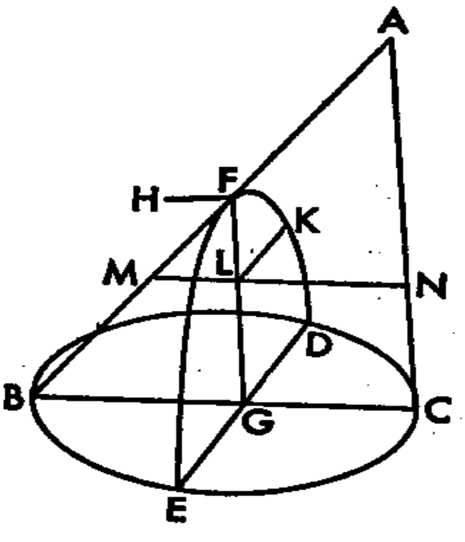
数学ⅡBゼミ①　１２月１８日（火）

アポロニウスの円錐曲線論に接しよう

数学史を通して、新しい数学を発見しよう。



日　時　：　平成１３年１２月１８日（火），１９日（水），２１日（金）
１３：１５～１４：０５

場　所　：　パソコン室

年	組	番	氏名

授業者：筑波大学大学院　修士課程教育研究科　教科教育専攻　数学教育コース　中嶋俊朗

0.　事前課題

問題A 接線の方程式を求めるのに、どんな解法がありましたか？

問題1：円 $x^2+y^2=5$ について、次の接線の方程式を求めよ。

① 円周上の点（1,−2）における接線　　答．$x-2y=5$

② 点（1,3）から円に引いた接線　　答．$2x+y=5$、$-x+2y=5$

問題2：放物線 $y=3x^2$ について、次の接線の方程式を求めよ。

① 放物線上の点（1,3）における接線　　答．$y=6x-3$

② 点（1,0）から放物線に引いた接線　　答．$y=0$、$y=12x-12$

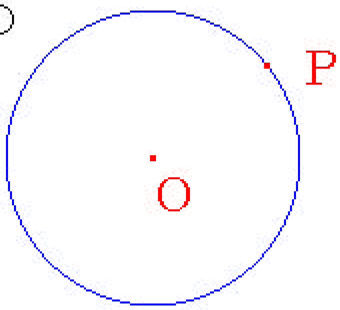
問題B 接線の作図はできましたか？

問題3：円Oについて、次の接線を作図せよ。

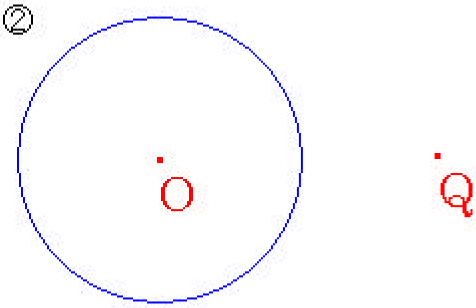
① 円周上の点Pにおける円Oの接線

② 円外の点Qから引いた円Oの接線

①



②

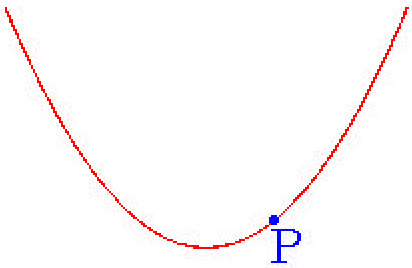


問題4：放物線について、次の接線を作図せよ。

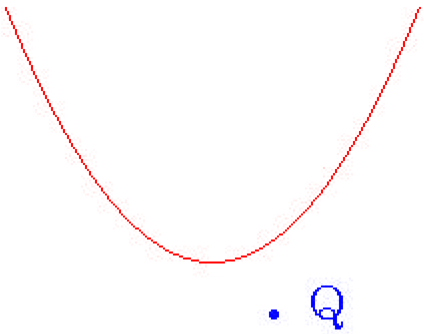
① 放物線上の点Pにおける放物線の接線

② 放物線外の点Qから引いた放物線の接線

①



②



1. 古代ギリシア時代（初期ヘレニズム時代）

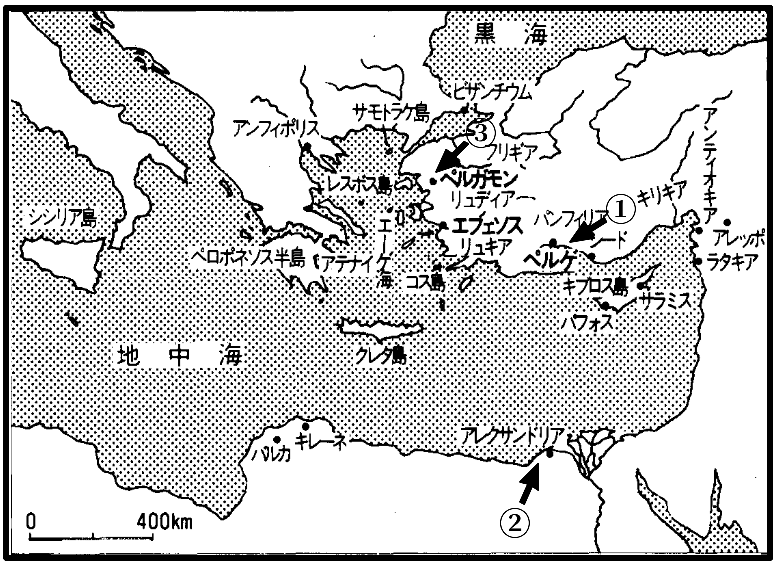
ギリシア数学について

古代ギリシアの数学に関する我々の知識の大部分は、ユークリッドとアポロニウスによるものである。この二人はヘレニズム時代初期の紀元前３世紀に活躍した人物だ。
ギリシア人は必要な記号を欠いていたため、現在の意味する代数学を持っていなかった。代数演算の変わりに幾何学を使わざるを得なかった。大部分は幾何学的代数学と呼ぶのがふさわしい。使う二つの主な方法は「面積のあてはめ」と「比例の方法」である。

ユークリッド：ユークリッドの生涯について知られているのは、彼がムセイオンの最初の教師の一人で、最高の教師だったことだけだ。おそらく彼はプラトンのアカデメイアで最初の教育を受けたのだろう。ユークリッドはおよそ12の著作を書いたが、その大部分は失われている。『円錐曲線論』、これはすぐにアポロニウスによるいっそう包括的な著作によって取って代わられることになった。幸いにも５つの著作が現存している。その中に彼の主著である『原論』がある。

①②③

アポロニウス：「偉大なる幾何学者」として知られるアポロニウスは、紀元前262年頃に南イタリアのペルガ①で生まれた。彼はおそらくアレクサンドリア②のムセイオンで教育を受けたものと思われる。また、重要な科学上の中心地であるペルガモン③に移る前に、しばらくの間そこで教えていたことは確かである。いま、彼の人生についてはわずかなことしか知ることはできず、彼のほとんどの著作も失われてしまった。しかし、後代の人々の言葉からそのいくつかの内容をある程度想像することができる。



文献資料

ギリシアの数学的活動を評価するに際しては、その数学的著作の大部分はすでに失われてしまっていることを忘れてはならない。実際、古典期からはわずかの断片しか残されておらず、何世紀も後に書かれた注釈者や編集者の言及によらねばならないことが多い。ヘレニズム期はそれでもかなりよく保存されているが、ここでも古代エジプトやバビロニアにおけるような一次文献はないのである。現存する最古の数学文献は「何度も筆写された写本の写本」である。紀元前３世紀はギリシア数学の黄金期であるが、我々の知識のほとんどが、３人の天才数学者ユークリッド、アポロニウス、アルキメデスの現存する著作（完全からは程遠い）からのものである。

ユークリッドの『原論』：かつて書かれた数学書の中で最も大きい影響力（活版印刷術の発明以来、1000 以上の版がある）を持ったものである。本来はこれが編集されたのは学生のための教科書としてだったことは重要である。『原論』は全部 13 巻から構成され、467 もの命題を含みギリシア古典期の初歩的な数学的知識をすべて見いだすことができる。しかし、後半の数巻には初歩のレベルをはるかに超えたものである。さらに専門的な高等な問題（たとえば円錐曲線や球面幾何学）は除かれている。

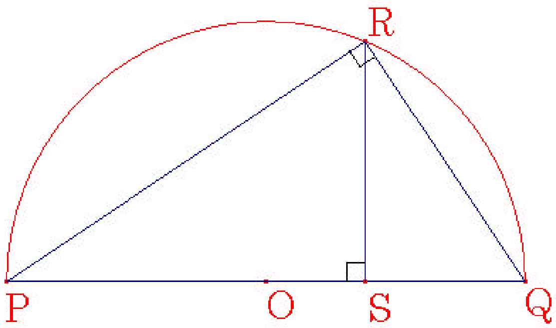
『原論』は全時代を通じて最も影響力のあった著作である。この偉大な著作は紀元前 300 年頃に書かれた（あるいはさらにありそうなことだが集められて編纂された）。しかし、現存する最も古いテキストは紀元後 10 世紀頃のビザンティンのものである。それらはほとんど紀元後４世紀にアレクサンドリアのテオンによって書かれた版に由来する。８世紀の終わりまでに『原論』はアラビア語に翻訳され、12 世紀にはアラビア語版がラテン語に翻訳され、ヨーロッパに移入された。『原論』は 1484 年に初めて出版（印刷）されている。ギリシア語から直接翻訳されたラテン語版は 1505 年に出版され、ギリシア語原文の方は 10 年後に出版している。しかし、詳細な研究に基づいたテキストは 19 世紀末まで現れなかった。それは偉大なデンマークの学者Ｊ．Ｌ．ハイベルクが 1883 年から 1888 年にかけて出版した校訂版である。この版は 1926 年のトマス・ヒース卿の英語訳を含む、以後の版すべての基礎となった。このようなやっかいな一連の事実は現在伝わっているかなり少数のギリシア数学の著作の文献史の典型である。事実、ギリシア語原文がすでに現存せず、研究者はアラビア語訳を用いなければならないことも時々ある。アポロニウスやアルキメデスの著作のいくつかがそうである。

