN (*fig.* 92), cujus vertex D, diameter DC, et punctum in ea datum B, ad quod ducenda est recta BE tangens parabolen et in puncto E cum diametro concurrens.

Fig. 92.

Ergo, sumendo quodlibet punctum in recta BE, et ab eo ducendo ordinatam OI, a puncto autem B ordinatam BC, major erit proportio

CD ad DI quam quadrati BC ad quadratum OI,

quia punctum O est extra parabolen : sed, propter similitudinem triangulorum,

ut BC quadratum ad OI quadratum, ita CE quadratum ad IE quadratum :

major igitur erit proportio

CD ad DI quam quadrati CE ad quadratum IE.

Quum autem punctum B detur, datur applicata BC, ergo punctum C; datur etiam CD : sit igitur CD æqualis *D* datæ. Ponatur CE esse *A* : ponatur CI esse *E*.

Ergo

D ad *D* − *E* habebit majorem proportionem quam *Aq.* ad *Aq.* + *Eq.* − *A* in *E* bis.

Et, ducendo inter se medias et extremas,

D in *Aq.* + *D* in *Eq.* − *D* in *A* in *E* bis　major erit quam　*D* in *Aq.* − *Aq.* in *E*.

Adæquentur igitur juxta superiorem methodum : demptis itaque communibus,

D in *Eq.* − *D* in *A* in *E* bis　adæquabitur　− *Aq.* in *E*,

aut, quod idem est,

D in *Eq.* + *Aq.* in *E*　adæquabitur　*D* in *A* in *E* bis.

Omnia dividantur per *E* : ergo

D in *E* + *Aq.*　adæquabitur　*D* in *A* bis.

Elidatur *D* in *E* : ergo

Aq.　æquabitur　*D* in *A* bis,

ideoque

A　æquabitur　*D* bis.

Ergo CE probavimus duplam ipsius CD, quod quidem ita se habet.

原典『OEUVRES de FERMAT』【Methodus ad Disquirendam Maxima et Minimam】

フェルマとは･･･

職業：法律家、行政家

彼の数学への貢献

　　確率論

　　整数論

　　微積分

有名な定理・原理

　　フェルマの最終定理

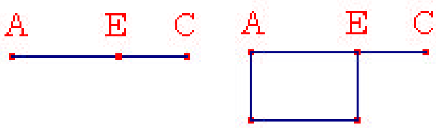


図１矩形

授業の内容に入る前に、接線法について、フェルマ、デカルト以前に接線法を研究していた人物について、フェルマについての紹介をした。

最初に、フェルマの接線法を行う前に、フェルマの独自な「極大・極小の方法」について考えてみる。

問題：線分ＡＣをＥで分割して矩形ＡＥＣが極大になるようにする。（図１）

ワークシート①を使って、原典でどのようなことが書かれているか和訳と照らし合わせながら穴埋め問題を考えてもらった。

　授業者：原典で書かれている数式と思われるものが現在的に表記した場合はどのようになるか。

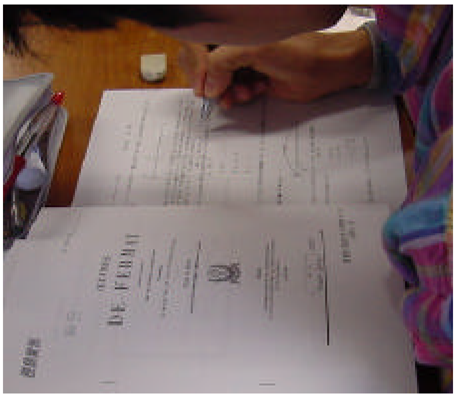
その後、結果合わせでは、ほとんどの生徒が一致していた。

　授業者：では、その式変形ではどのような操作が行われているか。

に対して、

　生徒１：ｅを消去したら、近似等号だったのに、等号になっている。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.192‐200、2002年3月



