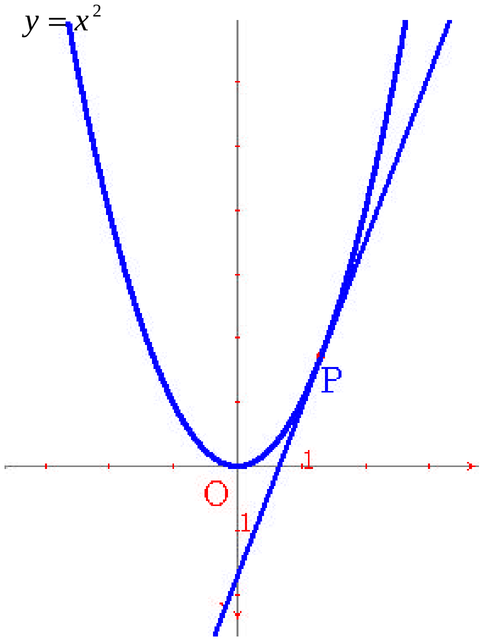
事前課題 2001/10/29

2 年　組　氏名（　　　　　　　　）

曲線の接線を求めてみよう

問題：放物線 $y = x^2$ 上の点 $P(p, p^2)$における、接線と y 軸との交点を求めましょう。

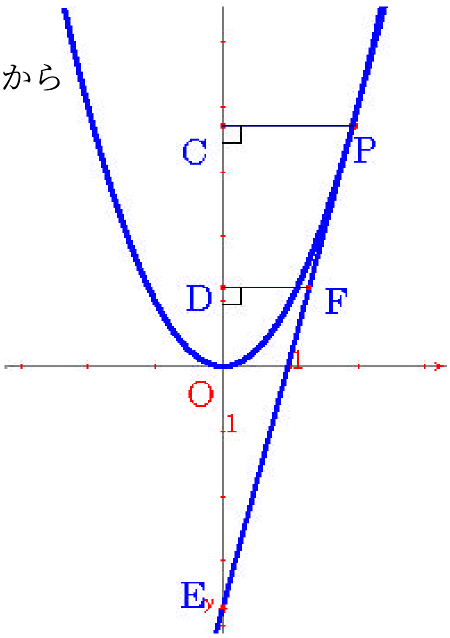
解）



どうでしょう、求まりしたか？17 世紀の数学者、フェルマーは次のような方法で解いていました。皆さんの解法と見比べてみてください。

≪フェルマーの方法≫

フェルマーは接線の方程式を求めることなしに、次のようにして直接 y 軸との交点を求めています。



右の図を見てください。P が放物線上の点なので

$CO = CP^2$がいえます。また F は放物線の外の点ですから

$OD < DF^2$ となりますね。このことから

$$\frac{OC}{OD} > \frac{PC^2}{FD^2} \quad \cdots ①$$

がいえます。また⊿PEC∽⊿FED ですから

$$\frac{PC}{FD} > \frac{CE}{DE} \quad \cdots ②$$

①②より $\frac{OC}{OD} > \frac{CE^2}{DE^2}$ ・・・③となります。

いま、CE＝a　DC=d　CI＝e とおくと

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{(a-e)^2}$$

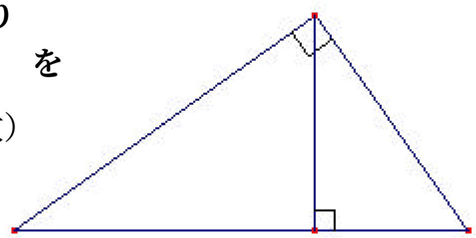
これを整理すると　$de^2 + a^2 e \backsim 2dae$　（ここの∽は、ほぼ同じと言う意味です。）
両辺 e で割ると、　$de + a^2 \backsim 2da$

ここでポイント　D を C に近づけると、e の値はすごく小さくなります。でも相似関係はなくならないので、e＝０と考えてみよう

すると $a^2 = 2da$ から $a = 2d$ となり、**E の位置が C を O に対して点対称な点**だとわかります。

$C(0, p^2)$ **ですから、** $E(0, -p^2)$ **となるわけです。**

≪それ以前のお話≫
最後に、古代ギリシャの人々の接線を紹介します。
ギリシャの人々は右の図から、a：b＝b：c となり
$b^2 = ac$ となると考えていました。そのことから、c　**を**
固定することで、 $a = \frac{b^2}{c}$　（c は定数で a と b は変数）
という放物線が、かけると考えていたのです。



また、下の図からも分かるように、実際放物線を書いてみると、直線 AB が接線になっていることが分かります。また、彼らは、軸に対して平行な直線が、放物線に反射すると、全て、焦点と呼ばれる一点 O に集中することも知っていたのです。すごいですね。