【　引用文献：数学を築いた天才たち㊤　講談社 BLUE BACKS　】

２．比例中項の関係

次の図において比例中項の関係　$RS^2=PS\cdot SQ$　が成り立つことを証明せよ。

【証明】



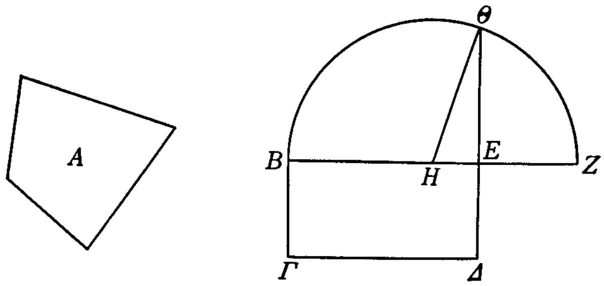
【　引用文献：ユークリッド原論　（訳・解説　中村幸四郎　他　共立出版）　】

【参考①】II巻　命題１４

14

与えられた直線図形に等しい正方形をつくること。

与えられた直線図形を A とせよ。このとき直線図形 A に等しい正方形をつくらねばならぬ。



直線図形 A に等しい直角平行四辺形 $B\Delta$ がつくられたとせよ。①そうすればもし BE が $E\Delta$ に等しければ，命じられたことはなされたことになるであろう。なぜなら正方形 $B\Delta$ が直線図形 A に等しくつくられたから。もし等しくなければ，BE，$E\Delta$ の一方が大きい。BE が大きいとし，BE が Z まで延長され，EZ が $E\Delta$ に等しくされ，BZ が H で２等分され，H を中心とし，HB，HZ の一を半径として半円 $B\Theta Z$ が描かれ，ΔE が Θ まで延長され，$H\Theta$ が結ばれたとせよ。

そうすれば②線分 BZ は H において等しい部分に，E において不等な部分に分けられたから，BE，EZ にかこまれた矩形と EH 上の正方形との和は HZ 上の正方形に等しい。そして HZ は $H\Theta$ に等しい。それゆえ矩形 BE，EZ と HE 上の正方形との和は $H\Theta$ 上の正方形に等しい。ところが③ ΘE，EH 上の正方形の和は $H\Theta$ 上の正方形に等しい。ゆえに矩形 BE，EZ と HE 上の正方形との和は ΘE，EH 上の正方形の和に等しい。双方から HE 上の正方形がひかれたとせよ。そうすれば残りの④ BE，EZ にかこまれた矩形は $E\Theta$ 上の正方形に等しい。ところが EZ は $E\Delta$ に等しいから，矩形 BE，EZ は $B\Delta$ である。それゆえ⑤平行四辺形 $B\Delta$ は ΘE 上の正方形に等しい。そして $B\Delta$ は直線図形 A に等しい。ゆえに直線図形 A も $E\Theta$ 上に描かれた正方形に等しい。

よって与えられた直線図形 A に等しい正方形，すなわち $E\Theta$ 上に描かれうる正方形がつくられた。これが作図すべきものであった*)。

下線部①・・・原論Ｉ巻　命題４４	**下線部④・・・*比例中項の関係***
下線部②・・・原論II巻　命題５	**下線部⑤・・・*面積のあてはめ***
下線部③・・・原論Ｉ巻　命題４７	

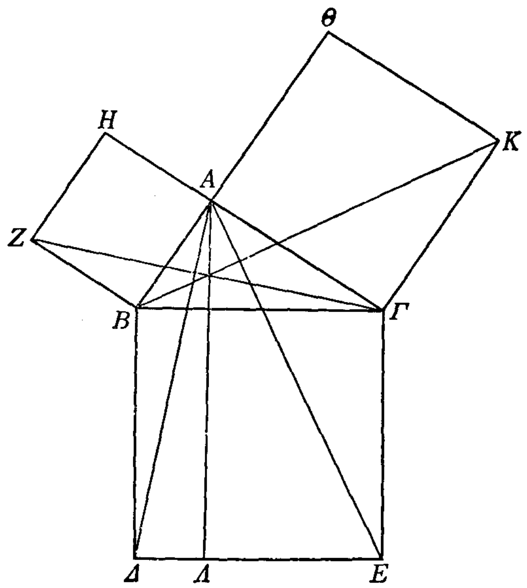
【参考②】ピタゴラスの定理（三平方の定理）

I巻　命題47

47

直角三角形において直角の対辺の上の正方形は直角をはさむ2辺の上の正方形の和に等しい。

$AB\Gamma$ を角 $BA\Gamma$ を直角とする直角三角形とせよ。$B\Gamma$ 上の正方形は BA, $A\Gamma$ 上の正方形の和に等しいと主張する。



$B\Gamma$ 上に正方形 $B\Delta E\Gamma$ が，BA, $A\Gamma$ 上に正方形 HB, $\Theta\Gamma$ が描かれ，A を通り $B\Delta$, ΓE のどちらかに平行に $A\Lambda$ がひかれたとせよ。そして $A\Delta$, $Z\Gamma$ が結ばれたとせよ。そうすれば角 $BA\Gamma$, BAH の双方は直角であるから，任意の線分 BA に対してその上の点 A において同じ側にない2線分 $A\Gamma$, AH が接角を2直角に等しくする。それゆえ ΓA は AH と一直線をなす。同じ理由で BA も $A\Theta$ と一直線をなす。そして角 $\Delta B\Gamma$ は角 ZBA に，共に直角であるがゆえに等しいから，双方に角 $AB\Gamma$ が加えられたとせよ。そうすれば角 ΔBA 全体は角 $ZB\Gamma$ 全体に等しい。そして ΔB は $B\Gamma$ に等しく，ZB は BA に等しいから，2辺 ΔB, BA は2辺 ZB, $B\Gamma$ にそれぞれ等しい。そして角 ΔBA は角 $ZB\Gamma$ に等しい。したがって底辺 $A\Delta$ は底辺 $Z\Gamma$ に等しく，三角形 $AB\Delta$ は三角形 $ZB\Gamma$ に等しい。そして平行四辺形 $B\Lambda$ は三角形 $AB\Delta$ の2倍である。なぜならそれらは同じ底辺 $B\Delta$ をもちかつ同じ平行線 $B\Delta$, $A\Lambda$ の間にあるから，そして正方形 HB は三角形 $ZB\Gamma$ の2倍である。なぜならこれらもまた同じ底辺 ZB をもちかつ同じ平行線 ZB, $H\Gamma$ の間にあるから。それゆえ平行四辺形 $B\Lambda$ は正方形 HB に等しい。同様にして AE, BK が結ばれれば，平行四辺形 $\Gamma\Lambda$ が正方形 $\Theta\Gamma$ に等しいことも証明されうる。ゆえに正方形 $B\Delta E\Gamma$ 全体は二つの正方形 HB, $\Theta\Gamma$ の和に等しい。そして正方形 $B\Delta E\Gamma$ は $B\Gamma$ 上に描かれ，HB, $\Theta\Gamma$ は BA, $A\Gamma$ 上に描かれている。したがって辺 $B\Gamma$ 上の正方形は辺 BA, $A\Gamma$ 上の正方形の和に等しい。

よって直角三角形において直角の対辺の上の正方形は直角をはさむ2辺の上の正方形の和に等しい。これが証明すべきことであった。

３．円錐曲線について

アポロニウスの『円錐曲線論』:『円錐曲線論』は８巻から構成され、487 を越える命題を含んでおり、それらはすべてギリシアの天才たちの特徴でもある厳密に演繹的な方法で証明されている。最初の４巻は 12～13 世紀のギリシア語手稿によって我々に伝えられている。続く３巻はアラビア語でのみ残っている。第８巻は失われたが、17 世紀にハレーによってパッポスから復元された。

【　引用文献：数学を築いた天才たち㊤　講談社 BLUE BACKS　】

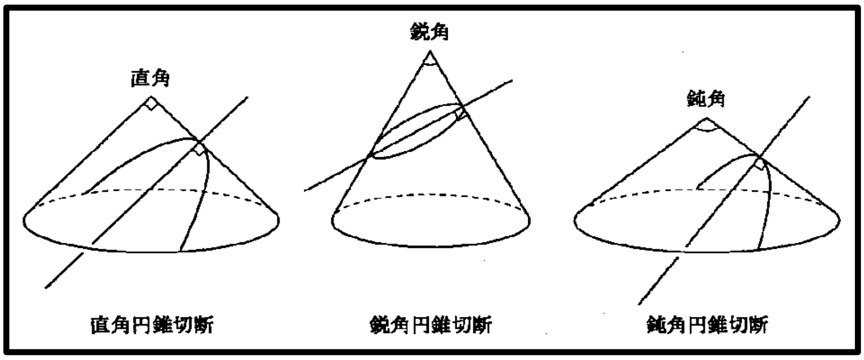
円錐曲線について

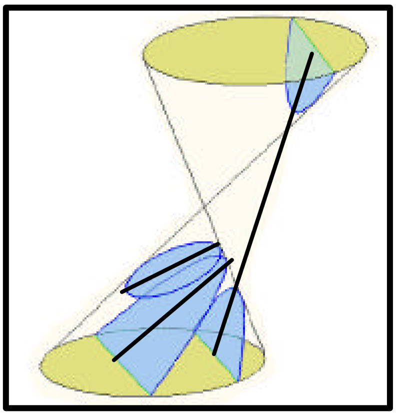
円錐曲線の発見はメナイクモス（BC．350～？）に帰せられる。どうして円錐の切断によって曲線の生ずることを考えに至ったかは不明である。古代人は直円錐以外の円錐を知らなかったが、３種類の円錐曲線を作った。(次ページの図) これらの名称はユークリッドとアルキメデスとによって用いられ、これは、アポロニウスがその３曲線に今日われわれの知っている名称を与えるまで存続した。

ユークリッドは、円錐曲線に関する組織的な論文『円錐曲線論』４巻を書いた。その範囲はアポロニウスの最初の４巻の範囲とだいたい同じであったが、その取り扱いはやや一般的ではなかった。これは、ところどころにおいてアリスタイオスの著作を基にしていて、多くの先駆者（アリスタイオスやメナイクモス）の命題を総合したものであったと思われる。しかし、ユークリッドの円錐曲線論とアリスタイオスの立体の軌跡とは、アポロニウスの円錐曲線論によってただちに圧倒されたために失われてしまった。

アポロニウスの円錐曲線論は権威ある論文とみなされ、その他の一切に取って代わった。エウトキウス（紀元後 520 年頃活躍）は最初の 4 巻を出版しそれに注釈をつけた。この注釈は残存していてハイベルクの 4 巻のギリシア語のテキストに含まれている。第 1 巻から第 4 巻はグレゴリによりエウトキウスの注釈をつけて、ギリシア語とラテン語とで出版されることになっていたが、仕事の進行中にグレゴリが死亡したので、ハレーがこの全企画の責任を引つぎ、それにアラビア語からの第 5 巻から第 7 巻の翻訳と第 8 巻の試行的な復元とを付け加えた。

【　参考文献：ギリシア数学史　T・L ヒース著　平田寛他訳　共立出版　】





３－１．アポロニウスの『円錐曲線論』のエドモンド・ハーレーによる翻訳

３－１－１．翻訳本の表紙等

APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBRI OCTO,
ET
SERENI ANTISSENSIS
DE SECTIONE
CYLINDRI & CONI
LIBRI DUO.