実際に、この問題を現代的に解いたものをみせて、フェルマの方法で求めた値と比較する。

次に、フェルマの接線法を行う。
原典より、曲線を放物線とする。

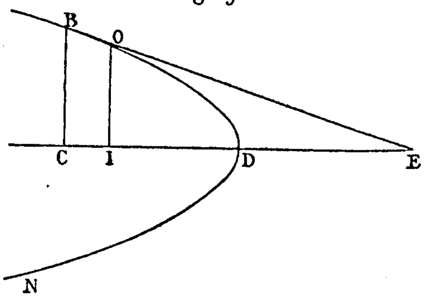
曲線(放物線)の性質を用いて、$\dfrac{CD}{DI} > \dfrac{BC^2}{OI^2}$

三角形の相似の関係より、$\dfrac{BC^2}{OI^2} = \dfrac{CE^2}{IE^2}$

上の 2 式から、$\dfrac{CD}{DI} > \dfrac{CE^2}{IE^2}$

この式を先ほど行った「極大・極小の方法」を用いて、式を整理すると、ＣＥの長さはＣＤの２倍であることがわかり、E が定まり、接線ＢＥを引くことができる。

Fig. 92.



（２）　　２時間目　デカルトによる接線法

原典『LA GEOMETRIE RENE DESCARTES』

Soit C E la ligne courbe, & qu'il faille tirer vne ligne droite par le point C, qui face auec elle des angles droits. Ie suppose la chose desia faite, & que la ligne cherchée est C P, laquelle ie prolonge iusques au point P, ou elle rencontre la ligne droite G A, que ie suppose estre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne C E: en sorte que faisant M A ou C B $= y$, & C M, ou B A $= x$, iay quelque equation, qui explique le rapport, qui est entre x & y. Puis ie fais P C $= s$, & P A $= v$, ou P M $= v - y$, & a cause du triangle rectangle P M C iay ss, qui est le quarré de la baze esgal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui sont les quarrés des deux costés. c'est a dire iay $x = \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, oubien $y = v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cete equation, i'oste de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'vne des deux quantités indeterminées x ou y. ce qui est aysé a faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d'x, & le quarré de cete somme au lieu d'xx, & son cube au lieu d'x^3, & ainsi des autres, si c'est x que ie veuille oster; oubien le quarré, ou le cube, &c. de cete somme, au lieu d'yy, ou y^3 &c. De façon qu'il reste tousiours aprés cela vne equation, en laquelle il ny a plus qu'vne seule quantité indeterminée, x, ou y.

Comme si C E est vne Ellipse, & que M A soit le segment de son diametre, auquel C M soit appliquée par ordre, & qui ait r pour son costé droit, & q pour le trauersant, on à par le 13 th. du 1 liu. d'Apollonius.

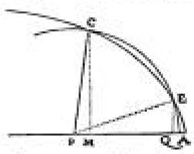
$xx = ry - \frac{r}{q}yy$, d'ou ostant xx, il reste $ss - vv + 2vy - yy = ry - \frac{r}{q}yy$. oubien,

$yy \frac{+ qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ esgal a rien. car il est mieux en cet endroit de considerer ainsi ensemble toute la somme, que d'en faire vne partie esgale a l'autre.

Or aprés qu'on à trouué vne telle equation, au lieu de s'en seruir pour connoistre les quantités x, ou y, ou z, qui sont desia données, puisque le point C est donné, on la doit employer a trouuer v, ou s, qui determinent le point P, qui est demandé. Et a cet effect il faut considerer, que si ce point P est tel qu'on le desire, le cercle dont il sera le centre, & qui passera par le point C, y touchera la ligne courbe C E, sans la coupper: mais que si ce point P, est tant soit peu plus proche, ou plus esloigné du point

