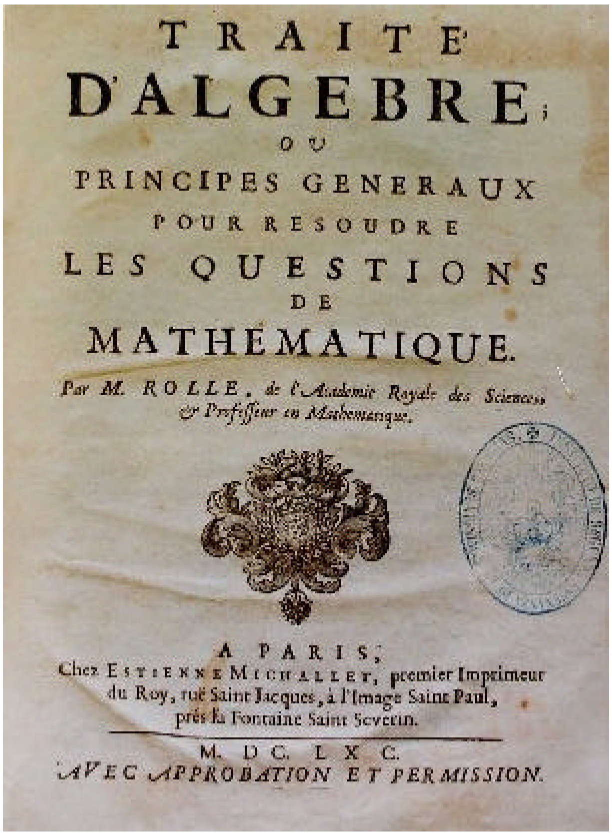
授　業　資　料

授業者：小澤　真尚
（筑波大学修士課程教育研究科）

ROLLE'S THEOREM

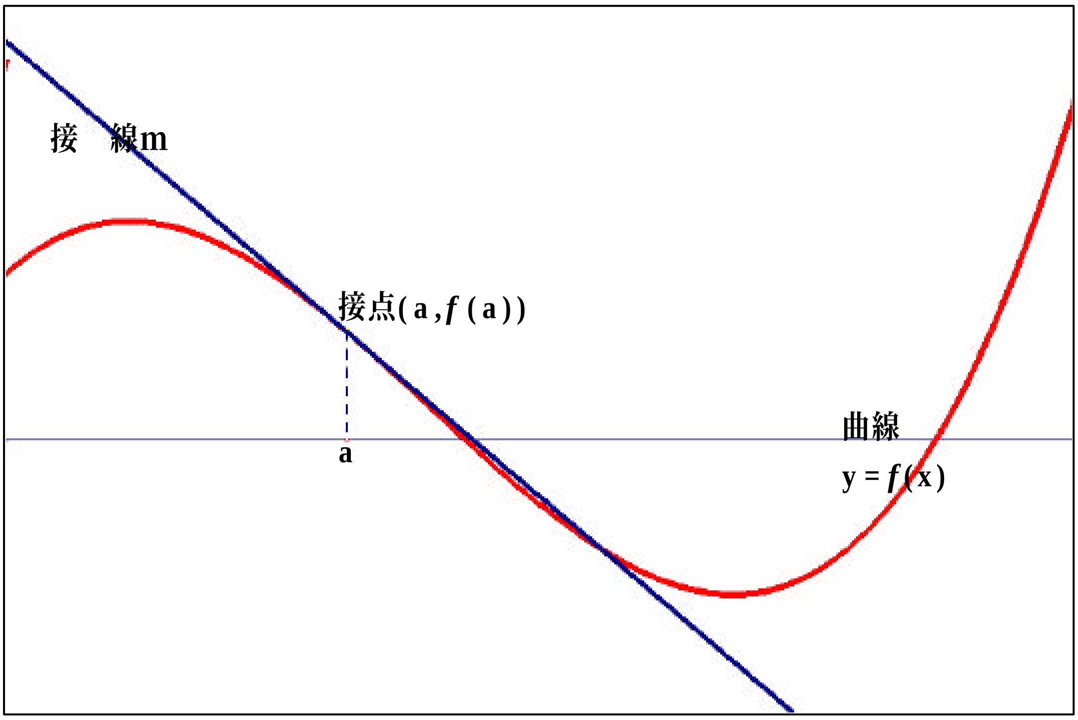


TRAITE'
D'ALGEBRE;
OU
PRINCIPES GENERAUX
POUR RESOUDRE
LES QUESTIONS
DE
MATHEMATIQUE.
Par M. ROLLE, de l'Academie Royale des Sciences, & Professeur en Mathematique.

A PARIS,
Chez ESTIENNE MICHALLET, premier Imprimeur du Roy, ruë Saint Jacques, à l'Image Saint Paul, prés la Fontaine Saint Severin.
M. DC. LXC.
AVEC APPROBATION ET PERMISSION.