OXONIÆ,
E THEATRO SHELDONIANO, An. Dom. MDCCX.

Viro Præstantissimo,
JURISQUE CONSULTISSIMO,
D. JOANNI HOLT
EQUITI AURATO,
Capitali in *BANCO REGIO*
TOTIUS ANGLIÆ
JUSTITIARIO,
FIDO LEGUM CUSTODI,
RECTIQUE & ÆQUI per Iniquissima Tempora
VINDICI & *ASSERTORI*
CONSTANTISSIMO,
APOLLONII CONICORUM
LIBROS QUATUOR,
Nunc primum GRÆCE & LATINE
EDITOS
In Perenne Grati Animi Testimonium
D. D. C.

EDM. HALLEIUS.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ
ΚΩΝΙΚΩΝ
ΒΙΒΛΙΑ Δ'. ΤΑ ΠΡΟΤΕΡΑ
ΜΕΤΑ
ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΛΗΜΜΑΤΩΝ
ΚΑΙ
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ
ΥΠΟΜΝΗΜΑΤΩΝ
APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBRI IV. PRIORES
CUM
PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATIS
ET
EUTOCII ASCALONITÆ
COMMENTARIIS.

Ex Codd. MSS. Græcis edidit EDMUNDUS HALLEIUS apud *Oxonienses* Geometriæ Professor *Savilianus*.

Aristippus Philosophus Socraticus, naufragio cum ejectus ad Rhodiensium litus animadvertisset Geometrica schemata descripta exclamavisse ad comites ita dicitur, Bene speremus, Hominum enim vestigia video. *Vitruv. Architect. lib 6 Praef.*

3－1－2．最初の定義

左側：ギリシア語　**p１３**

右側：ラテン語

ΟΡΟΙ ΠΡΩΤΟΙ

α'. ΕΑΝ [a] ἀπό τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν, ὃς οὐκ ἔστιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ σημείῳ, εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐφ' ἑκάτερα προσεκβληθῇ, καὶ μένοντος τοῦ σημείου ἡ εὐθεῖα περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι· τὴν γραφεῖσαν ὑπὸ τῆς εὐθείας ἐπιφάνειαν, ἣ σύγκειται ἐκ δύο ἐπιφανειῶν κατὰ κορυφὴν ἀλλήλαις κειμένων, ὧν ἑκατέρα εἰς ἄπειρον αὔξεται, τῆς γραφούσης εὐθείας εἰς ἄπειρον προσεκβαλλομένης, καλῶ κωνικὴν ἐπιφάνειαν.

β'. Κορυφὴν δὲ αὐτῆς, τὸ μεμενηκὸς σημεῖον.

γ'. Ἄξονα δέ, τὴν διὰ τοῦ σημείου καὶ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀγομένην εὐθεῖαν.

δ'. Κῶνον δέ, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ κύκλου καὶ τῆς μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας κωνικῆς ἐπιφανείας.

ε'. Κορυφὴν δὲ τοῦ κώνου, τὸ σημεῖον ὃ καὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶ κορυφή.

ς'. Ἄξονα δέ, τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἀγομένην εὐθεῖαν.

ζ'. Βάσιν δέ, τὸν κύκλον.

η'. Ὀρθοὺς μὲν καλῶ, τοὺς πρὸς ὀρθὰς ἔχοντας ταῖς βάσεσι τοὺς ἄξονας.

θ'. Σκαληνοὺς δέ, τοὺς μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχοντας ταῖς βάσεσι τοὺς ἄξονας.

ι'. [b] Πάσης καμπύλης γραμμῆς, ἥτις ἐστὶν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, διάμετρον μὲν καλῶ εὐθεῖαν, ἥτις ἠγμένη ἀπὸ τῆς καμπύλης γραμμῆς πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ γραμμῇ εὐθείας, εὐθείᾳ τινὶ παραλλήλους, δίχα διαιρεῖ.

ια'. Κορυφὴν δὲ τῆς καμπύλης γραμμῆς, τὸ πέρας τῆς εὐθείας τὸ πρὸς τῇ γραμμῇ.

ιβ'. Τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἑκάστην τῶν παραλλήλων.

ιγ'. [c] Ὁμοίως δὲ καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν, ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ κειμένων, διάμετρον καλῶ πλαγίαν μέν, ἥτις εὐθεῖα, τέμνουσα τὰς δύο γραμμάς, πάσας τὰς ἀγομένας ἐν ἑκατέρᾳ τῶν γραμμῶν παρά τινα εὐθεῖαν δίχα τέμνει.

ιδ'. Κορυφὰς δὲ τῶν γραμμῶν, τὰ πρὸς ταῖς γραμμαῖς πέρατα τῆς διαμέτρου.

ιε'. Ὀρθίαν δὲ διάμετρον, εὐθεῖαν, ἥτις κει-

DEFINITIONES PRIMÆ.

1. SI [a] ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non est in eodem plano in quo punctum, juncta recta linea in utramque partem producatur, & manente puncto convertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat à quo cœpit moveri; superficiem à recta descriptam, constantemque ex duabus superficiebus ad verticem inter sese aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, (nimirum rectâ quæ eam describit in infinitum productâ) voco conicam superficiem.

2. Verticem vero ejus, manens punctum.

3. Axem autem, rectam lineam quæ per punctum & centrum circuli ducitur.

4. Conum vero voco, figuram contentam circulo & conica superficie, quæ inter verticem & circuli circumferentiam interjicitur.

5. Verticem autem coni, punctum quod & superficiei conicæ vertex est.

6. Axem vero, rectam lineam quæ à vertice ad circuli centrum ducitur.

7. Basim autem, circulum ipsum.

8. Rectos quidem conos voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

9. Scalenos vero, qui axes non ad rectos angulos ipsis basibus habent.

10. [b] Omnis curvæ lineæ, in uno plano existentis, diametrum voco rectam lineam; quæ quidem ducta à linea curva omnes rectas in ipsa ductas, cuidam rectæ parallelas, bifariam dividit.

11. Verticem autem curvæ lineæ, terminum rectæ qui est in ipsa linea.

12. Ordinatim vero ad diametrum applicari unamquamque rectarum parallelarum.

13. [c] Similiter & duarum curvarum linearum, in uno plano existentium, diametrum quidem transversam voco, rectam lineam; quæ, utramque lineam secans, rectas omnes in ipsis ductas, rectæ cuidam parallelas, bifariam dividit.

14. Vertices autem linearum, diametri terminos qui sunt in ipsis lineis.

15. Rectam vero diametrum, il-

左側：ラテン語　**p１４**

右側：ギリシア語

lam, quæ inter duas lineas posita rectas omnes ductas, rectæ cuidam parallelas & inter ipsas curvas interjectas, bifariam secat.

16. Ordinatim autem ad diametrum applicari unamquamque rectarum parallelarum.

17. Conjugatas diametros voco curvæ lineæ & duarum curvarum, rectas lineas; quarum utraque diameter est, & rectas alteri parallelas bifariam dividit.

18. Axem vero curvæ lineæ, & duarum curvarum, rectam lineam; quæ, cum sit diameter curvæ lineæ vel duarum curvarum, rectas parallelas ad rectos angulos secat.

19. Axes conjugatos voco curvæ lineæ & duarum curvarum, rectas lineas; quæ, cum sint diametri conjugatæ, sibi invicem parallelas ad rectos angulos secant.

μένη μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν πάσας τὰς ἀγομένας εὐθείας, εὐθείᾳ τινὶ παραλλήλους καὶ ἀπολαμβανομένας μεταξὺ τῶν γραμμῶν, δίχα τέμνει.

ις'. Τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἑκάστην τῶν παραλλήλων.

ιζ'. Συζυγεῖς καλῶ διαμέτρους καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν, εὐθείας· ὧν ἑκατέρα, διάμετρος οὖσα, τὰς τῇ ἑτέρᾳ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ.

ιη'. Ἄξονα δὲ καλῶ καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν, εὐθεῖαν ἥτις διάμετρος οὖσα τῆς γραμμῆς, ἢ τῶν γραμμῶν, πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὰς παραλλήλους.

ιθ'. Συζυγεῖς καλῶ ἄξονας καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν, εὐθείας αἵτινες, διάμετροι οὖσαι συζυγεῖς, πρὸς ὀρθὰς τέμνουσι τὰς ἀλλήλων παραλλήλους.

最初の定義の英語訳

First Definitions

1. If from a point a straight line is joined to the circumference of a circle which is not in the same plane with the point, and the line is produced in both directions, and if, with the point remaining fixed, the straight line being rotated about the circumference of the circle returns to the same place from which it began, then the generated surface composed of the two surfaces lying vertically opposite one another, each of which increases indefinitely as the generating straight line is produced indefinitely, I call a conic surface, and I call the fixed point the vertex, and the straight line drawn from the vertex to the center of the circle the axis.

