授業資料

2年　組　　番

VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI.

Acceſſerunt ſelectæ quædam ejuſdem Epiſtolæ, vel ad ipſum à pleriſque doctiſsimis viris Gallicè, Latinè, vel Italicè, de rebus ad Mathematicas diſciplinas, aut Phyſicam pertinentibus ſcriptæ.

TOLOSÆ,

Apud JOANNEM PECH, Comitiorum Fuxenſium Typographum, juxta Collegium PP. Societatis JESU.

M. DC. LXXIX.

授業者；辻山洋介

ピエル・ド・フェルマ　（Pierre de Fermat, 1601～1665）

フェルマの外面的生活は静かで規律正しく波乱のないものだったが、数学的業績は独創性や深遠さ、多様性において傑出していた. 実際、彼は全時代を通じて最も偉大な「純粋」数学者の一人である。

フェルマは1601年ロマーニュのボーモンで生まれた。彼の父親は皮革職人で、母親は公職にある法律家の家系の出だった。そして法律家の伝統は彼女の息子が継ぐことになる。通常そうであるように、地方の学校へ通った後、ピエルはトゥールーズで勉強を続け、そこで弁護士の資格を得た。

1631 年に彼は母親のいとこと結婚した。（彼女は3人の息子と2人の娘を生む）1648年にかれはトゥールーズの高等法院参与の地位に昇進し、1665年に65歳で死ぬまでその地位を平穏かつ実直にまっとうしたのである。

フェルマは法律家および行政家として相当の能力を持っていたが、また、主要なヨーロッパ言語や文学に関して広範な知識を持った優れた古典学者でもあり、言語学者でもあった。

彼がラテン語、フランス語、スペイン語で作った詩は賞賛されている。しかしフェルマは余暇の大半を何よりもお気に入りの娯楽であった数学に費やした。彼は最高に理性的なものへの知的情熱に、その対象への純然たる愛情に身をこがしたのだ。

フェルマは職業的数学者ではなかったので、公表する意思があまりなかった。実際、彼の数学的著作のほとんどは彼の死後まで出版されていない。しかしいくつかは彼の生前も手稿で出回っていた。また、彼の発見の多くを、通常は要約した形で、広い範囲に及ぶ数学上の文通者への手紙の中で公表した。

（スチュアート・ホリングデール「数学を築いた天才たち　上」 より）

これらの諸業績はその死後、息子の Samuel de Fermat によって「数学論集」（Varia Opera Mathematica. Toulouse 1679）として出版されている。

（中村幸四郎「「数学史―形成の立場から―」より」）

フェルマの著作

『AD LOCOS PLANOS ET SOLIDOS ISAGOGE』

（平面及び立体の軌跡論入門）を読んでみよう！

VARIA OPERA MATHEMATICA D. PETRI DE FERMAT SENATORIS TOLOSANI.

AD LOCOS PLANOS ET SOLIDOS ISAGOGE.

DE locis quàm plurima scripsisse veteres, haud dubium. testis Pappus initio libri 7. qui Appollonium de locis planis, Aristæum de solidis scripsisse asseverat. Sed aut fallimur, aut non proclivis satis ipsis fuit locorum investigatio. Illud auguramur ex eo quod locos quàm plurimos non satis generaliter expresserunt, ut infra patebit.

Scientiam igitur hanc propriæ & peculiari analysi subjicimus, ut deinceps generalis ad locos via pateat.

Quoties in ultima æqualitate duæ quantitates ignotæ reperiuntur, fit locus loco, & terminus alterius ex illis describit lineam rectam, aut curvam. linea recta unica & simplex est, curva infinita, circulus, parabole, hyperbole, ellipsis, &c.

Quoties quantitatis ignotæ (lineæ rectæ reponendum) terminus localis describit lineam rectam, aut circularem, fit locus planus: at quando describit parabolem, hyperbolem, vel ellipsim, fit locus solidus: si alias curvas, dicitur locus linearis. De hoc nihil adjungemus, quia facillimè ex planorum & solidorum investigatione, linearis loci cognitio derivabitur, mediantibus reductionibus.

