出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.262-275、2002年3月

他教科との関連を踏まえた数学史の授業実践

－Brachistochrone Problem を題材に－

筑波大学大学院修士課程教育研究科
齋藤　康則

要約

現在懸念されている「数学離れ」「学力低下」の問題や，新学習指導要領の実施に伴う授業時数削減を考えるにあたり，2003 年度から高等学校に導入される「数学基礎」の中の数学史を題材にした，他教科との合理的な取り組みを導入した数学の授業実践を行った。その結果，生徒の持つ数学のイメージをよい方向に変容させた。また，他教科を取り入れた数学の授業は生徒に，教科どうしが関わりのあるものであると認識させることができた。

１．はじめに

「数学って暗記教科だよね？」これは，ある中学生の言葉である。「どうして数学を学習しなければならないの？」「数学って何に役立つの？」このようなことを言う生徒に対し，適切な解答を示すことができないのが筆者の現状であるが，これらの発言は，生徒が「数学」というものをどのように捉えているのかを考えていく上で必要なものである。また，これらの言葉を耳にする中，現在「数学離れ」が懸念されている。例えば，高等学校では「受験のための数学」というイメージがどうしても強調され，授業の中で数学を楽しむまでには至らず，これが「数学離れ」の要因と筆者は考える。筆者が高校生(14 名)に実施したアンケート『問：あなたが今までに受けた数学の授業の印象を自由に書いて下さい。』の回答の中にも，「難しく，わけの分からないときもある。」「あまり面白くない。」「きちんと理解できない。」といった回答が目立ち，数学を楽しむ要素が授業にはあまりないことが推測できる。

2002 年度より小・中学校で，2003 年度より高等学校で新学習指導要領が実施されるが，学校週５日制に合わせ，小・中学校では授業時数を年間 70 時限カットする。中学校数学は，現行の学習指導要領では，1 年：3 時間，2 年：4

時間，3 年：4 時間(各学年とも週当たり)であったのが，新学習指導要領では，１年：３時間，２年：３時間，３年：３時間(各学年とも週当たり)となる。これでは，授業時数削減により数学と接する機会が減少し，現在懸念されている「数学離れ」「学力低下」等の問題解決までには至らないと筆者は考える。

ここで，筆者は上記の問題点「受験のための数学」「数学離れ」等を考えるにあたり，2003 年度より高等学校で施行される「数学基礎」に注目した。「数学基礎」は「生徒の主体的な活動を重視し，具体的な事象の考察を通して学習が進められるようにする」ということで，生徒の興味・関心，学習意欲などを高める科目と考える。このことから筆者は,「数学基礎」の目標の冒頭「数学と人間とのかかわり」に着眼点を置いた，数学史を利用した授業が効果的と考える。数学史に関して，恩田(1998)は，一次文献の利用とその意義について考察をし，礒田，土田(2001)は「歴史解釈の方法としての解釈学を，数学を教える教室に持ち込む」という主張(Jahnke，1994)について具体的な事例を挙げ，生徒の持つ数学観の変容を確認している。本研究では両者の視点に立ち，一次文献の利用及びその解釈を通して，生徒の持つ数学観がどのように変容するかを考察していく。考察にあたっては， Tzanakis and Arcavi (2000)の「教授における歴史の統合が一目見ただけで関連のない領域間の連結を引き出すことを助ける」という主張と， Grugnetti and Rogers (2000)の「歴史的文脈から問題について考えることが物理学と数学の学習をより意味のあるものにする」という主張に視点を置いた,「物理」に関連のある数学史による，他教科との合理的な取り組みを導入した数学の授業実践を基に行っていく。また，この実践が授業時数削減に対する１つの策になるかどうかも考察していく。

２．研究目的と方法

①研究目的：数学史の教材として“ Brachistochrone Problem－最速降下曲線問題－ ”を導入し，数学的事実や物理現象が発見・発展されるまでの歴史的過程について，原典における追体験及び数学的活動を行っていく中で，これまでに持っていた生徒の数学観や生徒がイメージしている教科間の関連性がどのように変容するかを明らかにしていく。

②研究方法：本研究の目的を達成するために，以下の課題を設定する。

【課題１】数学史を授業に導入することにより，既に生徒が持っている数学や数学の授業に対する考え方がどう変化するか。

【課題２】“ Brachistochrone Problem ”を授業教材に用いることで，生徒は数

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.262-275、2002年3月

学と物理の関連性をどうとらえるか。

【課題３】生徒の，数学的事実や物理現象の発見・発展の歴史的過程に触れる体験が，生徒の数学観に変容をもたらすことができたか。

これらの課題に基づいて実践授業を行い，授業の事前・事後に行ったアンケートの回答や授業毎の感想，授業の様子を撮影したビデオ等により考察する。

３．授業概要

①授業環境

(１)授業対象：宇都宮大学教育学部数学科専攻，(主に)２年生

(２)実施期間：平成 13 年 10 月 31 日(水)，11 月７日(水)，11 月 14 日(水)
「数学科教育法ＢⅠ」の授業内(10：30～12：00)