年　　組　　番＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

《準備》



曲線 y=*f* (x)で、接線 m の傾き(微分係数という)は、a が変化するにつれて変化する。そこで、a に接線の傾きを対応させるような関数 y=*f* '(x)を考えることができる。

この関数を<u>導関数</u>といい、y=*f* (x)から y=*f* '(x)を求めることを<u>微分する</u>という。

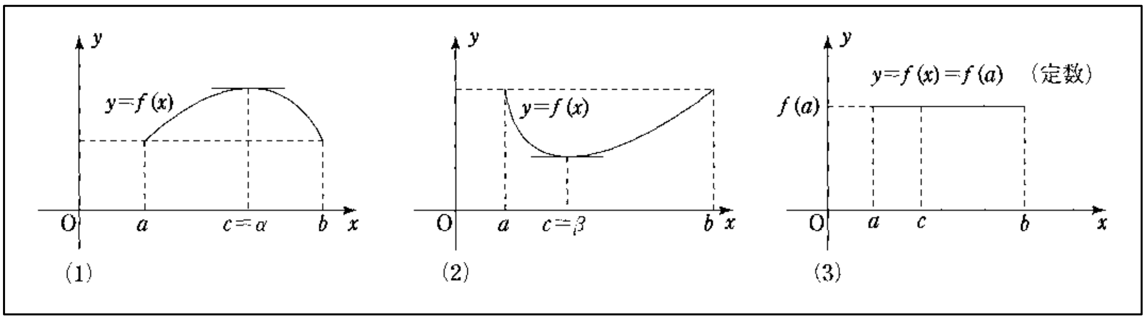
[微分問題]

①$y=x^2$ (=*f* (x)) $\xrightarrow{\text{微分すると}}$

②$y=x^4$ (=*f* (x)) $\xrightarrow{\text{微分すると}}$

③$y=-x^3+10x^2$(=*f* (x)) $\xrightarrow{\text{微分すると}}$

《ROLLE の定理》



関数 $f(x)$が閉区間[a,b]で連続，開区間(a,b)で微分可能

であり，$f(a)=f(b)$ならば

$\boxed{}$ (a ＜ c ＜ b)

をみたす c が存在する。

==================== M E M O ====================

《ヴァリニョンからライプニッツへの手紙》

Varignon to Leibniz

Paris, November 28, 1701

Permit me to assure you of my deepest respect and at the same time to inform you of a work which is being circulated here under your name. It concerns the disagreement between Mr. Rolle and myself, of which you know, regarding your infinitesimal calculus, which he terms false and to which he attributes errors in reasoning. The Abbé Galloys, who is really behind the whole thing, is spreading the report here that you have explained that you mean by the "differential" or the "infinitely small" a very small, but nevertheless constant and definite quantity, such as the earth in relation to the heavens or a grain of sand in relation to the earth. I, on the other hand, have called a thing infinitely small or the differential of a quantity if that quantity is inexhaustible in comparison with the thing. Thus I have called infinite or indefinite everything which is inexhaustible, while I have called infinitely or indefinitely small everything with respect to which a given quantity is inexhaustible.

ヴァリニョンからライプニッツへ

1701年11月28日　パリ

最大の敬意とともに、ここ（パリ）であなたの名のもとになされている研究についてお伝えすることをお許しください。あなたの無限小計算法（infinitesimal calculus）に関してロル氏は私と異なる意見を持っており、彼はそれが間違いで論証に誤りがあると称しております。すべての出来事の影の実力者である かのガロア氏がここ（パリ）で広めているうわさによると、あなたは“differential 微分”や“infinitely small 無限小”を、とても小さいけれども一定で確定した量――たとえば天空と比べての地球、地球と比べての少量の砂――であると説明した、ということになっております。一方私が、あるものを無限小とかある量の微分とか呼ぶのは、そのあるものによって取り尽くせないほどある量の方が大きいときであります。このように私は、“無限”や“不確定”という言葉を、取り尽くせないほど大きいものとして考え、そして“無限に小さい”や“不確定に小さい”という言葉を、与えられた量を取り尽くせないほど小さいものとして考えました。

（「Ways of thought of great mathematicians」，Herbert Meschkowski より）

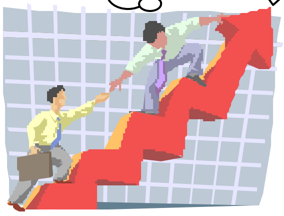
時代背景

『ヴァリニョンは，無限小算法がユークリッドの幾何学と両立させられることを間接的に示し，それによってとりあえず混乱を打開しようとした。というのも，微積分に反対のひとびとのほとんどが，古代の総合幾何学を賛美していたからであった。フランス科学アカデミーにおけるこのような論争は，その時代における文字通りの“古代人対現代人”の対決の一つを思わせるものである。』