Commodè autem possunt institui æquationes, si duas quantitates ignotas ad datum angulum constituamus, quem ut plurimùm rectum sumemus, & alterius ex illis positione datæ terminus unus sit datus, modò neutra quantitatum ignotarum quadratum prætergrediatur, locus erit planus aut solidus, ut ex dicendis clarum fiet.

古代の数学者が軌跡について論著をあらわしたことは確かなことである。これは、パッポスの「数学論集」第７巻のはじめの部分で、アポロニウスが平面軌跡について、またアリスタイオスが立体軌跡について論著を書いたと述べていることによっても知ることができる。しかし、彼らにとって軌跡を論じることは決して容易なものではなかったに違いない。それは、軌跡はその数が多いにかかわらず、それが必ずしもじゅうぶん一般的には表現されておらず、またそれをさらに一般化することができなかったという事実によっても知ることができる。そこで我々は、この理論を１つの解析論に下属させようと思うのである。この解析論というのは、特に軌跡の研究に対して一般的な見通しを与えるのに適したものである。

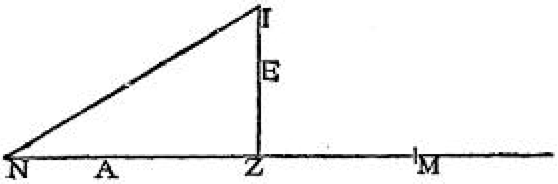
最終の段階の方程式に未知量が２つ含まれている場合には、そのうちの１つの量（線分）の端点が直線あるいは曲線を描き、かくして軌跡が得られる。直線はただ１種類でかつ単純である。曲線の種類は無数にあり、円、放物線、双曲線、楕円などがある。

未知量の端点が直線または円を描くとき、この軌跡を「平面的」といい、放物線、双曲線、楕円を描くとき「立体的」という。そのほかの曲線を描くとき、これを「曲線的」という。そしてこの最後の場合に、我々は何も付加するものはない。なぜならば、曲線的な軌跡は、きわめて容易に、平面および立体的の軌跡に帰着させることができるからである。

方程式の概念を助けるために、２つの未知量を定まった角をなすように取るのが便利である。そして普通には、角としては直角をとり、かつその位置が与えられたものとし、また２つの未知量のうちの一方についてはその端点の１つは定点であるとする。２つの未知量のいずれもが平方を越えないときは、後で明らかにされるように、軌跡は平面的または立体的となる。

（中村幸四郎「数学史―形成の立場から―」改）

Recta data positione sit N Z M. cujus punctum datum N. N Z. æquetur quantitati ignotæ A. & ad angulum datum N Z I. elevata recta Z I. sit æqualis alteri quantitati ignotæ E. D in A æquetur B. in E. Punctum I. erit ad lineam rectam positione datam.



D A ∽ B E.

Erit enim ut B ad D. ita A. ad E. Ergo ratio A ad E. data est, & datur angulus ad Z. triangulum igitur N I Z. specie, & angulus I N Z. Datur autem punctum N. & recta N Z. positione. Ergo dabitur N I. positione, & est facilis compositio.

（英訳）

① Let NZM be a straight line given in position, N be a fixed point on it.

②-1 Let NZ be one unknown quantity A

②-2 and the segment ZI, applied to it at given angle NZI, be equal to the other unknown quantity E.

③-1 **When D times A is equal to B times E, the point I will describe a straight line given in position**,

③-2 , since B is to D as A is to E.

④-1 Hence the ratio of A to E is given,

④-2 and, since the angle at Z is given, the form of the triangle NIZ, and with it the angle INZ is given.

⑤　But the point N is given and the straight line NZ is given in position;

⑥ hence NI is given in position and it is easy to make the synthesis.

in position ― **位置の定まった**　　fix ― **固定する**　　quantity ― **量**
segment ― **線分**　　angle ― **角度**　　D times A ― D **かける** A
describe ― **描く**　　ratio　**比**　　synthesis　**総合**

（1）　**フェルマがどのように考えたかを、図を使って書いてみよう。**

フェルマの用いた記号はヴィエタ（Francois Viet 1540～1630）**に従っており、未知量を母音**（A,E,I **など**）**で、既知量を子音**（B,G,D **など**）**で表していた。**