Xx　A, qu'il

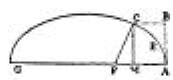
A, qu'il ne doit, ce cercle couppera la courbe, non seulement au point C, mais aussy necessairement en quelque autre. Puis il faut aussy considerer, que lorsque ce cercle couppe la ligne courbe C E, l'equation par laquelle on cherche la quantité x, ou y, ou quelque autre semblable, en supposant P A & P C estre connuës, contient necessairement deux racines, qui sont inesgales. Car par exemple si ce cercle couppe la courbe aux poins C & E, ayant tiré E Q parallele a C M, les noms des quantités indeterminées x & y, conuiendront aussy bien aux lignes E Q, & Q A, qu'a C M, & M A; puis P E est esgale a P C, a cause du cercle, si bien que cherchant les lignes E Q & Q A, par P E & P A qu'on suppose comme données, on aura la mesme equation, que si on cherchoit C M & M A par P C, P A. d'où il suit euidemment, que la valeur d'x, ou d'y, ou de telle autre quantité qu'on aura supposee, sera double en cete equation, c'est a dire qu'il y aura deux racines inesgales entre elles; & dont l'vne sera CM, l'autre E Q, si c'est x qu'on cherche; oubien l'vne sera M A, & l'autre Q A, si c'est y. & ainsi des autres. Il est vray que si le point E ne se trouue pas du mesme costé de la courbe que le point C, il n'y aura que l'vne de ces deux racines qui soit vraye, & l'autre sera renuersée, ou moindre que rien: mais plus ces deux poins, C, & E, sont proches l'vn de l'autre, moins il y a de difference entre ces deux racines;



nes; & enfin elles sont entierement esgales, s'ils sont tous deux ioins en vn; c'est a dire si le cercle, qui passe par C, y touche la courbe C E sans la coupper.

De plus il faut considerer, que lorsqu'il y a deux racines esgales en vne equation, elle a necessairement la mesme forme, que si on multiplie par soy mesme la quantité qu'on y suppose estre inconnuë moins la quantité connue qui luy est esgale, & qu'aprés cela si cete derniere somme n'a pas tant de dimensions que la precedente, on la multiplie par vne autre somme qui en ait autant qu'il luy en manque; affin qu'il puisse y auoir separement equation entre chascun des termes de l'vne, & chascun des termes de l'autre.

Comme par exemple ie dis que la premiere equation trouuée cy dessus, a sçauoir
$yy \frac{+ qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ doit auoir la mesme forme que celle qui se produist en faisant e esgal a y, & multipliant $y - e$ par soy mesme, d'où il vient $yy - 2ey + ee$, en sorte qu'on peut comparer separement chascun de leurs termes, & dire que puisque le premier qui est yy est tout le mesme en l'vne qu'en l'autre, le second qui est en l'vne $\frac{qry - 2qvy}{q - r}$ est esgal au secõd de l'autre qui est $-2ey$, d'où cherchant la quantité v qui est la ligne P A, on à



$v = e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$, oubiẽ a cause que nous auons supposé e esgal a y, on a $v = y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$. Et

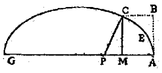
Xx 2　ainsi

ainsi on pourroit trouuer s par le troisiesme terme $ee = \frac{qvv - qss}{q - r}$ mais pourceque la quantité v determine assés le point P, qui est le seul que nous cherchions, on n'a pas besoin de passer outre.

【和訳】『デカルト著作集』

[与えられた曲線，またはその接線を直角に切る直線を見いだす一般的方法]

曲線 CE [第 11 図(*)] があり，点Cを通って，これと直角をなす直線をひかねばならないとせよ．問題がすでに解かれたと仮定し，求める線を CP とする．これを延長して点Pで線 GA と交わらせ，線 CE のすべての点を GA の点に関係づけることにする．そこで，MA または CB ∞y，CM または BA∞x とし，x と y の間の関係を説明する何らかの方程式を得る．次に，PC∞s，PA∞v，つまり PM$\infty v-y$ とすれば，PMC は直角三角形であるから，底辺の平方 ss は 2 辺の平方である $xx+vv-2vy+yy$ に等しくなる．すなわち，



[第 11 図]

$$x \infty \sqrt{ss-vv+2vy-yy}, \quad \text{あるいは} \quad y \infty v+\sqrt{ss-xx}$$

であり，この方程式を用いて，曲線 CE のすべての線が直線 GA の点にたいしてもつ関係を説明している他の方程式から，ふたつの未定量 x, y の一方を除く．これは容易であって，もし x を除こうとするのであれば，至るところで x のかわりに $\sqrt{ss-vv+2vy-yy}$ をおき，xx のかわりにこの量の平方をおき，x^3 のかわりにその立方をおき，以下同様にすればよく，もし y を除こうとするのであれば，そのかわりに $v+\sqrt{ss-xx}$ をおき，yy, y^3 などのかわりにこの量の平方，立方などをおけばよい．このようにすれば，残る方程式にはもはや 1 個の未定量，x または y しかないわけである．