2. And the figure contained by the circle and by the conic surface between the vertex and the circumference of the circle I call a cone, and the point which is also the vertex of the surface I call the vertex of the cone, and the straight line drawn from the vertex to the center of the circle the axis, and the circle the base of the cone.

3. I call right cones those having axes perpendicular to their bases, and oblique those not having axes perpendicular to their bases.

4. Of any curved line which is in one plane I call that straight line the diameter which, drawn from the curved line, bisects all straight lines drawn to this curved line parallel to some straight line; and I call the end of that straight line (the diameter) situated on the curved line the vertex of the curved line, and I say that each of these parallels is drawn ordinatewise to the diameter (*τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι*).[1]

5. Likewise of any two curved lines lying in one plane I call that straight line the transverse diameter (*διάμετρος πλαγία*) which cuts the two curved lines and bisects all the straight lines drawn to either of the curved lines parallel to some straight line; and I call the ends of the diameter situated on the curved lines the vertices of the curved lines; and I call that straight line the upright diameter (*διάμετρος ορθία*) which, lying between the two curved lines, bisects all the straight lines intercepted between the curved lines and drawn parallel to some straight line; and I say that each of the parallels is drawn ordinatewise to the diameter.

6. The two straight lines each of which being a diameter bisects the straight lines parallel to the other I call the conjugate diameters (*συζυγεῖς διαμέτροι*) of a curved line and of two curved lines.

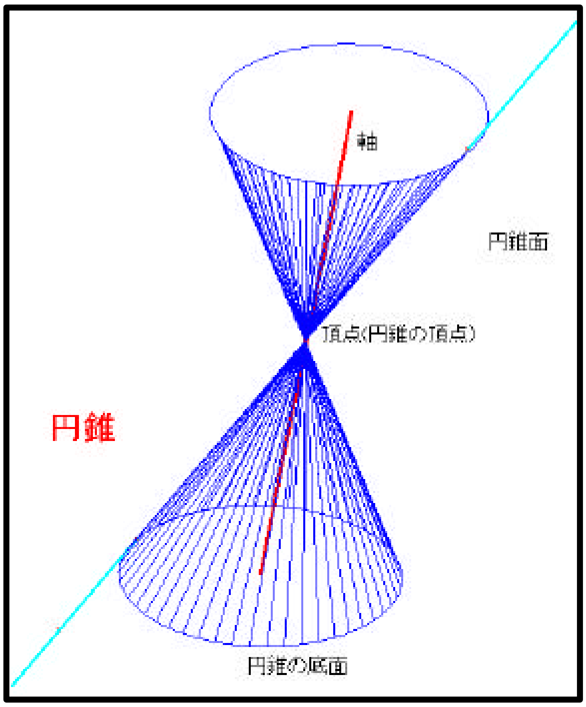
7. And I call that straight line the axis of a curved line and of two curved lines which being a diameter of the curved line or lines cuts the parallel straight lines at right angles.

8. And I call those straight lines the conjugate axes of a curved line and of two curved lines which being conjugate diameters cut the straight lines parallel to each other at right angles.

【引用文献：CONICS by APOLLONIUS OF PERGA (Greek text (Heiberg))
Translated by R Catesby Taliaferro 】

最初の定義の日本語訳

1．　もし、1本の直線がその点と同じ平面にない円周の点から描かれ、どの方向へも延長され、その点が固定されその直線がはじめの点に戻ってくるまで円の円周にそって動かすならば、つくられた表面は、互いに垂直に反対の位置にある 2 つの表面からなる。各々は、それらを描く直線が無限に作られるとき、無限に作られる。その表面を円錐面という。固定された点を頂点といい、頂点から円の中心まで描かれる直線を軸という。



2．円そして頂点と円周の間の円錐面によって囲まれた図形を円錐という。そして表面の頂点である点も円錐の頂点という。そして、頂点から円の中心へ引いた直線を軸、円を円錐の底面という。

3．底辺に対して垂直な軸を持つものを直円錐、底辺に対して垂直でない軸を持つものを斜円錐という。

4．ひとつの平面のどんな曲線においても、ある直線に平行にこの曲線から引いたすべての直線を二等分するこの曲線から引いた直線を直径という。曲線上にあるその直線（直径）の端をその曲線の頂点という。各々の平行線は直径に対して縦線方向に引かれる。

5．同様に、ひとつの平面上にあるどんな２曲線においても、ある直線に平行にどちらかの曲線に引いたすべての直線を二等分する直線を横線方向の直径をという。曲線上にある直径の端を曲線の頂点という。二曲線間にあり、ある直線に平行に引かれ、曲線間の切り取られたすべての直線を二等分する直線を直立の直径という。各々の平行線は直径に対して縦線方向に引かれる。

6．直径になる二つの直線が他方に平行な直線を二等分するとき、曲線の共役な直径という。

7．曲線の直径であって、平行な直線を直角に分ける直線を曲線の軸という。

8．共役な直径であって、互いに平行な直線を直角に分ける直線を曲線の共役な軸という。

命題　4

円ＢＣに平行な平面によって切り、曲線ＤＥをつくる。曲線ＤＥは軸上に中心をもつ円である。

命題　7

直線ＢＣまたはその延長線に垂直な直線ＤＥを含むもう一つの平面で円ＢＣを切り、円錐面上に切断面として曲線ＤＥＦを作る。切断面と三角形ＡＢＣの共通部分を直線ＦＧとする。切り口ＤＥＦ上に任意に点Ｈをとり、Ｈを通り直線ＤＥに平行な直線をＨＫとする。直線ＨＫは直線ＦＧと交わり、切断面ＤＥＦの反対側に延長されるなら、ＦＧによって二等分されるだろう。

4．命題１１（放物線の定義）

4－1．エドモンド・ハーレーによる翻訳（ギリシア語からラテン語）

命題１１

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἔτι δὲ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς παράλληλος ᾖ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς τοῦ κώνου παράλληλος ἀχθῇ τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου, μέχρι τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς, καὶ ἄλλης τινὸς εὐθείας ἣ λόγον ἔχει πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς τοῦ κώνου γωνίας καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν. καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ΠΑΡΑΒΟΛΗ.

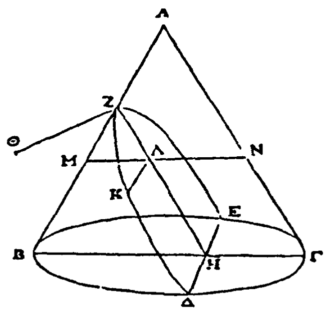
Prop. XI. *Theor.*

Si conus plano per axem secetur, secetur autem & altero plano secante basim coni secundum rectam lineam, quæ ad basim trianguli per axem est perpendicularis, & sit diameter sectionis uni laterum trianguli per axem parallela: recta linea, quæ à sectione coni ducitur parallela communi sectioni plani secantis & basis coni, usque ad sectionis diametrum, poterit spatium æquale contento sub ea, quæ ex diametro abscissa inter ipsam & verticem sectionis interjicitur, & alia quadam, quæ ad rectam, inter coni angulum & verticem sectionis interjectam, habet eam rationem, quam quadratum basis trianguli per axem ad id quod sub reliquis duobus trianguli lateribus continetur. dicatur autem hujusmodi sectio PARABOLA.

ἜΣΤΩ κῶνος, οὗ τὸ Α σημεῖον κορυφή, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν τὴν ΔΕ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΒΓ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔΖΕ, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΖΗ παράλληλος ἔστω μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου τῇ ΑΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΖΗ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΘ, ᵃ καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΖΑ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ μέχρι τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΖΛ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Λ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΜΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΛ τῇ ΔΕ παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΔΕ ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῇ βάσει τοῦ κώνου· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον κύκλος ἐστίν, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ. καί ἐστι κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΝ ἡ ΚΛ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΔΕ ἐπὶ τὴν ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΜΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΛ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, ᵇ τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ, καὶ ἡ ΒΓ πρὸς ΒΑ· ὁ ἄρα τῆς ΘΖ

SIT conus, cujus vertex punctum Α, basis ΒΓ circulus, seceturque plano per axem, atque sectionem faciat triangulum ΑΒΓ, & secetur altero plano secante basim coni secundum rectam lineam ΔΕ, quæ ad ΒΓ est perpendicularis, & faciat sectionem in superficie coni ΔΖΕ lineam; diameter autem sectionis ΖΗ parallela sit uni laterum trianguli per axem,



videlicet ipsi ΑΓ, atque à puncto Ζ rectæ ΖΗ ad rectos angulos ducatur ΖΘ, ᵃ & fiat ut quadratum ex ΒΓ ad rectangulum ΒΑΓ ita ΖΘ ad ΖΑ, sumatur præterea in sectione quodlibet punctum Κ, & per Κ ducatur ΚΛ ipsi ΔΕ parallela, usque ad sectionis diametrum: dico quadratum ex ΚΛ rectangulo ΘΖΛ æquale esse.