②授業目標

・最速降下曲線問題がどのような問題なのかを理解し，当時，どのように解かれていたかを原典を読んで追体験する。

・数学を用いて物理的現象を解明することをきっかけに，「数学」「物理」という教科間の関連性を考えてもらう。

・平成 15 年度実施の新学習指導要領における数学史の位置付け・役割を，数学史を利用した授業を通じて考えてもらう。

③教材解説

本研究では，「数学」「物理」の関連性を考えていくにあたり，『A Source Book in Mathematics』の中の『Brachistochrone Problem』を基に教材開発を行った。Brachistochrone Problem とは,『重い物体が自重の力で，ある点Ａから任意の他の点Ｂへ最も速い速度で落下するときの，曲線ＡＤＢを求めなければならない』というものである。この問題はニュートンやライプニッツなどの数学者が解いており，「倒立したサイクロイド曲線」という解を導いている。現在，Brachistochrone Problem は「変分学(数学的には，未知な関数とその導関数を含む式の積分に，極値を与えるような関数を求める問題)」の分野で取り上げられる内容であり，変分原理は力学，電磁気学，光学，量子力学など様々な物理分野で利用されている。今回の授業ではこの手法を用いて問題解決するのではなく，Brachistochrone Problem を提案したジャン・ベルヌーイ自身の解法を追体験する授業形式を採用した。また，この問題は微積分(ここでは主に置換積分を利用した解法)を用いて解くことが可能である。授業ではベルヌーイの解法との比較を行うのと共に，微分積分学の歴史的背景や置換積分の有用性等につ

いて考えていった。

授業の資料には，原典である『Leibnizens mathematische Schriften（ドイツ語)』とその英語訳である『A Source Book in Mathematics』，またそれを筆者が日本語訳したものを用いた。また，Brachistochrone Problem を解くのに必要な基本事項(物理に関した内容：等速直線運動，等加速度直線運動，光の屈折の法則，フェルマーの原理)を確認するための資料や平成 15 年度施行の高等学校学習指導要領の『数学基礎』に関した部分を抜粋して作った資料も用意し，授業の中で活用した。

④授業展開

【第 1 日目】：微分積分学の歴史，Brachistochrone Problem の紹介，物理公式の確認，「２つの坂道問題」を利用した Brachistochrone Problem の解法

NEW PROBLEM

Which Mathematicians Are Invited to Solve[3]

If two points A *and* B *are given in a vertical plane, to assign to a mobile particle* M *the path* AMB *along which, descending under its own weight, it passes from the point* A *to the point* B *in the briefest time.*

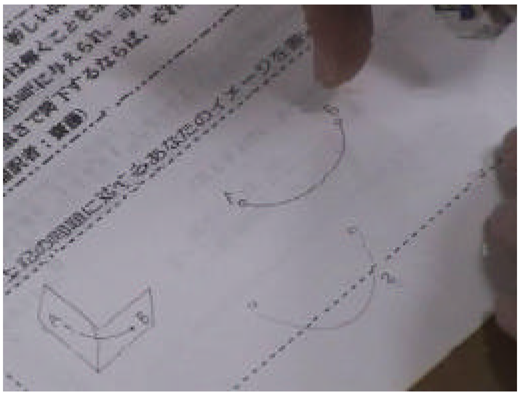
【問題１】Brachistochrone Problem

●微分積分学の歴史

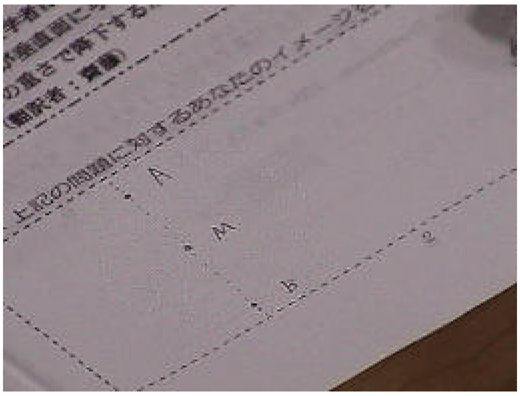
授業の最初に，微分積分学の歴史について簡単に触れた。高等学校では微分を先に取り扱っているが，歴史的に古いのは積分であること，ニュートンやライプニッツが微積分の体系を作ったことなどを Power Point を用いて説明した。

●Brachistochrone Problem の紹介

授業では，左の【問題１】を提示したあと，経路ＡＭＢがどのような経路になるか予想をしてもらい，テキストに予想した経路を描いてもらった(【写真１，写真２】)。その際，Brachistochrone Problem の日本語訳が「最速降下曲線」であることは伏せ，経路を予想する環境を作った。実際，この予想の場面で直線経路と曲線経路の２つの考えが出されたが，本授業では，直線経路の立場に立って Brachistochrone Problem の問題解決を行った。

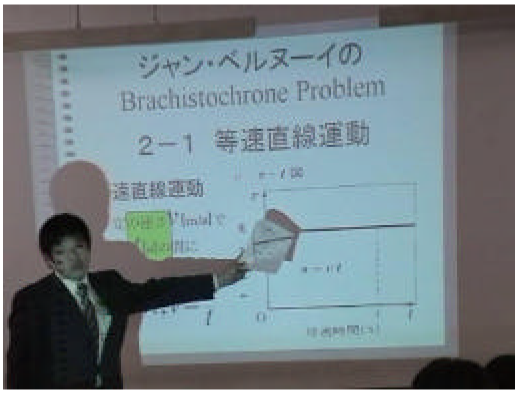


【写真１】



【写真２】

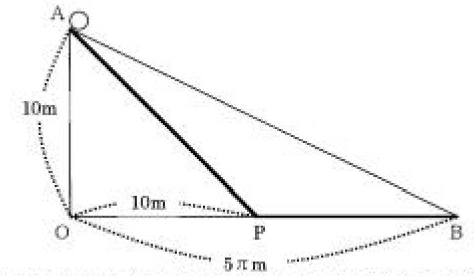
出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.262-275、2002年3月