（「数学の歴史４」，ボイヤー　より）

討　論
MEMO

１時間目を終えての感想を書いてください。



１時間目課題

年　　組　　　番

１　次の関数を微分せよ。

(1)　**（例）**$y = 6x^2$

$y' = 6 \cdot 2 \cdot x$

$= 12x$

(2)　$y = 5x^3 + 2$

(3)　$y = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 10x - 15$

2　**関数** $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ **について、次の問に答えよ。**

(1)　**①を微分して** $f'(x)$**を求めよ。**

(2)　$f'(x) = 0$ **となる** x **を求めよ。**

(3)　$f(x) = 0$ **のとなる** x **を求めよ。**

(4)　(2),(3)**で求めた解たちの大小関係を調べよ。**

＜　　　　　　＜　　　　　　＜　　　　　　＜

(5)　(4)**からどのようなことがわかるか。**

１時間目の授業に関するアンケート

　今日の授業を受けて見て思ったり感じたりしたことを、自由になんでも書いてください。

前の時間の復習

微分とは・・・

導関数・・・・・a に対して曲線 y=f (x)の接線の傾き y=f ’(a)を対応させる関数

微分する・・・・関数 y=f (x)から y=f ’(x)を求めること

整関数の微分

$$f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$$

例

①y=x^2(=f (x)) →→→→→ f’(x)=2x

②y=x^4(=f (x)) →→→→→ f’(x)=$4x^3$

③y=－x^3+$10x^2$(=f (x)) →→→→→ f’(x)=-$3x^2$ +20x

ROLLE の定理

関数 f(x)が閉区間[a,b]で連続，開区間(a,b)で微分可能であり，

f(a)＝f(b)ならば

$$f'(c)=0(a<c<b)$$

をみたす c が存在する。

問題：

方程式 $x^4-20x^3+120x^2-248x+147=0$ の解を求めよう

解いてみよう！！

解けましたか？

それでは

Rolleの用いた方法「Cascadeの方法」ではどのようになるか見てゆきましょう。

Cascade の方法

Cascade（カスケード）
方程式のそれぞれの項に定数項から 0,1,2,,,,をかけた後、x で割り、商を 0 と等しくしたものを“Cascade ”という

例） $$x^4-20x^3+120x^2-248x+147=0$$

$$\Rightarrow 4x^4-60x^3+240x^2-248x$$ **（それぞれの項に定数項から 0,1,2,,,,をかける）**

$$\Rightarrow 4x^3-60x^2+240x-248$$ **（x で割る）**

$$\Rightarrow 4x^3-60x^2+240x-248=0$$ **（これを Cascade という）**

$$\Rightarrow x^3-15x^2+60x-62=0$$ **（両辺 4 で割る）**

問　例の方法に習って $x^3-15x^2+60x-62=0$ の Cascade を求めてみましょう

Cascade を用いて解の近似を求めてみよう！！

Limits（リミット）
２数 a,b が *f(x)*の x に代入され、*f(a)*と *f(b)*が異符号であるとき、a と b の間に *f(x)=0* の解があるならば、a と b を“limits”という

例）　$2x-10=0$ の解は $x=5$

$x^2-10x+20=0$ の上限は 11、下限は 0 であるから

$f(11)=31>0, f(5)=-55<0, f(0)=20>0$

$x^2-10x+20=0$ の解は 0 と 5 の間と 5 と 11 の間にある

このとき 0,5,11 は $x^2-10x+20=0$ の limits となるという

・・・・・ところで

上限・下限ってなによ
方程式の解を近似してゆくのに、その上限と下限を定めなければならない
上限・・・絶対値が最も大きい負の係数をとり、未知数の最も高いべきの係数で割り、その商に１を加えた数。
下限・・・Rolle は正の解を求めようとしたため、必ず０

例）$3x^2-30x+60=0$ の係数のうち絶対値の最も大きいものは－30。この絶対値を最も高いべきの係数 3 で割った 10 に１を加えたもの 11 が上限となる。
よってこの方程式の上限、下限は

上限 11　　下限０

同様にすると・・・・

$x^3-15x^2+60x-62=0$ の limits は	0，3，7，63
$x^4-20x^3+120x^2-248x+147=0$ の limits は	0，2，4，9，249

問　実際確かめてみましょう

$$x^4 - 20x^3 + 120x^2 - 248x + 147 = 0$$

0

$$x^3 - 15x^2 + 60x - 62 = 0$$

0

$$x^2 - 10x + 20 = 0$$

0

$$x - 5 = 0$$

0

まとめ　「Cascade の方法」

$$x^4-20x^3+120x^2-248x+147=0$$

$$x^3-15x^2+60x-62=0$$

$$x^2-10x+20=0$$

$$x-5=0$$

討　論
MEMO

Note