Ducatur enim per Λ ipsi ΒΓ parallela ΜΝ. est vero ΚΛ parallela ipsi ΔΕ: ergo [per 15.11.] planum, quod transit per ΚΛ, ΜΝ, plano per ΒΓ, ΔΕ, hoc est ipsi basi coni, æquidistat: ideoque [per 4.huj.] planum per ΚΛ, ΜΝ est circulus, cujus diameter ΜΝ. est autem [per 10. 11.] ΚΛ ad ΜΝ perpendicularis, quia & ΔΕ ad ΒΓ: rectangulum igitur ΜΛΝ [per 35. 3.] æquale est quadrato ex ΚΛ. & quoniam [ex hyp.] ΘΖ ad ΖΑ est ut quadratum ex ΒΓ ad rectangulum ΒΑΓ; ᵇ quadratum autem ex ΒΓ ad ΒΑΓ rectangulum [per 23.6.] rationem habet compositam ex ratione quam ΒΓ habet ad ΓΑ, & ex ea quam ΒΓ habet ad ΒΑ: ratio igitur ΘΖ ad

ad ΖΑ componitur ex rationibus ΒΓ ad ΓΑ, & ΓΒ ad ΒΑ. ut autem ΒΓ ad ΓΑ ita [per 4. 6.] ΜΝ ad ΝΑ, hoc est ΜΛ ad ΛΖ; & ut ΒΓ ad ΒΑ ita ΜΝ ad ΜΑ, hoc est ΛΜ ad ΜΖ, & [per 19. 5.] reliqua ΝΛ ad ΖΑ: ratio igitur ΘΖ ad ΖΑ componitur ex rationibus ΜΛ ad ΛΖ, & ΝΛ ad ΖΑ. sed ratio composita ex rationibus ΜΛ ad ΛΖ, & ΛΝ ad ΖΑ est [per 23.6.] ea quam habet ΜΛΝ rectangulum ad rectangulum ΛΖΑ: ergo ut ΘΖ ad ΖΑ ita rectangulum ΜΛΝ ad ΛΖΑ rectangulum. ut autem ΘΖ ad ΖΑ (sumptâ ΖΑ communi altitudine) ita [per 1. 6.] ΘΖΛ rectangulum ad rectangulum ΛΖΑ: ut igitur rectangulum ΜΛΝ ad ipsum ΛΖΑ ita rectangulum ΘΖΛ ad idem ΛΖΑ: & idcirco [per 9.5.] æquale est rectangulum ΜΛΝ rectangulo ΘΖΛ. sed [ex modo ostensis] rectangulum ΜΛΝ æquale est quadrato ex ΚΛ: ergo quadratum ex ΚΛ rectangulo ΘΖΛ æquale est.

Vocetur autem hujusmodi sectio *Parabola*: & recta ΘΖ, *Ea juxta quam possunt quæ ad* ΖΗ *diametrum ordinatim applicantur*: hæc etiam *Latus Rectum* appelletur.

πρὸς ΖΑ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΓ πρὸς ΓΑ, καὶ τοῦ τῆς ΓΒ πρὸς ΒΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΝΑ, τουτέστιν ἡ ΜΛ πρὸς ΛΖ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς ΒΑ οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΜΑ, τουτέστιν ἡ ΛΜ πρὸς ΜΖ, καὶ λοιπὴ ἡ ΝΛ πρὸς ΖΑ· ὁ ἄρα τῆς ΘΖ πρὸς ΖΑ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΜΛ πρὸς ΛΖ, καὶ τοῦ τῆς ΝΛ πρὸς ΖΑ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΜΛ πρὸς ΛΖ, καὶ τοῦ τῆς ΛΝ πρὸς ΖΑ, ὁ τοῦ ὑπὸ ΜΛΝ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ· ὡς ἄρα ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΛΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ. ὡς δὲ ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ (τῆς ΖΑ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης) οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΜΛΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΖΛ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸ ὑπὸ ΛΖΑ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΜΛΝ τῷ ὑπὸ ΘΖΛ. τὸ δὲ ὑπὸ ΜΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΛ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΖΛ.

Καλείσθω μὲν ἡ τοιαύτη τομὴ Παραβολή· ἡ δὲ ΘΖ, ἡ παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΖΗ διάμετρον· καλείσθω δὲ καὶ ὀρθία*.

4－2．命題１１の英語訳

PROPOSITION 11

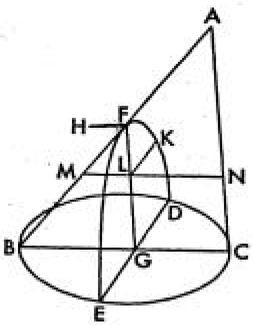
A

If a cone is cut by a plane through its axis, and also cut by another plane cutting the base of the cone in a straight line perpendicular to the base of the axial triangle, and if further the diameter of the section is parallel to one side of the axial triangle, then any straight line which is drawn from the section of the cone to its diameter parallel to the common section of the cutting plane and of the cone's base, will equal in square the rectangle contained by the straight line cut off by it on the diameter beginning from the section's vertex and by another straight line which has the ratio to the straight line between the angle of the cone and the vertex of the section that the square on the base of the axial triangle has to the rectangle contained by the remaining two sides of the triangle. And let such a section be called a parabola (παραβολή).

B

Let there be a cone whose vertex is the point A, and whose base is the circle BC, and let it be cut by a plane through its axis, and let it make as a section the triangle ABC (I. 3). And let it also be cut by another plane cutting the base of the cone in the straight line DE perpendicular to the straight line BC, and let it make as a section on the surface of the cone the line DFE, and let the diameter of the section FG (I. 7, and def. 4) be parallel to one side AC of the axial triangle. And let the straight line FH be drawn from the point F perpendicular to the straight line FG, and let it be contrived that

$$\text{sq. } BC : \text{rect. } BA, AC :: FH : FA.$$



And let some point K be taken at random on the section, and through K let the straight line KL be drawn parallel to the straight line DE.

I say that sq. KL = rect. HF, FL.

C

For let the straight line MN be drawn through L parallel to the straight line BC. And the straight line DE is also parallel to the straight line KL. Therefore the plane through KL and MN is parallel to the plane through BC and DE (Eucl. XI. 15), that is to the base of the cone. Therefore the plane through KL and MN is a circle whose diameter is MN (I. 4). And KL is perpendicular to MN since DE is also perpendicular to BC (Eucl. XI. 10). Therefore

$$\text{rect. } ML, LN = \text{sq. } KL \text{ (Eucl. III. 31; VI. 8, porism).}$$

And since

$$\text{sq. } BC : \text{rect. } BA, AC :: HF : FA,$$

and

$$\text{sq. } BC : \text{rect. } BA, AC \text{ comp. } BC : CA, BC : BA \text{ (Eucl. VI. 23),}$$

therefore

$$HF : FA \text{ comp. } BC : CA, BC : BA.$$

But

$$BC : CA :: MN : NA :: ML : LF \text{ (Eucl. VI. 4),}$$

and

$$BC : BA :: MN : MA :: LM : MF :: NL : FA \text{ (Eucl. VI. 2).}$$

Therefore

$$HF : FA \text{ comp. } ML : LF, NL : FA.$$

But

$$\text{rect. } ML, LN : \text{rect. } LF, FA \text{ comp. } ML : LF, LN : FA \text{ (Eucl. VI. 23).}$$

Therefore

$$HF :: FA :: \text{rect. } ML, LN : \text{rect. } LF, FA$$

But, with the straight line FL taken as common height,

$$HF : FA :: \text{rect. } HF, FL : \text{rect. } LF, FA \text{ (Eucl. VI. 1),}$$

therefore

$$\text{rect. } ML, LN : \text{rect. } LF, FA :: \text{rect. } HF, FL : \text{rect. } LF, FA \text{ (Eucl. V. 11).}$$

Therefore

$$\text{rect. } ML, LN = \text{rect. } HF, FL \text{ (Eucl. V. 9).}$$

But

$$\text{rect. } ML, LN = \text{sq. } KL,$$

therefore also

$$\text{sq. } KL = \text{rect. } HF, FL.$$

D

And let such a section be called a parabola, and let HF be called the straight line to which the straight lines drawn ordinatewise to the diameter FG are applied in square (παρ' ἣν δύναται αἱ καταγόμεναι τεταγμένως ἐπὶ τὴν ZH διάμετρον), and let it also be called the upright side (ὀρθία).[1]

【引用文献：CONICS by APOLLONIUS OF PERGA (Greek text (Heiberg))

Translated by R. Catesby Taliaferro】

４－３．命題１１を理解する

命題１１を読み、何をどう示しているか理解する。

【命題１１　最初の部分（*イタリック体* の部分）の日本語訳】

A ***円錐が軸を通る面で切断され、軸三角形の底辺に垂直な直線で円錐の底面を切断する別の面で切断し、さらにその切り口の直径が軸三角形のひとつの辺に平行にしなさい。そうすると、切り口と円錐の底面の共通部分に平行に円錐の切り口からその直径に引いたどんな直線も、その正方形（square）は、切り口の頂点から始まる直径上のそれによって切られる直線と、円錐の頂角と切り口の頂点の間の直線に対して、軸三角形の底辺の正方形が三角形の残りの二辺で挟まれる長方形に対して持つ比と同じ比になる別の直線で挟まれた長方形と等しい。そして、その切り口のことを放物線と呼ぶ。***

→　***ワークシート①　へ***

４－４．放物線の定義で放物線を作図する

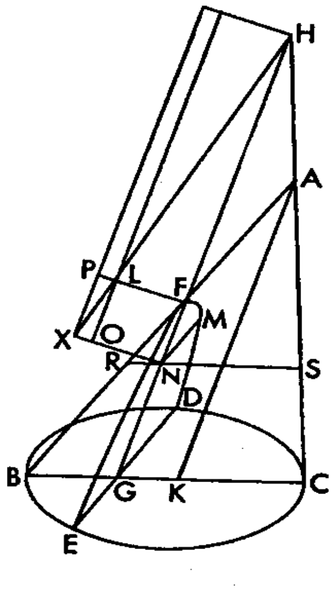
放物線の定義より、放物線上の点を作図する方法を考える。

→　***ワークシート①　へ***

数学ⅡBゼミ②　１２月１９日（水）

アポロニウスの円錐曲線論に接しよう

数学史を通して、新しい数学を発見しよう。



日　時　：　平成１３年１２月１８日（火），１９日（水），２１日（金）
１３：１５～１４：０５

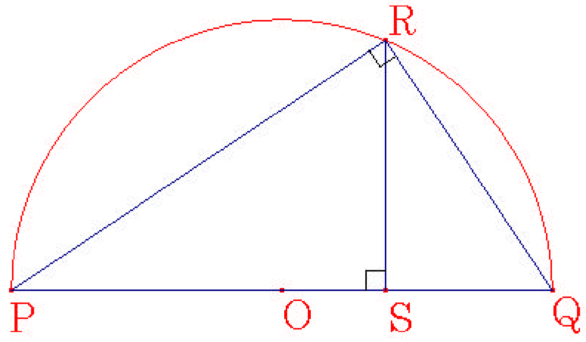
場　所　：　パソコン室

年　　　　組　　　　　番　　　氏 名

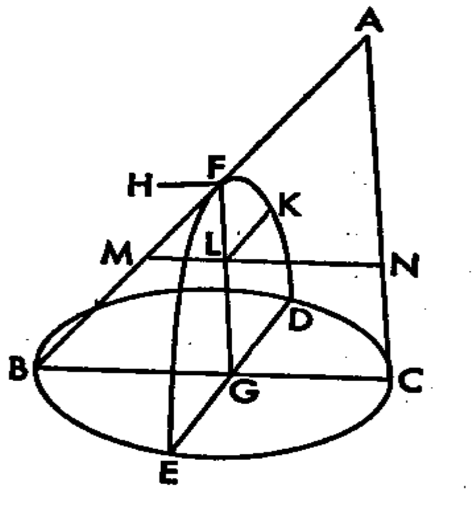
授業者：筑波大学大学院　修士課程教育研究科　教科教育専攻　数学教育コース　中嶋俊朗