【写真３】

●直線上の物体の運動(物理公式の確認)

ここでは等速直線運動，等加速度直線運動についての説明を行った。高校で物理を履修していない学生もいることを配慮し，穴埋め形式のテキストを用い，また公式を示すためにグラフを用いた。【写真３】は，筆者がグラフをいて等速直線運動の説明(Power Point を利用)をしているところである。



地上から１０mはなれた地点Aから斜面にそって質量５ｋｇのボールを転がすとき，ボールがルートABとルートAPBのどちらのルートを転がると先に地点Bに到着するか，考えなさい。

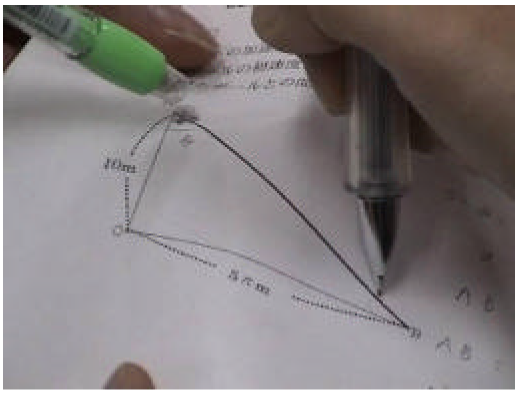
【問題２】２つの坂道問題

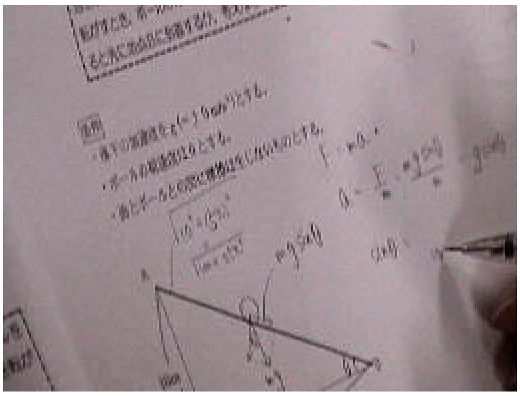
●２つの坂道問題

等速直線運動，等加速度直線運動の公式を利用して左の【問題２】に取り組んでもらった。記述式のワークシートを配布し，自分なりの考えや解法をまとめてもらった。自力解決を試みる学生もいれば，周囲で相談しながら解法を考える学生もいた。活動の途中で授業時間が終了になったので，２日目にこの答え合わせを行った。

※初日は，大学の授業参観に来ていた高校 1 年生 14 名を交えての授業だった。物理は 14 名中 13 名が未習で，三角比に関しては $\sin q$，$\cos q$，$\tan q$ を知っている程度だった。２つの坂道問題については，「難しい」という感想が多かったが，「解けなかったけれど，楽しかった」という感想もあり，「数学」「物理」へのよい動機付けになった。

【写真４】高校生を交えての授業





【写真５】２つの坂道問題を考え中

【第２日目】：２つの坂道問題の答え合わせ，フェルマーの原理，課題提示

【学生の解答(ＡＢ間：t_1秒，ＡＰＢ間：t_2秒)】

・$t_1 = \sqrt{2+\frac{p^2}{2}}$　2.6，$t_2 = 2+\frac{(p-2)\sqrt{2}}{4}$　2.4(π 3で計算)より，$t_1 > t_2$。よってＡＰＢ間の方が早い。

・$t_1 = \frac{\sqrt{p^2+4}}{\sqrt{2}}$，$t_2 = \frac{\frac{p}{2}+2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

$(t_1$の分子$)^2-(t_2$の分子$)^2>0$より，$t_1 > t_2$。よってＡＰＢ間の方が早い。

・$t_1 = \sqrt{2+\frac{p^2}{2}} = 2.633\cdots$，

$t_2 = 2+\frac{(p-2)\sqrt{2}}{4} = 2.404\cdots$(関数電卓利用)より，

$t_1 > t_2$。よってＡＰＢ間の方が早い。

【テキストの記述】

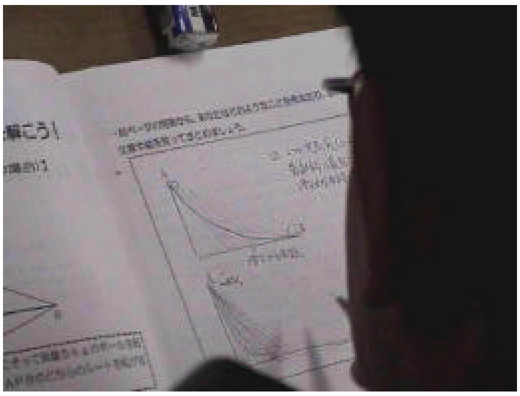
・最終的な最短ルートは点Ａ，Ｂを結ぶ滑らかな曲線になると思われる。
・曲線ルートが早く着きそう。
・はじめは落下に近い，点Ｏ付近でカーブは急になり，点Ｂ近くでは水平に近い。