たとえば，CE が楕円で，MA がその直径の部分であり，CM がそれに縦順正しく立てられており，r がその通径，q が横径であるならば，アポロニウス第 1 巻の定理 13[45] によって，

$$xx \infty ry-\frac{r}{q}yy$$

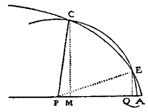
を得，そこから xx を除けば，

$$ss-vv+2vy-yy \infty ry-\frac{r}{q}yy,$$

あるいは $yy+\frac{qry-2qvy+qvv-qss}{q-r}$ がゼロに等しい．

実際，いまの場合は，計の一部を他の部分に等しいとおくより，計全体をこのように一括して考える方がまさっているのである．

ところで，このような方程式が見いだされたうえは，量 x, y, または z を知るためにこれを使うのではなく──点Cは与えられているのであるから，これらの量はすでに与えられている──求める点Pを定める v または s を見いだすために用いるべきである．このためには，次のことを考えねばならない．もしこの点が求めるとおりのものであれば，P を中心とし点Cを通る円はそこで CE を切ることなく，これに接するであろう．しかし，この点Pが点Aに少しでも近すぎるか遠すぎるならば，この円は，単に点Cにおいてばかりでなく，必ず他の点においても曲線を切るであろう．さらに，次のことも考えねばならない．この円が曲線 CE [第 14 図] を切るとき，PA, PC を既知と仮定して量 x, y またはこれに類するものを求めるのに使う方程式は，必ず相等しくない 2 根を含む．なぜならば，たとえば，もしこの円が曲線を点 C と E において切るとすれば，CM に平行に EQ をひくとき，未定量の名 x, y は線 CM, MA にあてはまると同様に，EQ, QA にもあてはまるであろう．それに，円の性質から PE は PC に等しいため，PE, PA が与えられたと仮定して線 EQ, QA を求めても，PC, PA によって CM, MA を求めるのと同じ方程式を得るであろう．だから明らかに，x, y，そのほか仮定された他の量の値は，この方程式では 2 重となるであろう．すなわち，方程式は互いに等しくない 2 根を有し，x を求めるならば，一方は CM，他方は EQ であろうし，y を求めるならば，一方は MA，他方は QA であろう．他の量についても同様である．いかにも，点Eが点Cと曲線の同じ側にないならば，2 根のうち一方のみが真であり，他方は逆向きと言うか，ゼロより小であろう．[46] しかし，これらの 2 点 C, E が互いに近づけば近づくほど，これらの 2 根の間の差は小となり，最後に 2 点が 1 点に帰するとき，すなわち，C を通る円がそこで曲線 CE を切ることなく，これに接するとき，2 根はまったく等しくなる．



[第 14 図]

そのうえ，次のことを考えねばならない．ひとつの方程式中に等根がある場合には，それは必ず，未知と仮定された量からそれに等しい既知量を引いたものを自乗し，それでもこの最後の計が前の計と同じ次元をもたないならば，欠けているだけの次元をもった他の計を掛けたものと同じ形をもつ．これによって，一方の計の各項と他方の計の各項の間に別々に相等性が成りたちうるのである．[47]