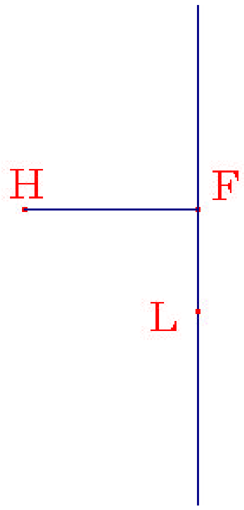
0．比例中項の復習

比例中項の関係



放物線の定義





1．　作図ツールの使い方

【カブリジオメトリー（CABRI　GEOMETRY　II）】

1－1．カブリの操作について　→　　操作マニュアル

- A．クリック
- B．ドラッグ
- C．図形の削除
- D．作図を途中でやめる
- E．取り消し／やり直し
- F．図形の選択や移動

G．作図する

- ①　点を描く
- ②　交点をとる
- ③　直線を描く
- ④　円を描く
- ⑤　垂線を描く
- ⑥　平行線を描く
- ⑦　中点をとる
- ⑧　コンパスで長さをとる
- ⑨　軌跡を描く
- ⑩　点対称の点をとる
- ⑪　図形に名前をつける
- ⑫　トレースを残す
- ⑬　非表示にする／表示する

１－２．放物線の定義を使い放物線を作図する。

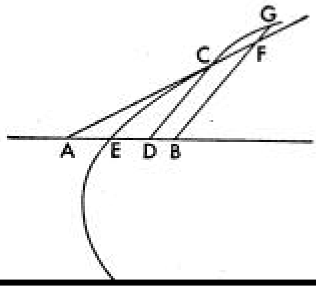
２．放物線の性質（Ｉ巻：命題 33、35、46、II巻：命題 5、7）

PROPOSITION 33

If in a parabola some point is taken, and from it an ordinate is dropped to the diameter, and, to the straight line cut off by it on the diameter from the vertex, a straight line in the same straight line from its extremity is made equal, then the straight line joined from the point thus resulting to the point taken will touch the section.

Let there be a parabola whose diameter is the straight line AB, and let the straight line CD be dropped ordinatewise, and let the straight line AE be made equal to the straight line ED, and let the straight line AC be joined.

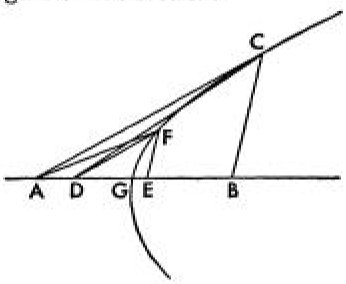
I say that the straight line AC produced will fall outside the section.



PROPOSITION 35

If a straight line touches a parabola, meeting the diameter outside the section, the straight line drawn from the point of contact ordinatewise to the diameter will cut off on the diameter beginning from the vertex of the section a straight line equal to the straight line between the vertex and the tangent, and no straight line will fall into the space between the tangent and the section.

Let there be a parabola whose diameter is the straight line AB, and let the straight line BC be erected ordinatewise, and let the straight line AC be tangent to the section.



I say that the straight line AG is equal to the straight line GB.

Then I say that no straight line will fall into the space between the straight line AC and the section.

直線ＡＢを直径とする放物線がある。

直線ＢＣを縦線方向に引く。

直線ＡＣは切り口に接する。

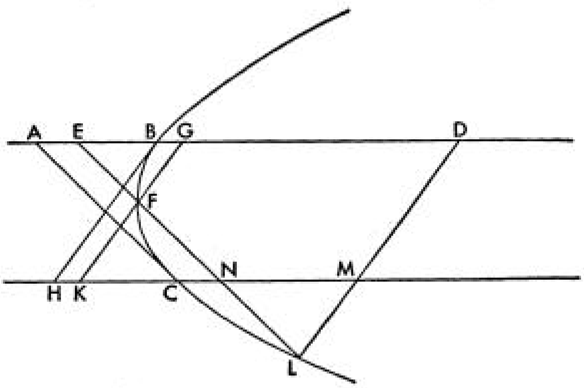
直線ＡＣと直線ＧＢは等しい。

直線AG と切り口の間に引ける直線はない。

PROPOSITION 46

If a straight line touching a parabola meets the diameter, the straight line drawn through the point of contact parallel to the diameter in the direction of the section bisects the straight lines drawn in the section parallel to the tangent.

Let there be a parabola whose diameter is the straight line ABD, and let the



straight line AC touch the section (I. 24), and through C let the straight line HCM be drawn parallel to the straight line AD (I. 26), and let some point L be taken at random on the section, and let the straight line $LNFE$ (I. 18, 22) be drawn parallel to AC.

I say that $LN = NF$.

直径をＡＢＤとする放物線がある。

直線ＡＣが切り口に接し、

点Ｃを通る直線HCMが直線ＡＤに平行に引かれ、

任意の点Ｌが切り口にとられる。

直線ＬＮＦＥをＡＣに平行に引く。

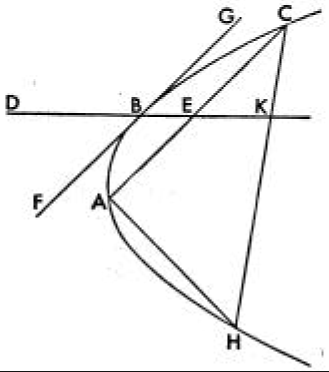
LN=NFである。

PROPOSITION 5

If the diameter of a parabola or hyperbola bisects some straight line, the tangent to the section at the end of the diameter will be parallel to the bisected straight line.

Let there be the parabola or hyperbola ABC whose diameter is the straight line DBE, and let the straight line FBG touch the section, and let some straight line AEC be drawn in the section making AE equal to EC.

I say that AC is parallel to FG.

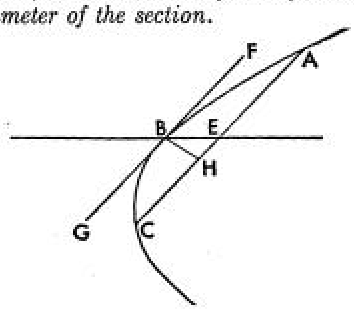


PROPOSITION 7

If a straight line touches a section of a cone or circumference of a circle, and a parallel to it is drawn in the section and bisected, the straight line joined from the point of contact to the midpoint will be a diameter of the section.

Let there be a section of a cone or circumference of a circle ABC, and FG tangent to it, and AC parallel to FG and bisected at E, and let BE be joined.

I say that BE is a diameter of the section.