⇩

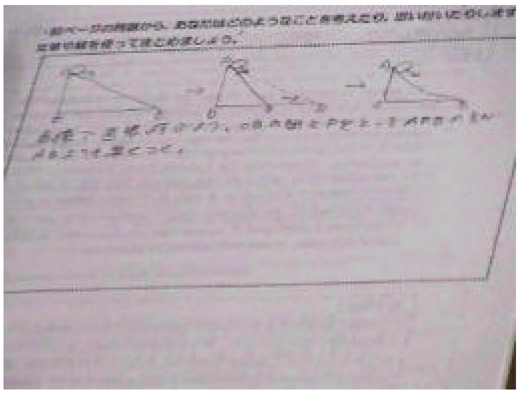
本授業から曲線経路の立場で考える

●２つの坂道問題

基本的に等速直線運動，等加速度直線運動の公式を利用した解答がほとんどだった。時間の大小関係を調べる場面では，主に左の【学生の解答】のような３種類の方法が挙げられた。学生にとって，答えは１つでも，それにたどり着くまでのプロセスは何通りもあることを実感することのできた活動であったと考える。また，学生の感想の中で,「私はＡＢ間の方が早いと予想していましたが，実際に計算してみて，ＡＰＢ間の方が早いことに驚きました。」というようなものがあった。この活動を通して，改めて Brachistochrone Problem の解について考える場面を作ることができ，２つの坂道問題は数学への興味・関心を高める効果的な教材であったと言える。(【写真６，写真７，テキストの記述】：２つの坂道問題から考察できることを図や言葉でまとめている。)

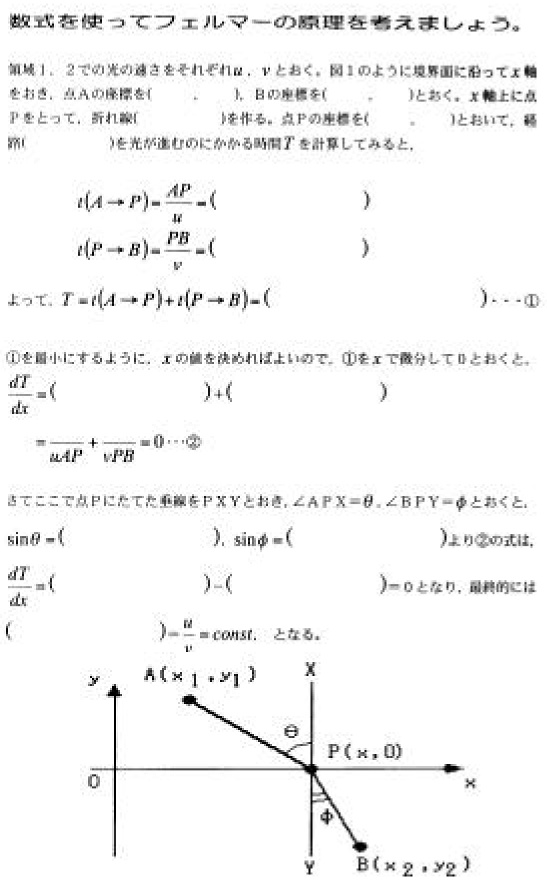


【写真６】



【写真７】

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.262-275、2002年3月



数式を使ってフェルマーの原理を考えましょう。

領域1、2での光の速さをそれぞれu，vとおく。図1のように境界面に沿ってx軸をおき，点Aの座標を(　　，　　)，Bの座標を(　　，　　)とおく。x軸上に点Pをとって，折れ線(　　　　)を作る。点Pの座標を(　　，　　)とおいて，経路(　　　　)を光が進むのにかかる時間Tを計算してみると，

$$t(A\to P)=\frac{AP}{u}=(\qquad\qquad)$$
$$t(P\to B)=\frac{PB}{v}=(\qquad\qquad)$$

よって，$T=t(A\to P)+t(P\to B)=(\qquad\qquad)\cdots$①

①を最小にするように，xの値を決めればよいので，①をxで微分して0とおくと，

$$\frac{dT}{dx}=(\qquad\qquad)+(\qquad\qquad)$$
$$=\frac{\qquad}{uAP}+\frac{\qquad}{vPB}=0\cdots②$$

さてここで点Pにたてた垂線をPXYとおき，∠APX＝θ，∠BPY＝ϕとおくと，

$\sin\theta=(\qquad\qquad)$，$\sin\phi=(\qquad\qquad)$より②の式は，

$\frac{dT}{dx}=(\qquad\qquad)-(\qquad\qquad)=0$となり，最終的には

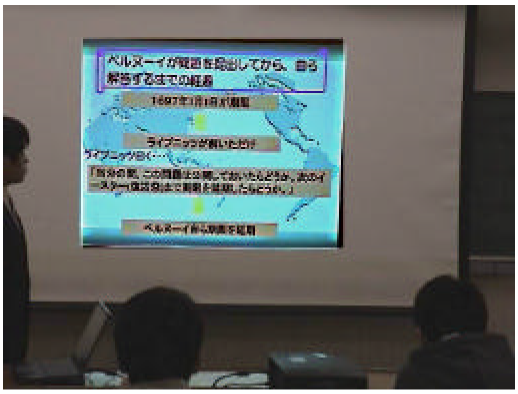
$(\qquad\qquad)=\frac{u}{v}=const.$　となる。