問２．フェルマの方法の手順をもう一度確認せよ。

まず①で

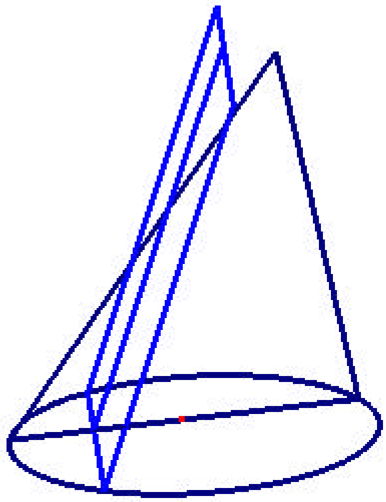
②-1 で

②-2 で

それぞれ図に書くと…？

以降についてはどうか。

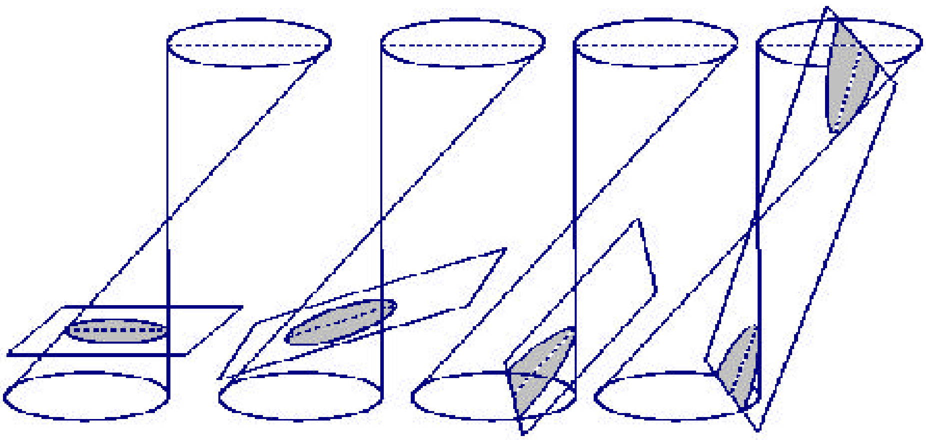
問．突然ですが、下の図のような円錐（底面は円）があるとします。平面による切り口はどのような図形になるか。
また、平面の角度を変えてみると



（答え）

（理由）

こんなかんじです。



アポロニウスの円錐曲線論

「偉大なる幾何学者」として知られるアポロニウスは、紀元前262年ごろに現在の南イタリアのペルガで生まれた。彼の人生については多くは知られておらず、その著作も多くが失われてしまっている。
彼の『円錐曲線論』は全８巻で構成され、487 を越える命題を含んでおり、それらはすべて厳密に演繹的な証明がなされている。はじめの４巻は 12～13 世紀のギリシア語手稿が、続く3巻はアラビア語でのみ残っている。また、第８巻は失われた。
アポロニウスはその中で円錐の断面として３種類の曲線を定義しそれらの性質を示した。