円錐の切り口または円周ＡＢＣがある。

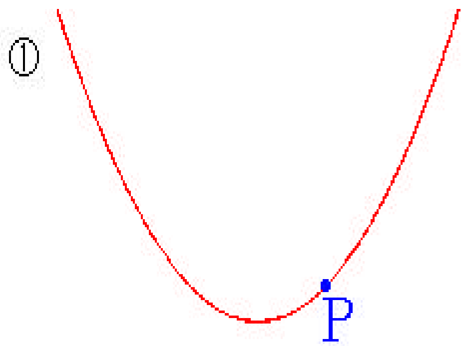
ＦＧはそれに接し、

ＡＣはＦＧに平行でＥで二等分される。

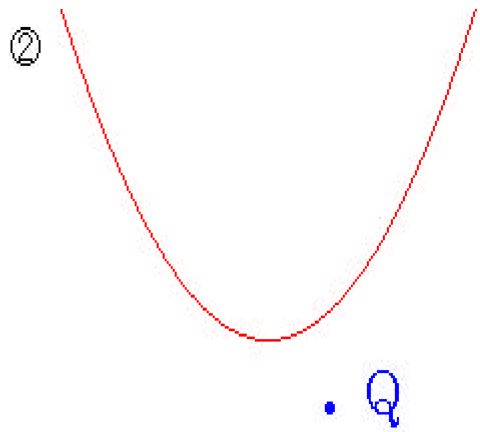
ＢＥは切り口の直径である。

2． 放物線の接線の作図

①放物線上の点における接線



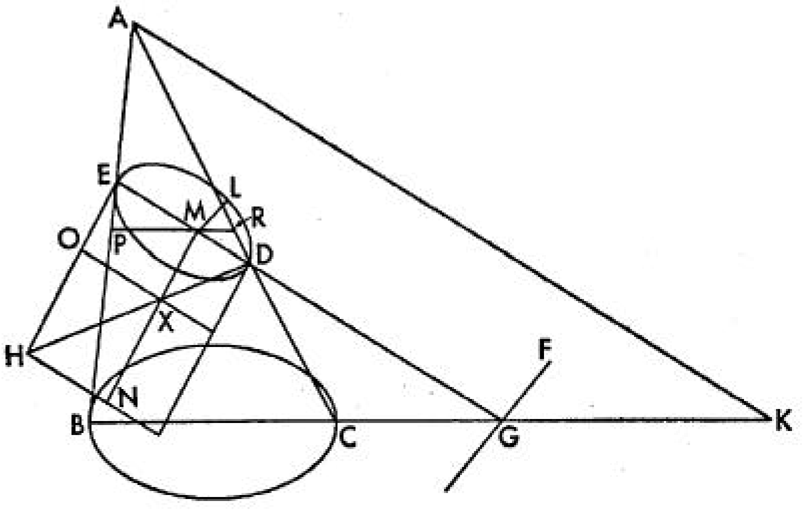
②放物線外の点からの接線



数学ⅡBゼミ③　１２月２１日（金）

アポロニウスの円錐曲線論に接しよう

数学史を通して、新しい数学を発見しよう。



日　時　：　平成１３年１２月１８日（火），１９日（水），２１日（金）
１３：１５～１４：０５

場　所　：　パソコン室

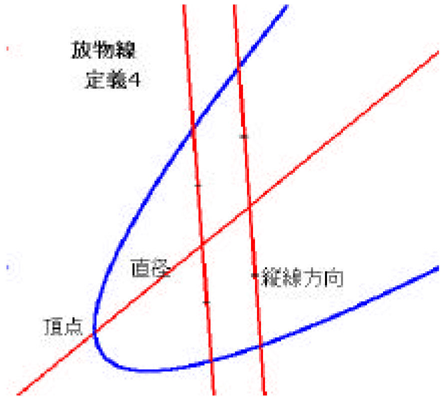
年　　　組　　　番　　氏 名

授業者：筑波大学大学院　修士課程　教育研究科　教科教育専攻　数学教育コース　中嶋俊朗

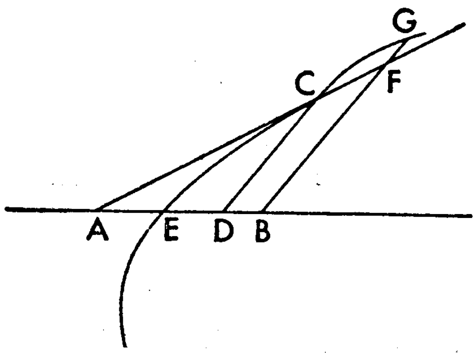
０．　放物線の接線の性質を用いて、作図ツールを使って作図する。

０－１．定義・性質で直径、頂点、接点、縦線方向の関係を考えて、作図する。

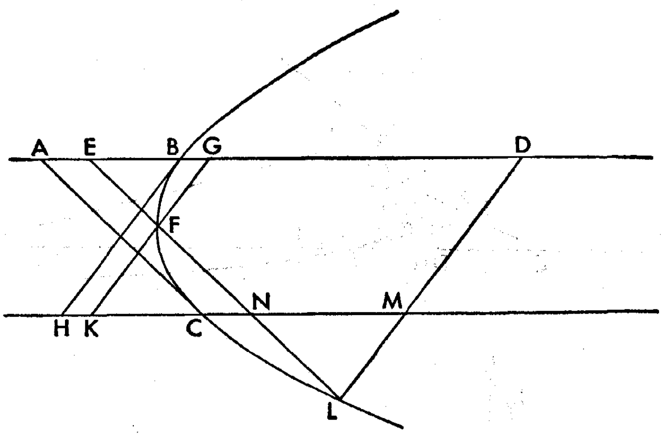
定義４
　直径：平行な直線を二等分する直線
　縦線方向：平行線
　頂点：直線と直径の交点



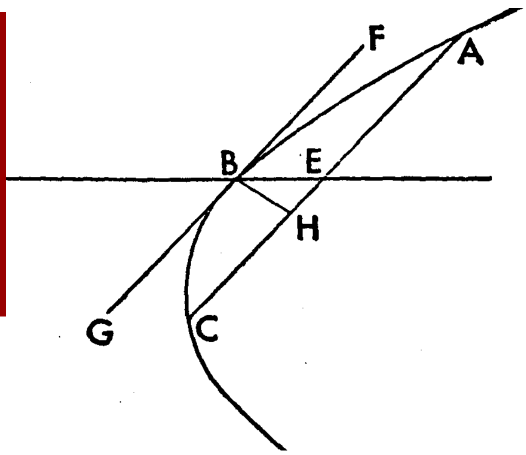
命題３３
　ＡＢが直径
　ＣＤが縦線方向で
　ＡＥとＥＤが等しいとき
　　ＡＣは接線である



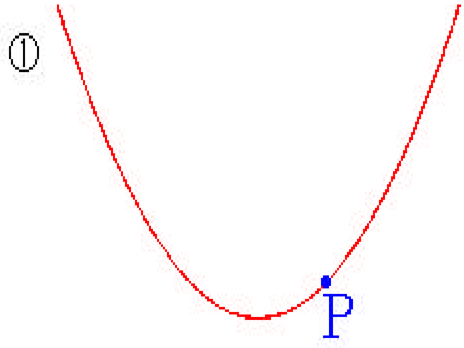
命題４６
　ＡＢＤが直径
　ＡＣが接線
　ＨＣＭとＡＤが平行で
　ＬＮＦＥとＡＣが平行のとき
　　ＬＮとＮＦは等しい



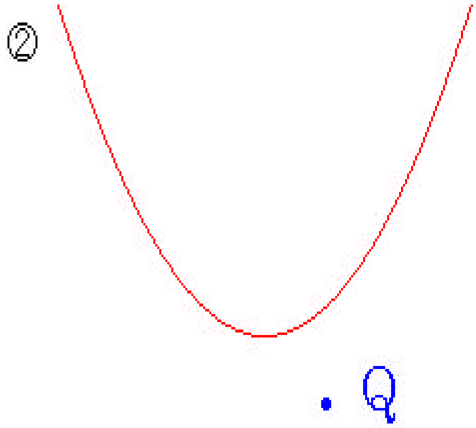
命題７
　ＦＧが接線
　ＡＣとＦＧが平行で
　ＡＥとＥＣが等しい　とき
　　ＢＥは直径である



①放物線上の点における接線



②放物線外の点からの接線



作業手順

①

②

③

④

⑤

⑥

作業手順

①

②

③

④

⑤

⑥

1．その他の円錐曲線（双曲線・楕円）の定義

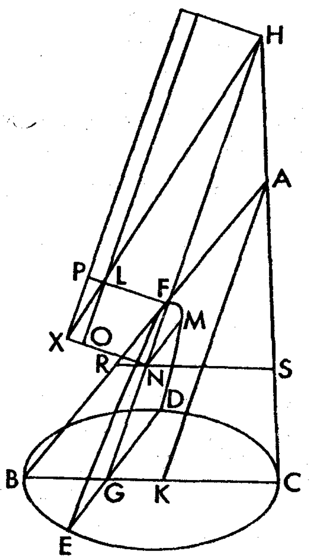
1－1．命題１２

PROPOSITION 12

If a cone is cut by a plane through its axis, and also by another plane cutting the base of the cone in a straight line perpendicular to the base of the axial triangle, and if the diameter of the section produced meets one side of the axial triangle beyond the vertex of the cone, then any straight line which is drawn from the section to its diameter parallel to the common section of the cutting plane and of the cone's base, will equal in square some area applied to a straight line to which the straight line added along the diameter of the section and subtending the exterior angle of the triangle has the ratio that the square on the straight line drawn from the cone's vertex to the triangle's base parallel to the section's diameter has to the rectangle contained by the sections of the base which this straight line makes when drawn, this area having as breadth the straight line cut off on the diameter beginning from the section's vertex by this straight line from the section to the diameter and exceeding (ὑπερβάλλον) by a figure (εἶδος), similar and similarly situated to the rectangle contained by the straight line subtending the exterior angle of the triangle and by the parameter. And let such a section be called an hyperbola (ὑπερβολή).

Let there be a cone whose vertex is the point A and whose base is the circle BC, and let it be cut by a plane through its axis, and let it make as a section the triangle ABC (I. 3). And let it also be cut by another plane cutting the base of the cone in the straight line DE perpendicular to BC the base of the triangle ABC, and let it make as a section on the surface of the cone the line DFE, and

let FG the diameter of the section (I. 7 and def. 4) when produced meet AC one side of the triangle ABC beyond the vertex of the cone at the point H. And let the straight line AK be drawn through A parallel to the diameter of the section FG, and let it cut BC. And let the straight line FL be drawn from F perpendicular to FG, and let it be contrived that



$$\text{sq. } KA : \text{rect. } BK, KC :: FH : FL.$$

And let some point M be taken at random on the section, and through M let the straight line MN be drawn parallel to DE, and through N let the straight line NOX be drawn parallel to FL. And let the straight line HL be joined and produced to X, and let the straight lines LO and XP be drawn through L and X parallel to FN.

I say that MN is equal in square to the parallelogram FX which is applied to FL, having FN as breadth, and exceeding by a figure LX similar to the rectangle contained by HF and FL.

For let the straight line RNS be drawn through N parallel to BC; and NM is also parallel to DE. Therefore the plane through MN and RS is parallel to the plane through BC and DE, that is to the base of the cone (Eucl. XI. 15). Therefore if the plane is produced through MN and RS, the section will be a circle whose diameter is the straight line RNS (I. 4). And MN is perpendicular to it. Therefore

$$\text{rect. } RN, NS = \text{sq. } MN.$$

And since

$$\text{sq. } AK : \text{rect. } BK, KC :: FH : FL,$$

and

$$\text{sq. } AK : \text{rect. } BK, KC \text{ comp. } AK : KC, AK : KB \text{ (Eucl. VI. 23)},$$

therefore also

$$FH : FL \text{ comp. } AK : KC, AK : KB.$$

But

$$AK : KC :: HG : GC :: HN : NS \text{ (Eucl. VI. 4)},$$

and

$$AK : KB :: FG : GB :: FN : NR.$$

Therefore

$$HF : FL \text{ comp. } HN : NS, FN : NR.$$

And

$$\text{rect. } HN, NF : \text{rect. } SN, NR \text{ comp. } HN : NS, FN : NR \text{ (Eucl. VI. 23)}.$$

Therefore also

$$\text{rect. } HN, NF : \text{rect. } SN, NR :: HF : FL :: HN : NX \text{ (Eucl. VI. 4)}.$$

But, with the straight line FN taken as common height,

$$HN : NX :: \text{rect. } HN, NF : \text{rect. } FN, NX \text{ (Eucl. VI. 1)}.$$

Therefore also

$$\text{rect. } HN, NF : \text{rect. } SN, NR :: \text{rect. } HN, NF : \text{rect. } XN, NF \text{ (Eucl. V. 11)}.$$

Therefore

$$\text{rect. } SN, NR = \text{rect. } XN, NF \text{ (Eucl. V. 9)}.$$

But it was shown

$$\text{sq. } MN = \text{rect. } SN, NR;$$

therefore also

$$\text{sq. } MN = \text{rect. } XN, NF.$$

But the rectangle contained by XN and NF is the parallelogram XF. Therefore the straight line MN is equal in square to XF which is applied to the straight line FL, having FN as breadth, and exceeding by the parallelogram LX similar to the rectangle contained by HF and FL (Eucl. VI. 24).