【ワークシート】フェルマーの原理の解法

●フェルマーの原理

Brachistochrone Problemを解く際，ジャン・ベルヌーイは落下運動を光の運動(ここでは光の屈折)に置き換え，問題を解いている。ここではベルヌーイの解法を追体験するにあたり，フェルマーの原理を導入した(この段階で，学生は，最速降下曲線問題を光の概念を用いて解くことは知らされていない。)。この原理は，『2点間を結ぶ光の経路は，その時間を最小にするものである』というもので，高校の微積分のレベルでも証明できる。学生には左の【ワークシート】を使って証明を行ってもらった。

実際に証明すると，$\frac{\sin q}{\sin f}=\frac{u}{v}$を満たす$q$，$f$が存在するとき時間は最小を示す。



【写真８】

●事前課題

最終日にBrachistochrone Problemを解くにあたり，次のような課題を提示した。

①ベルヌーイが問題を提示してから，自ら解答するまでの経過

②ベルヌーイが幾何学者と微分積分学者へ抱いた思い

③ベルヌーイがBrachistochrone Problemを解く際に用いた方法

この課題は，Brachistochrone Problemに潜む歴史的背景を考えながらベルヌーイの解法を追体験してもらおうという筆者の意図から提示したものである。課題は『A Source Book in Mathematics』の日本語訳(筆者の翻訳による)を基に考えてもらった。上の【写真８】は，最終日にこの課題に関して解説(Power Pointを利用)をしているところである。

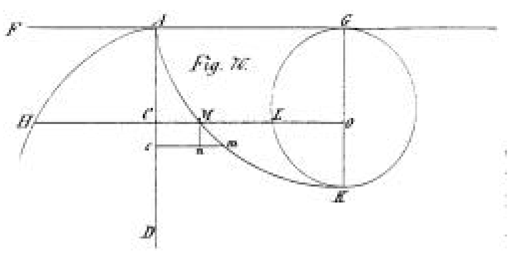
【第３日目】：Brachistochrone Problem の問題解決

Sic generaliter solvere licet problema nostrum, quamcunque statuamus accelerationis legem. Eo enim reductum est, ut quaeratur curvatura radii in medio secundum raritates, prout libuerit, variante. Esto ergo medium FGD (fig. 70) terminatum ab horizontali FG, in qua punctum radians A, verticalis AD axis curvae datae AHE, cujus applicatae HC determinant raritates medii in altitudinibus AC, vel velocitates radii seu globuli in punctis M; radius incurvatus ipse qui quaeritur, AMB. Vocentur AC, x; CH, t; CM, y; differentialis Cc, dx; different. nm, dy; diff. Mm, dz; constans quaedam ad arbitrium assumta, a. Erit accepta Mm pro sinu toto, mn sinus anguli refractionis seu inclinationis curvae ad verticalem, et proinde per ea, quae modo diximus, mn est ad HC in ratione constante, id est, $dy.t = dz.a$; quod hanc suggerit aequationem, $a\,dy = t\,dz$, seu $aa\,dy^2 = tt\,dz^2 = tt\,dx^2 + tt\,dy^2$, quae reducta generalem dabit aequationem differentialem $dy = \frac{t\,dx}{\sqrt{aa - tt}}$ pro curva AMB quaesita. Atque adeo una opera duo insignia problemata, opticum unum, mechanicum alterum, ultra quam ab aliis petebam, resolvi, ostendique, quamvis ex diversissimis Matheseos partibus sint desumta, ejusdem tamen esse naturae.

Sumamus jam specialem casum, et quidem hypothesin communem a Gallilaeo primitus introductam et demonstratam, quod velocitates gravium cadentium sint in ratione subduplicata altitudinum emensarum; in hoc enim proprie quaestionis tenor consistit. Quo supposito, curva data AHE erit parabola, id est, $tt = ax$ et $t = \sqrt{ax}$, quae si substituantur in aequatione generali, habebitur haec $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, ex qua concludo Curvam Brachy-

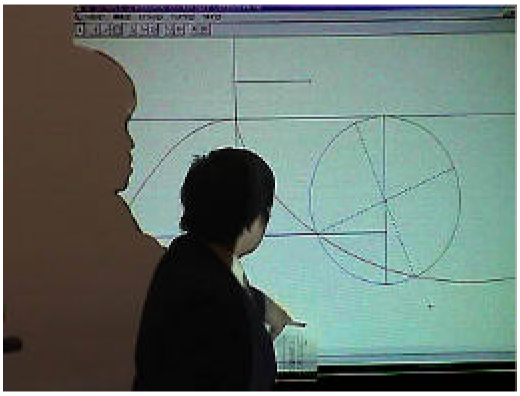
III. 20

stochronam esse Cycloidem vulgarem. Si enim circulus GLK, cujus diameter = a, rotetur super AG et initium rotationis sit in ipso A, describet punctum K cycloidem, quae reperitur eandem habere aequationem differentialem $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, positis AC, x, et CM, y; potest tamen hoc a priori et analytice inveniri sic: $dx\sqrt{\frac{x}{a-x}} = \frac{x\,dx}{\sqrt{ax - xx}} = \frac{-a\,dx + 2x\,dx}{2\sqrt{ax - xx}} + \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax - xx}}$ est autem $\frac{a\,dx - 2x\,dx}{\sqrt{ax - xx}}$ differentialis quantitas, cujus summa $\sqrt{ax - xx}$ seu LO; et $\frac{a\,dx}{2\sqrt{ax - xx}}$ est differentialis ipsius arcus GL; ideoque, summata aequatione $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, habebitur y seu CM = GL − LO, ergo MO = CO − GL + LO; quoniam vero (assumta CO = semiperipheriae GLK) CO − GL = LK, erit MO = LK + LO, et ablata communi LO, erit ML = LK; quod docet curvam KMA esse Cycloidem.