（スチュアート･ホリングデール 数学を築いた天才たち 上」改）

アポロニウスがどのようにして円錐曲線について考えたかを、原典の抜粋（英訳；R.Catesby Taliaferro 日本語訳；辻山）を読みながら考えていこう！

<u>はじめの定義</u>

１．（円錐面、頂点、軸）

ある点から、それと同じ平面上にない円の円周を通る直線を両方向に引き、点は固定したままその直線を円周について回す。

このとき生成された表面を円錐面、固定した点を頂点、頂点から円の中心に引かれる直線を軸と呼ぶ。

円錐面は互いに垂直な２つの表面から構成され、直線が無限に延長するにつれそれぞれは無限に拡大する。

２．（円錐）

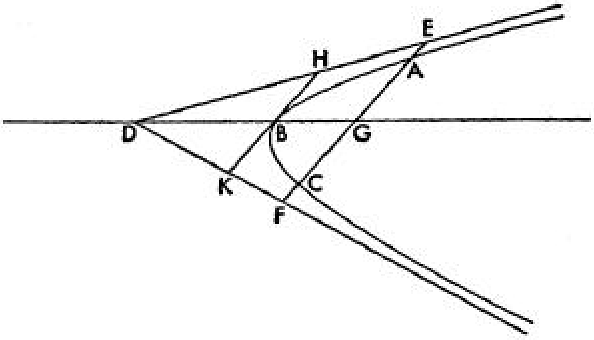
円と、頂点と円周間の円錐面で囲まれた図形を円錐と呼ぶ。

<u>第１巻 命題４</u>

底面の円に平行な平面で円錐面を切断するとき、その切断面は軸上に中心を持つ円である。

<u>第２巻 命題８</u>

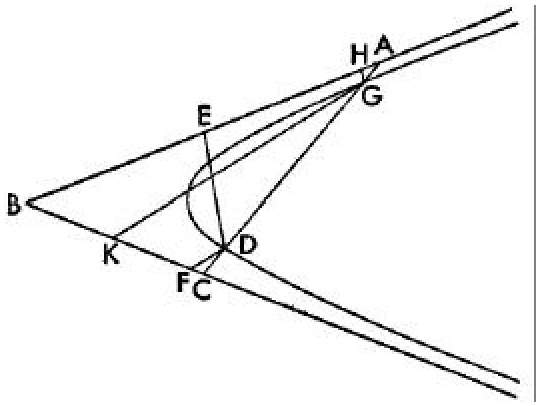
ある直線が双曲線と２点で交わるとき、その直線を両側に伸ばすと２つの漸近線と交わり、双曲線と漸近線により切り取られる長さは等しい。



すなわち、右図において
ABCが双曲線、
ED, DFがその漸近線
であり、直線ACがABC
に交わっているとする。
このときＡＣは漸近線と
E, Ｆで交わり、ＣＦ＝ AE が成り立つ。

<u>第２巻 命題12</u>

双曲線上の点から2直線が漸近線に引かれていて、それらと平行な2直線が同様に双曲線上の他の点から引かれているとき、それらの直線による長方形は等しい。



すなわち、右図において、
ABとBC が双曲線の漸近線であって、双曲線上の点 D からAB,AC に向けて DE,DF が引かれ、双曲線上の他の点 G からGH,GK をそれぞれ ED,DF にそれぞれ平行に引くと、**rect.ED,DF = rect.HG,GK** が成り立つ。

問１．rect.ED,DF = rect.HG,GK とはどのような意味か。

問２．この命題の証明の以下の空欄を埋めよ。(「」は辻山による)

DG が漸近線 A,C で交わっているとすると、命題８より

（　　　　）＝（　　　　）。ゆえに

AD ＝（　　　　）。よって、

rect.AD,DC ＝ rect.AG,GC が成り立つ。したがって

AG :AD ＝ DC :CG …①

ここで、「①の両辺について」

AG :AD ＝ DF :GK

DC :CG ＝（　　：　　）ゆえに、

DF :GK ＝（　　：　　）。したがって

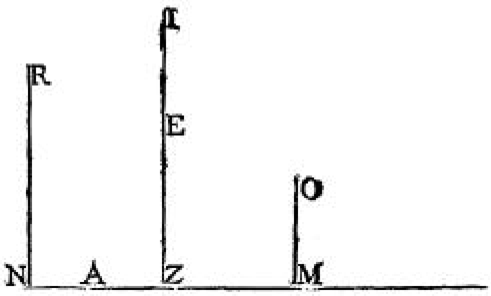
rect.ED,DF ＝ rect.HG,GK が成り立つ。

問．原典と日本語訳（辻山）を用いて、フェルマ「平面及び立体の軌跡論入門」の続きを理解しよう。

Secundus hujuſmodi æqualitatum gradus eſt, quando,

A in E. æq. Z. pl. $\qquad AE \wr Z^p$

quo caſu punctum I. eſt ad hyperbolem.



Fiat N R. parallela Z I. ſumatur in N Z. quodvis punctum, ut M. à quo ducatur M O. parallela Z I. & fiat rectang. N M O. æquale Z pl. per punctum O. circa aſymptotos N R. N M. deſcribatur hyperbole, dabitur poſitione, & tranſibit per punctum I. cùm ponatur rectang. A. in E. ſive N Z I. æquale N M O. ad hanc æqualitatem reducentur omnes quarum homogenea partim ſunt data vel ab A. vel E aut A in E. affecta.