たとえば，上に見いだされた最初の方程式[48]〔の左辺〕，

$$\text{すなわち} \quad yy+\frac{qry-2qvy+qvv-qss}{q-r}$$

は，e が y に等しいとして，$y-e$ を自乗してできるもの，

$$yy-2ey+ee$$

と同じ形をもつべきである．そこで，これらの各項を別々に比較し，yy という第 1 項はどちらの方程式でも同じであるから，

一方における第 2 項 $\frac{qry-2qvy}{q-r}$ は，他方の第 2 項 $-2ey$ に等しい，

と言うことができる．

そこで線 PA である量 v を求めて，

$$v \infty e-\frac{r}{q}e+\frac{1}{2}r$$

を得るが，e は y に等しいと仮定したのであるから，

$$v \infty y-\frac{r}{q}y+\frac{1}{2}r$$

としてよい．

さらには第 3 項を用い，

$$ee \infty \frac{qvv-qss}{q-r}$$

として，s を求めることもできるが，量 v が十分に点Pを定めており，われわれが求めた点もこれだけなのであるから，それ以上進む必要はない．

内容に入る前に１時間目の復習として、

フェルマの方法において１時間目の終了後に感想を書いていただき、２時間目の頭に回収した。

感想から

生徒１：ｅがなぜ消えるのかいまいち分からなかった。

フェルマの方法のあやふやさについて感覚的に気付いた生徒もいたようだったので、こちらからヒントをだした。

授業者：ｅで割っているんだよね。でも、そのあとにｅを０にしてるんだけど、どう思う？

生徒：(あれ？)

微分や無限小解析を未習の生徒にとっては気付きにくい微分の定義がこのフェルマの方法では隠れているのだが、生徒にとっては、ｅは微小量だから、割ることはできる。またｅは微小だから、０と近似できると感じたようである。

この方法に異論をあげる数学者デカルトを紹介する。

デカルトの接線法では、法線を導き、その法線に垂直なものが接線である。

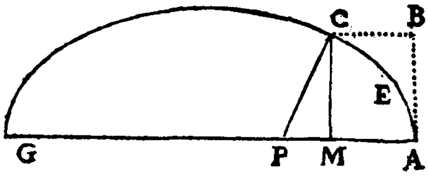
デカルトとは･･･

職業：哲学者,軍人,紳士

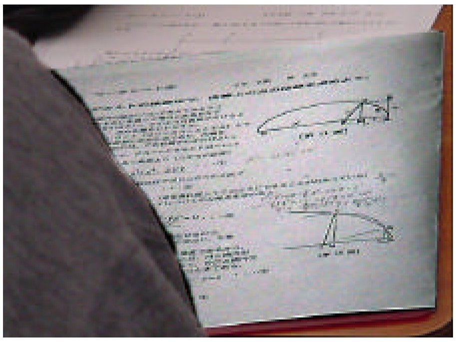
数学への貢献

　幾何学

　座標幾何の発見



出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.192‐200、2002年3月



授業資料とワークシートを同時進行で行った。
原典から、曲線を楕円とする。
⊿PMCから三平方の定理より①式が得られる。
ワークシートを行っている生徒達の会話

生徒2：式変形がめんどくさい。

生徒3：③式が y^2 の式にならないよ。

（デカルトの方法では代数的であり、楕円は2次方程式だが、放物線は6次方程式になる。）
③式は一体何を表している式なんだろう。

授業者：①式というのは三平方の定理だけど、他にはどう見える？

生徒4：円の方程式

③式は円と楕円との交点を導く2次方程式になる。

授業者：円と楕円が接するためには③式が重根を持てばいいよね。じゃあどうしたらいいかな？

生徒5：判別式D＝0であればいいと思う。

授業者：そうだね。でも、当時はそういう方法じゃなくて係数比較をしてたんだ。

$y-e=0$ として、
$y^2-2ey+e^2=0$ と③式を係数比較をして、
v＝PA が求まり、CP が描ける。
CP は点 C における楕円の法線でもあるから、その法線に垂直で点 C を通るものが接線である。

4. 考察

フェルマとデカルトによる接線法は、メルセンヌの書簡を通して、フェルマの方法をデカルトが指摘し、デカルトの方法をフェルマが指摘するという点において、「数学とは、どのような学問だと思いますか。」という事後アンケートより生徒の一人は『試行錯誤を繰り返しつつも、論理的に考えて行くことで、1つの答えにたどり着く。そこには新しい発見がある。そういう教科ではないだろうか。』と述べている。このことから、この生徒の中では数学が文化として、また、数学という学問が発展して続けていく学問と認識されたと示唆されただろう。
別の生徒は事前アンケートでは『考える学問』と述べていたが事後アンケートでは『色々な問題は様々な角度からアプローチをし、楽しむ学問』と述べている。

これは、数学のよさ、楽しさというように生徒の数学観が変容されたと示唆されただろう。
また、この授業を通してあなたの考えが変わったと思うことについて書いてもらったところ、以下のようなことが