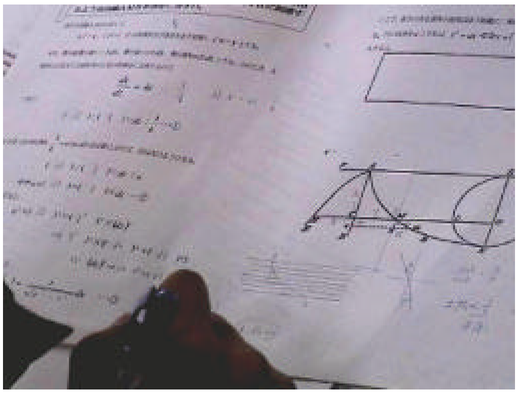


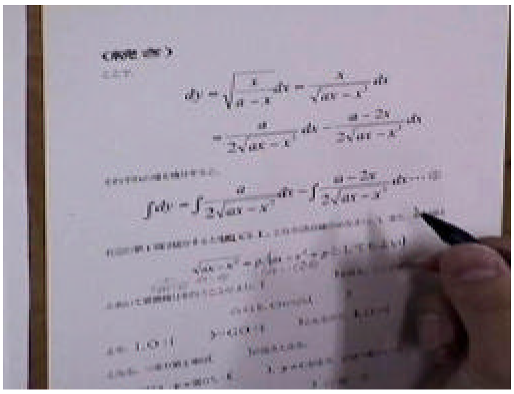
【原典】Leibnizens mathematische Schriften

最終日は原典に基づいて，ジャン・ベルヌーイの解法を追体験してもらった。また，現在の解法(置換積分を利用したもの)と比較する活動を行った。



【写真９】Cabri-Geometry を利用した Brachistochrone Problem の解説(左の【原典】の図を参照)





【写真 10】最速降下曲線問題を解答中

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.262-275、2002年3月

４．考察

学生のアンケートの回答より，【課題１】から【課題３】について考察する。(回答の A，B，C，・・・は学生，物○は物理履修者，物×は物理未履修者をそれぞれ示す。)

(１)【課題１】「数学史を授業に取り入れることにより，既に生徒が持っている数学や数学の授業に対する考え方がどう変化するか。」に関して

【Ⅰ】今回の数学史を用いた数学の授業は，今までに受けてきた数学の授業と比較してどうでしたか。(事後アンケートより)

【回答】

A(物×)：数学史を用いた数学は，今までの問題解決だけの授業とは違っていろいろ役立つことも多くてよいと思う。

B(物○)：今までに受けてきた数学の授業では，公式・定理の簡単な証明及びその使い方(練習問題をやる)といった内容の繰り返しがほとんどで，その定理・公式が作られた時代背景は説明されることはなかった。身の回りで起こりうる現象を数学を使って考えることは，興味・関心を引く意味においても，大きいと思う。昔の人々の知恵を実際に感じることが，数学史を用いることでできるのではと思った。

C(物○)：高校までの授業では，いきなり定理などが与えられて，そこから話を展開させていくような形式の授業だったが，今回の数学史を用いた授業では，具体的なある問題があって，その解決のための必要性から微分積分という考えが使われているという，まさに数学的思考の有用性を認識させるのに最適な授業だと思う。「数学をやることには意味がある」ということを生徒に意識させるには非常に有効な授業である。

学生がこれまでに受けてきた数学の授業は，「例題→練習問題という流れ」「黒板を写す→解く→黒板を写す→解く→・・・」「ただ問題を解くだけ」などといったものであった(事前アンケートより)が，時代背景を考え，当時を感じながら数学に取り組むことにより，数学の授業の印象をよいものに変えるのと同時に，数学や数学史への興味・関心，学習意欲が高まることが確認できた。

【Ⅱ】あなたは数学をどんな学問と思いますか。自由に書いて下さい。(事前・事後アンケートより)

【回答】

D(物○)：「ある意味，非常に確立されている気がする。開拓するのが困難だ。」(事前)

「物理を支える，非常に重要な学問。人の主観性を時には裏付け，時には否定する。分かると面白いが，分からないと授業が非常につらい。しかし，「なぜそうなるのか」が客観的に示せるので，理解しやすい学問である(国語・社会に比べて)。」(事後)

E (物○) :「論理的で筋の通った学問だと思う。」(事前)

「あらゆる学問分野の基礎をなす学問だと思う。まだ数学という学問分野には無限の広がりがあるのではないかと感じている。古代からの積み重ねの上に現代の，今，私達が勉強している数学が成り立っているとするならば，これから先も今ある数学を基礎にして，きっと新しい数学がうまれるのだと思う。また，数学の進歩に伴い，きっとその他の学問分野も新たな境地を切り開くことになるのではないかと思う。」(事後)

F (物○) :「いろいろな他の分野・学問の基礎となるものだと思う。具体的な例はあげられないが，建築などにおいても，建物の様々な部分を計算してあるといった風に。」(事前)

「数学は，日常生活において基本となるところにあるものだと思う。身の回りには，数学をもとに作られたものなどがたくさんあると思う。また，数学は他の学問の問題にも，解くことについて根底にあるものだと思う。」(事後)