（日本語訳）

第２種の方程式は、*A in E. aeq. Z pl.*　（現代的に書けば「A と E をかけると Z の平方に等しい」）の形のものであるが、このとき点 I は双曲線を描く。

NR を ZI に平行に引き、NZ 上に任意の点 M をとり、MO を ZI に平行に引く。そして長方形 NMO を Z pl に等しくする。O を通り漸近線 NR,NM の間に双曲線を描けばこれは位置が与えられたものであり、A in E すなわち長方形 NZI が長方形 NMO に等しいとき、この曲線は点 I を通る。

既知量の項、A の項、E の項および A in E の項からなるすべての方程式（D^p + A in E aeq. R in A + S in E）は上の方程式に帰着できる。

問１．内容を理解してみよう。

問２．フェルマはどのように考えたのだろうか。また、あなたはどう考えましたか。自分なりの考えを書いてください。（現在の数学やアポロニウスの話と比較しながら）

事前課題

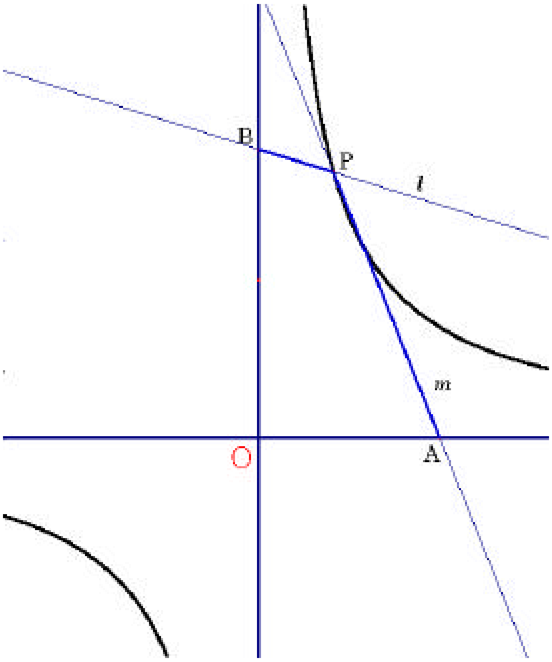
問１．双曲線 $y=\dfrac{6}{x}$ 上に任意の点 P(x_0, y_0)をとる。P を通り 傾き a, b の直線をそれぞれ l, m とする。

(1) l と y 軸との交点 B の y 座標を求めよ。

(2) 同様に m と x 軸との交点 A の x 座標を求めよ。

(3) BP，AP の長さを求めよ。

(4) BP・AP を計算せよ。



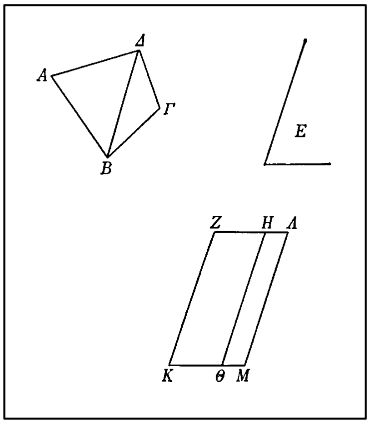
(5) 上の結果からなにがわかる（または推測できる）か？

「ユークリッド原論」について

【図１】

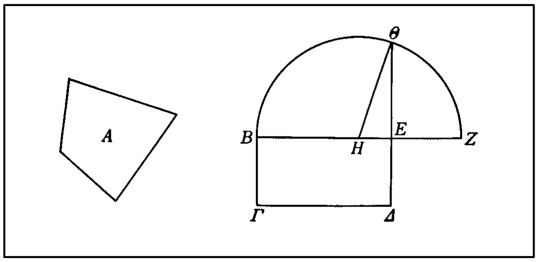
第１巻　命題 45

与えられた直線角のなかに、
与えられた直線図形に等しい
平行四辺形をつくること



第 2 巻　命題 14

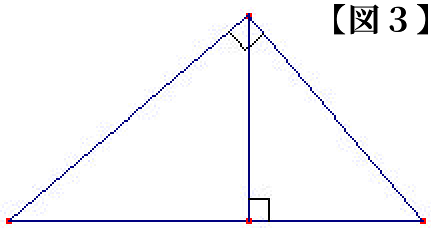
【図 2】



与えられた直線図形に等しい
正方形をつくること

（1） 右の【図 3】で、$a:b=b:c$
　　であることを証明しよう。(比例中項)