- 根本の知識を応用したのを知ったのをきっかけとして数学は創り出せるのだと変わった。
- 今まで数学はどんどん進化していくものだという感じがしなかったけれど、授業によって現代の考え方がいかに易しいわかり、感動しました。
- 数学というものは最初から整理されてたものではなく、いろいろ試行錯誤していたんだと分かった。
- 今まで使ってきた公式も必ず試行錯誤を繰り返された結果、発見されたものであって、そういう過程を無視しての勉強は、本当に暗記になってしまうと思った。公式が導かれるまでの過程だけでも理解してから使わなくては、数学という教科の意味が失われてしまうのではないだろうか。

このことから、生徒にとって、数学が発展しつづけていく学問であるという認識が生まれ、数学観の変容がうかがえる。

5. おわりに

本研究では、接線法という微分積分学の草創期におけるフェルマ、デカルトの方法を使って、どのように微分が生まれてきたかについてだったが、対象の生徒が微分法を未習であったので生徒にとってはわかりにくいものであったと思われる。
今後の課題としては、微分既習の生徒ではどのように受け止めるのか、動的幾何ソフト『Cabri GeomeryⅡ』の活用により、デカルトの接線法の再現や幾何的曲線だけでなく、超越的曲線（Ex.サイクロイド）に対して接線を引くものも取り上げてみたい

謝辞

研究授業の実施に際して、国立筑波大学附属高等学校の数学科主任の川崎宣昭先生、利根川誠先生をはじめ多くの方々には、貴重な御指導、御協力をいただき、厚くお礼申し上げます。

註１）本研究は、筑波大学学内プロジェクト研究（助成研究Ｂ：研究代表者　礒田正美）「インターネット上の数学博物館の開発・評価研究」の一貫として行われた。

出典:中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行:筑波大学数学教育学研究室、pp.192‐200、2002年3月

註２）授業の詳細、並びに資料は次に掲示している。

http://www.mathedu-jp.org

参考・引用文献

（１） 礒田正美・土田知之(2001)異文化体験を通じての数学の文化的視野の覚醒；数学的活動の新たなパースペクティブ　日本科学教育学会年会論文集、pp497~498

（２） 礒田正美(2001)異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒に関する一考察－隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて－筑波数学教育研究．筑波大学数学教育研究室．pp.39~48

（３） 神長幾子(1985)「高等数学における微積分指導に関する一考察～微積分形成の歴史をふまえて～」昭和５９年筑波大学大学院教育研究科修士論文

（４） 恩田洋一(1999)「一次文献を利用した数学史教育に関する一考察～「数学基礎」に関連して～」平成 10 年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

（５） 沖田和美(1996)「学校数学における数学史を生かした指導に関する一考察」平成 7 年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

（６） 近藤洋逸「フェルマの極大極小法及び接線論」「近藤洋逸数学史著作集第３巻 数学の誕生・近代数学史論」日本評論社 pp.274~299

（７） 青木弘(2001)数学者の新方法の公示による生徒の数学観の変容に関する一考察～フェルマの論文『極大および極小値研究のための方法』の解釈を通して～「世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育－代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開－」　筑波大学数学教育学研究室 pp195~213

（８） 高等学校学習指導要領解説数学編理科編 平成 11 年 12 月文部省 実教出版

（９） Rene.Descartes(1954)the geometry of RENE DESCARTES translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcial L, Latham Dover Publication,Inc. New York

（10） P.de.Fermat(1629)「OEUVRES de FERMAT Methodus ad Disquiredam Maximam et Minimam」

（1１）デカルト著作集１(1974) 「幾何学」原亨吉訳 白水社 pp32~38

上記以外に参考にした文献

小堀憲「数学史」朝倉書店 pp.76～82

ボイヤー(1984)「数学の歴史３」 朝倉書店 訳者 加賀美鐵雄 浦野由有 pp.98～120

スチュアート・ホリングテール「数学を築いた天才たち(上) ギリシア数学からニュートンへ」 講談社 pp.200~238

http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/Forall/project/2001/inoguchi-fl/inoguchi-index.htm