学生は数学史の授業を通じて,「数学は他分野，日常生活において土台となる教科である」ことを認識することができた。つまり,「数学をどうして学ぶの？」「数学が何に役に立つの？」といった質問に答えることができるきっかけを作ることができたと言えよう。本授業で，数学を学ぶ意義について考えるきっかけをつくることができたのではないだろうか。

【Ⅰ】【Ⅱ】より，数学への興味・関心，学習意欲を高め，数学をする意義を理解するのに，解釈学的営みを数学の授業に取り入れることは有効である。

(2)【課題２】「“Brachistochrone Problem”を授業教材に用いることで，生徒は数学と物理の関連性をどうとらえるか。」に関して

・授業全体についてや数学・物理への興味・関心など，今日の授業を通じて思ったことを自由に書いて下さい。その際，先週までの授業や今までに受けてきた数学の授業と比較して書いて下さい。(事後アンケートより)

【回答】

G(物×)：数学と物理は関係あると思った。しかし，私は高校で物理を全くやっていないので，制度を見直した方がよいと思った。

H(物○)：数学と物理が切り離された存在ではないことが分かった。今までは数学なら数学だけ，物理なら物理だけといった内容の授業が多かったが，一度に２つのことを学ぶ授業であった。

I (物×)：今までにない形で興味深い授業だった。数学や物理に対する考え方も少しだけ変わったような気がする。

J (物○)：物理分野の問題を扱ったことで，今までとは違う感じの数学だなと思った。

授業の感想に「物理には高校時代からの苦手意識があり，やはり好んで深く知りたいとはあまり思わない。だが，知っていれば，原理から導かれることに納得

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.262-275、2002年3月

し，役に立つと思う。そしてそれは，今，私が学んでいる数学ととても結びつきが強いことを先週・今週を通して知った。嫌だ嫌だと思っていては身に付くことも付かないと思うので，これからは物理にも意欲を持って取り組んでいこうと考えた。」と書いてくれた学生がいたが，物理現象を取り扱った数学史の導入により，数学と物理の距離間隔が縮まること，物理に対する興味・関心が湧くことがアンケート回答から確認できた。高等学校で物理を履修していない学生にもそのような傾向が見られたので，数学史は教科間のつながりを持つことのできる教材であると言うことができる。

(３)【課題３】「生徒の，数学的事実や物理現象の発見・発展の歴史的過程に触れる体験が，生徒の数学観に変容をもたらすことができたか。」に関して

・あなたが持っている微分積分のイメージを自由に書いて下さい。(事前アンケートより)
・今回の授業で『微分積分学』をどのように考えましたか。(事後アンケートより)

【回答】

K(物○)：「計算だけならそれほど難しくはないが，微分と積分の概念を理解するのは難しいと思う。(自分もよくは理解していない。)」(事前)
「高校までの授業では「微分積分学」といっても計算練習が主だったが，今回の授業では微積分がどのように役立つかということが少しわかった気がする。微小なものを考える微分やそれを足し合わせる積分の考えは，改めてすごいなと感じた。」(事後)

L(物○)：「微分→曲線の概形を知るために使う。(主に曲線の接線を求めるイメージがある。)」「積分→計算がとても大変だった。(面積・体積の値を求めるのが大半であった。)」(事前)
「今回は一見，物理学のように見える問題も「微分・積分」という極小区間を考え，ホイヘンスの光の屈折を取り入れたことによって，問題を解決している。まさに，「細かく区切ったものを全てあわせる」という概念に基づいて作られたものであると感じた。」(事後)

事前アンケートの回答には，高等学校で得た微分積分学のイメージ(面積や曲線，接線を求めるという考え方，計算が大変・難しい)が多く書かれていたが，原典の追体験・数学的活動を行っていく中で学生は，微分積分学の「存在性」，「広がり・応用」等，考え方を膨らませることができた。それは，Brachistochrone Problem を解く前に提示した事前課題からも考察することができる。

次の不定積分

① $\int \sin^2 x \cos x dx$ 【$\sin x = t$】　　② $\int \sqrt{\frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx$ 【$x = a \sin q$】

を解くとき，【　　】とおいて積分の計算を行いますが，このように置き換えて積分を行う理由をあ

なたはどのように考えていますか。自由に書いて下さい。

【回答】

・原始関数を求めやすくするため。

・計算しやすくするため。

・置換しないと計算できない，または，置換する以外の方法が見つけづらいから。

上記の回答や筆者の経験から，高校の授業では,「$\sin x = t$ と置換することで積分できる」といった指導しか受けていないと考えられる。つまり，置換積分は計算の道具，手段にしか過ぎないということだ。とはいうものの，置換積分を行う理由が上記のようになることは筆者自身も予想していたことである。

実際に Brachistochrone Problem を解くと，微分方程式 $dy = \sqrt{\frac{x}{a-x}}dx$ が求まる。この微分方程式を現代的に解いた場合，$\sqrt{\frac{x}{a-x}} = \tan f$ と置くことにより，解 $x = \frac{a}{2}(1 - \cos 2f)$ ，$y = \frac{a}{2}(2f - \sin 2f)$ が求まる。授業では，原典の図を利用して，$\tan f$ や $2f = q$ としたときの q の位置を確認することができた。積分の求積問題では図示して考える場面もあるが，置換積分の問題場面を図示して考えることはこれまでの経験をさかのぼっても記憶がない。置換積分を視覚的にとらえることができたことは学生にとっても筆者にとっても驚きであり，学生の持つ微分積分学全体の考え方を変容させた１つの要因になると考える。