【図 3】



（2）ユークリッド原論　第 2 巻命題 14 の説明を穴埋めしてみよう。

A を与えられた直線図形とする。

まず【図 2】で、A に等しい直角平行四辺形 $B\Delta$ をつくる。

これを作ることは、第 1 巻命題 45 にもとづいていて、この命題 14 の $B\Delta$ は、「与えられた直線角」(【図 1】でいうと角 E)が 90°の場合である。

もし、BE と（　　）が等しければ、証明は終わり。

等しくなければ、$BE > E\Delta$ とし、$EZ = E\Delta$、$BH = HZ$ とする。

H を中心とし、HB または HZ を半径として半円 BqZ を描く。

Bq, qZ を結ぶと、$BE : Eq =$ (　　　　) : (　　　　)が成り立つ。

$EZ =$ (　　　　　) なので、$BE : Eq = Eq :$ (　　　　　)　ゆえに $Eq^2 =$ (　　　　)(　　　　)

よって、$B\Gamma\Delta E$ は直線図形 A に等しい。

ゆえに、直線図形 A も Eq 上に描かれた正方形に等しい。

> ユークリッドは紀元前 4 世紀ぐらいのギリシアの人で、彼の書いた『原論』は数学書の中で最も大きい影響力をもったものです。全 13 巻、467 もの命題を含み、ギリシア古典期の数学的知識を見出すことができます。

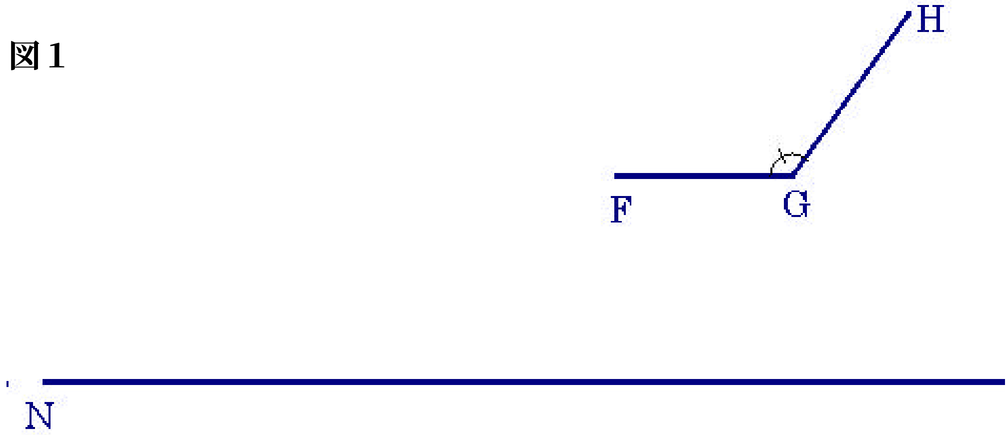
１日目の課題

２年　　組　　番　名前＿＿＿＿＿＿＿＿

問１．

図１において直線上Ｎが固定されている。与えられた角度を∠ＦＧＨとして、フェルマの方法で“３Ａ＝Ｅ”を図形に表現せよ。

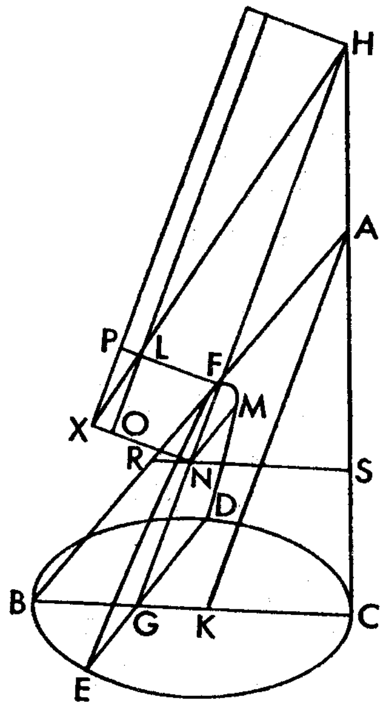
図１



フェルマについて学んだこと、思ったことを何でも書いてください。

以下はアポロニウスによる円錐曲線のうち、双曲線に関する定義である。

<u>命題 12</u>　点Ａを頂点、円ＢＣを底面とする円錐がある。軸を通る平面でこの円錐を切断し、断面として三角形ＡＢＣを作る（命題３による）。
三角形ＡＢＣの底辺ＢＣに垂直な直線ＤＥを含む平面で円錐を切断し、断面として円錐面上に曲線ＤＥを作る。



平面が三角形ＡＢＣの辺ＡＣと円錐の頂点を越点Hで交わるとき、ＦＧを断面の直径と呼ぶ。

点Ａを通り断面の直径ＦＧに平行に直線ＡＫをKがＢＣを分けるようにする。

点からＦＧに垂直に直線ＦＬを、次を満たすように引く。

sq.KA : rect.BK,KC :: FH : FL

断面上任意に点Mをとる。Mを通り、ＤＥに平行に直線MNを引き、Nを通り、直線ＦＬに平行に直線NOXをとる。直線ＨＬをXに延長し結ぶ。ＦNに平行にＬ、Xを通る直線をそれぞれＬＯ、ＸＰとする。

ＭＮ上の正方形は平行四辺形ＦＸに等しい。ＦXは幅をＦNとし、ＨＦ、ＦＬによって囲まれた長方形に相似な図形ＬＸによって越えられ、あてはまる。

Ｎを通ってＢＣに平行な直線をＲＮＳとし、ＤＥに平行な直線をＮＭとする。MNとＲＳを含む平面は円錐の底面であるＢＣとＤＥを通る平面すなわち円錐の底面に平行である。したがってその平面による断面は直線ＲＮＳを直径とする円になる。なおMNはその直径ＲＮＳに垂直であるので、rect.RN,NS = sq.MN が成り立つ。

sq.AK ： rect.BK,KC :: FH ： FL

そして sq.AK : rect.BK,KC comp AK:KC,AK:KB

よって、ＦＨ ： ＦＬ comp ＡＫ:ＫＣ,ＡＫ:ＫＢ
しかし　ＡＫ ： ＫＣ :: ＨＧ ： ＧＣ :: ＨＮ ： ＮＳ
　ＡＫ ： ＫＢ :: ＦＧ ： ＧＢ :: ＦＮ ： ＮＲ
よって、ＨＦ ： ＦＬ comp ＨＮ:ＮＳ,ＦＮ:ＮＲ。
そして rect.ＨＮ,ＮＦ ： rect.ＳＮ,ＮＲ comp
ＨＮ:ＮＳ,ＦＮ:ＮＲ
したがって　rect.ＨＮ,ＮＦ ： rect.ＳＮ,ＮＲ :: ＨＦ ： ＦＬ ::
ＨＮ ： ＮＸ
そして、ＨＮ ： ＮＸ :: rect.ＨＮ,ＮＦ ： rect.ＦＮ,ＮＸ
しかし、　rect.ＨＮ,ＮＦ ： rect.ＳＮ,ＮＲ ::
rect.ＨＮ,ＮＦ ： rect.ＸＮ,ＮＦ
したがって、rect.ＳＮ,ＮＲ :: rect.ＸＮ,ＮＦ
ゆえに　sq.ＭＮ :: rect.ＳＮ,ＮＲ　が示された。
ゆえに　sq.ＭＮ :: rect.ＸＮ,ＮＦ

　ＸＮ、ＮＦで囲まれた長方形は平行四辺形ＸＦである。ＭＮ上の正方形はＸＦに等しい。幅としてＦＮを持ち、ＨＦ、ＦＬによって囲まれた長方形に相似な平行四辺形ＬＸによって越えられ、直線ＦＬにあてはまる。

そのような断面を hyperbola（双曲線）という。

（表記の説明）

sq.ＫＡ ― 「ＫＡ（の長さ）の平方」

rect.ＢＫ,ＫＣ ― 「ＢＫとＫＣ（の長さ）の積」

:: ― 「等しい」

ＦＨ ： ＦＬ comp ＡＫ:ＫＣ,ＡＫ:ＫＢ
― 「ＦＨ：ＦＬ ＝ （ＡＫ：ＫＣ）×（ＡＫ：ＫＢ)」