５．おわりに

本研究では，数学と他教科との関連性，特に，数学史を利用した授業実践を例に，数学と物理との関連性に焦点を当てて考えてきた。その結果，数学史を利用した授業は生徒の持つ数学のイメージをよい方向に変容させると共に，数学に対する興味・関心，学習意欲を高め，また，物理を取り入れた数学の授業は生徒に「数学」「物理」は個別のものではなく，お互いに関わりのあるものであると認識させることができた。

理科との合科的な取り組みを数学に導入する実践例は他にも考えられる。例えば，「１次関数」に「質量保存の法則」を取り入れた授業，「２次関数」に「物体の落下運動」を取り入れた授業がある。新学習指導要領で授業時数が大幅に削減されるが，これらの実践によりこの問題が少しは解消されると考える。また，今回の実践により数学観を変容させることを結論づけることができたので，今後は理科以外の教科と数学との関連性についても，生徒の持つ数学観が変容するための，また，授業時数削減問題に対応した教材開発及び授業づくりを行っていく必要があると考える。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.262-275、2002年3月

謝辞

実験授業の実施に際して，宇都宮大学教育学部木村寛教授には，貴重なご指導をいただきました。また，その際，多くの関係院生から有意なご意見，ご協力をいただくことができました。厚くお礼申し上げます。

註１：本研究は、筑波大学学内プロジェクト研究（助成研究Ｂ：研究代表者　礒田正美）「インターネット上の数学博物館の開発・評価研究」の一貫として行われた。

註２：授業の詳細、並びに資料は次に掲示している。
http://www.mathedu-jp.org

【引用・参考文献】

【１】礒田正美(2001)．異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒．筑波数学教育研究第 20 号，pp.39-48.

【２】礒田正美・土田知之(2001)．異文化体験を通じての数学の文化的視野の覚醒；数学的活動の新たなパースペクティブ，日本科学教育学会年会論文集，pp.497-498.

【３】岡崎誠(1993)．物理数学 One Point4　べんりな変分原理，共立出版，pp.1-6, pp.26-28.

【４】小畑裕(2002)．落下運動を分析し理解を深めていく「２乗に比例する関数」の導入，教育科学／数学教育　2002 年１月号(No.530)，明治図書，pp.68-73.

【５】恩田洋一(1998)．１次文献を利用した数学史教育に関する一考察～「数学基礎」に関連して～，平成 10 年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

【６】後藤憲一ほか 4 名(1994)．高等学校　物理，数研出版株式会社，pp.8-9，pp.13-16.

【７】スチュアート・ホリングデール(1993)．数学を築いた天才たち(上・下)(岡部恒治監訳)，講談社，上 pp.229-232，pp.248-255，pp.311-312，下 pp.84-86.

【８】文部省(1999)．高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編，pp.31-33.

【９】C.I.Gerhardt(1855)．Leibnizens mathematische Schriften，H.W. Schmidt, pp.305-306.

【10】Constantinos Tzanakis and Abraham Arcavi(2000).Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In John Fauvel and Jan van Maanen(eds.), History in Mathematics Education, Kluwer Academic Publishers, pp.202-207.

【11】David.Eugene.Smith(1959). A source book in mathematics, Dover Publications, pp.644-655.

【12】Jahnke,Hans N(1994).The Historical Dimension of Mathematical Understanding :Objectifying the Subjective, Proceedings of the Eighteen International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol.1, pp.139-156.

【13】Lucia Grugnetti and Leo Rogers(2000).Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. In John Fauvel and Jan van Maanen(eds.), History in Mathematics Education, Kluwer Academic Publishers, pp.55-57.

【上記以外の授業資料作成における参考文献】

【１】伊東俊太郎・原亨吉・村田全(1975). 数学史, 筑摩書房, pp.334-336, p356.

【２】エルンスト・マッハ(1976). 力学の批判的発達史(伏見譲訳), 講談社, pp.343-357, pp.391-400.

【３】エルンスト・マッハ(1976). 力学史：古典力学の発展と批判(岩野秀明訳), 公論社, pp.321-327.

【４】Г.И.グレイゼル(1997). 数学史(Ⅲ)(保坂秀正・山崎昇訳), 大竹出版, pp.134-139.

【５】ゴットフリート・ヴィルヘルム・ライプニッツ(1989). ライプニッツ著作集３　数学・自然学(原亨吉[ほか]訳), 工作舎, pp.100-111.

【６】小堀憲(1956). 数学史, 朝倉書店, pp.99-101.

【７】数学セミナー編集部編(1999). 数学 100 の問題：数学史を彩る発見と挑戦のドラマ, 日本評論社, pp.168-175.

【８】ボイヤー(1984). 数学の歴史４(加賀美鐵雄・浦野由有訳), 朝倉書店, p19, pp.41-47, p.146.

【参考ＵＲＬ】

・http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/analysis/jinmei.htm
・http://www1.sphere.ne.jp/mote/suugaku/asobou2.htm
・http://www2.ocn.ne.jp/~mizuryu/toukou/nissi3.html
・http://www25.tok2.com/home/toretate/d000103.html
・http://www.fes-total.com/websemi/bldg1/fukui/henbun.html
・http://www.geocities.co.jp/Technopolis/8930/qed_00.htm
・http://www.junko-k.com/collo/collo56.htm
・http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~takasaki/soliton-lab/chron/has-hist/index.html
・http://www.mcc.pref.miyagi.jp/people/ikuro/koramu/henbun.htm