And let such a section be called an hyperbola, and let LF be called the straight line to which the straight lines drawn ordinatewise to FG are applied in square; and let the same straight line also be called the upright side, and the straight line FH the transverse side.

命題１２の主張

命題１１と同様に円錐曲線ＤＥＦをつくる。

直径ＦＧを延長させたとき、三角形ＡＢＣの一辺ＡＣを頂点を越え点Hで出会う。

点Aを通り、切り口の直径ＦＧに平行に直線ＡＫを引き、ＦＧに垂直にFから直線ＦＬを

$KA^2 : BK \cdot KC = FH : FL$　となるように引く。

任意に切り口に点Mをとり、Mを通ってＤＥに平行に直線MNを引く。Nを通るＦＬに平行な直線NOXを引く。直線HＬを結び、Ｘまで延長させ、Ｌ、Ｘを通り、FNに平行に直線LO、ＸＰを引く。

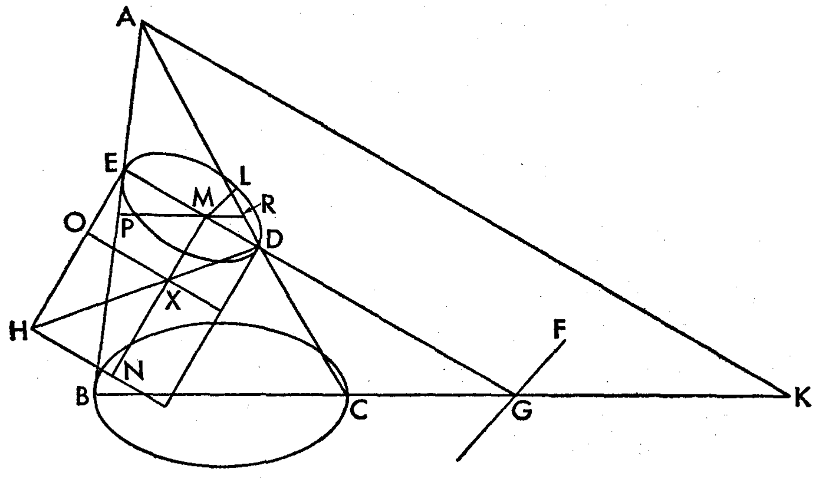
MNの正方形は、ＦＸに幅をＦＮとし、ＨＦ、ＦＬによって囲まれた長方形に相似な図形ＬＸだけ越えられ、あてはまる平行四辺形ＦＸに等しい。($MN^2 = XN \cdot NF$)

1－2．命題１３

PROPOSITION 13

If a cone is cut by a plane through its axis, and is also cut by another plane on the one hand meeting both sides of the axial triangle, and on the other extended neither parallel to the base nor subcontrariwise, and if the plane the base of the cone is in, and the cutting plane meet in a straight line perpendicular either to the base of the axial triangle or to it produced, then any straight line which is drawn from the section of the cone to the diameter of the section parallel to the common section of the planes, will equal in square some area applied to a straight line to which the diameter of the section has the ratio that the square on the straight line drawn from the cone's vertex to the triangle's base parallel to the section's diameter has to the rectangle contained by the intercepts of this straight line (on the base) from the sides of the triangle, an area having as breadth the straight line cut off on the diameter beginning from the section's vertex by this straight line from the section to the diameter, and deficient (ἐλλεῖπον) by a figure similar and similarly situated to the rectangle contained by the diameter and parameter. And let such a section be called an ellipse (ἔλλειψις).

Let there be a cone whose vertex is the point A and whose base is the circle BC, and let it be cut by a plane through its axis, and let it make as a section



the triangle ABC. And let it also be cut by another plane on the one hand meeting both sides of the axial triangle and on the other extended neither parallel to the base of the cone nor subcontrariwise, and let it make as a section on the surface of the cone the line DE. And let the common section of the cutting plane and of the plane the base of the cone is in, be the straight line FG perpendicular to the straight line BC, and let the diameter of the section be the straight line ED (I. 7 and Def. 4). And let the straight line EH be drawn from E perpendicular to ED, and let the straight line AK be drawn through A parallel to ED, and let it be contrived that

$$\text{sq. } AK : \text{rect. } BK \cdot KC :: DE : EH.$$

And let some point L be taken on the section, and let the straight line LM be drawn through L parallel to FG.

I say that the straight line LM is equal in square to some area which is applied to EH, having EM as breadth and deficient by a figure similar to the rectangle contained by DE and EH.

For let the straight line DH be joined, and on the one hand let the straight line MXN be drawn through M parallel to HE, and on the other let the straight lines HN and XO be drawn through H and X parallel to EM, and let the straight line PMR be drawn through M parallel to BC.

Since then PR is parallel to BC, and LM is also parallel to FG, therefore the plane through LM and PR is parallel to the plane through FG and BC, that is to the base of the cone (Eucl. XI. 15). If therefore a plane is extended through LM and PR, the section will be a circle whose diameter is PR (I. 4). And LM is perpendicular to it. Therefore

$$\text{rect. } PM, MR = \text{sq. } LM.$$

And since

$$\text{sq. } AK : \text{rect. } BK, KC :: ED : EH,$$

and

$$\text{sq. } AK : \text{rect. } BK, KC \text{ comp. } AK : KB, AK : KC \text{ (Eucl. VI. 23)},$$

but

$$AK : KB :: EG : GB :: EM : MP \text{ (Eucl. VI. 4)},$$

and

$$AK : KC :: DG : GC :: DM : MR,$$

therefore

$$DE : EH \text{ comp. } EM : MP, DM : MR.$$

But

$$\text{rect. } EM, MD : \text{rect. } PM, MR \text{ comp. } EM : MP, DM : MR \text{ (Eucl. VI. 23)}.$$

Therefore

$$\text{rect. } EM, MD : \text{rect. } PM, MR :: DE : EH :: DM : MX \text{ (Eucl. VI. 4)}.$$

And, with the straight line ME taken as common height,

$$DM : MX :: \text{rect. } DM, ME \text{ rect. } XM, ME \text{ (Eucl. VI. 1)}.$$

Therefore also

$$\text{rect. } DM, ME : \text{rect. } PM, MR :: \text{rect. } DM, ME : \text{rect. } XM, ME \text{ (Eucl. V. 11)}.$$

Therefore

$$\text{rect. } PM, MR = \text{rect. } XM, ME \text{ (Eucl. V. 9)}.$$

But it was shown

$$\text{rect. } PM, MR = \text{sq. } LM;$$

therefore also

$$\text{rect. } XM, ME = \text{sq. } LM.$$

Therefore the straight line LM is equal in square to the parallelogram MO which is applied to the straight line HE, having EM as breadth and deficient by the figure ON similar to the rectangle contained by DE and EH (Eucl. VI. 24).

命題１３の主張

命題１１と同様に円錐曲線ＤＥＦをつくる。

三角形ＡＢＣの両辺で出会う平面で切る。（ＦＧとＢＣが垂直で、切り口が円にならないように）

点Ａを通り、切り口の直径ＥＤに平行に直線ＡＫを引き、ＥＤに垂直にＥから直線ＥＨを

AK^2：ＢＫ・ＫＣ＝ＤＥ：ＥＨ　となるように引く。

任意に切り口に点Ｌをとり、Ｌを通ってＦＧに平行に直線LMを引く。

LMの正方形は、ＥＨに幅をＥＭとし、ＤＥ、ＥＨによって囲まれた長方形に相似な図形だけ不足して、あてはまる面積に等しい。（LM^2＝ＸＭ・ＭＥ）

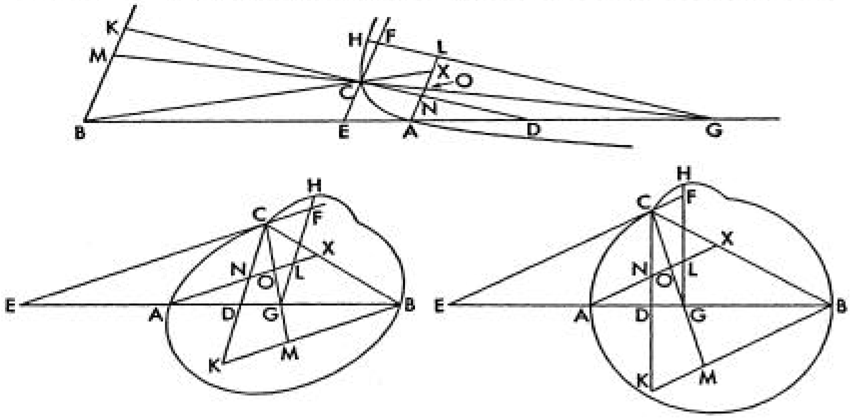
1.　その他の円錐曲線の性質（Ⅰ巻命題 34、36、47、Ⅱ巻命題５、６、７）

内容

PROPOSITION 34

If on an hyperbola or ellipse or circumference of a circle some point is taken, and from it a straight line is dropped ordinatewise to the diameter, and whatever ratio the straight lines cut off by the ordinate from the ends of the figure's transverse side have to each other, that ratio have the segments of the transverse side to each other so that the segments from the vertex are corresponding, then the straight line joining the point taken on the transverse side and that taken on the section will touch the section.

Let there be an hyperbola or ellipse or circumference of a circle whose diam-



eter is the straight line AB, and let some point C be taken on the section, and from C let the straight line CD be drawn ordinatewise, and let it be contrived that

$$BD : DA :: BE : EA,^{1}$$

and let the straight line EC be joined.

I say that the straight line CE touches the section.

直径が直線ＡＢの双曲線、楕円、円周がある。切り口に任意に点Ｃをとる。点Ｃから縦線方向に直線ＣＤを引く。

ＢＤ：ＤＡ

＝ＢＥ：ＥＡ

となるようにする。直線ＥＣを引く。

直線ＣＥは切り口に接する。

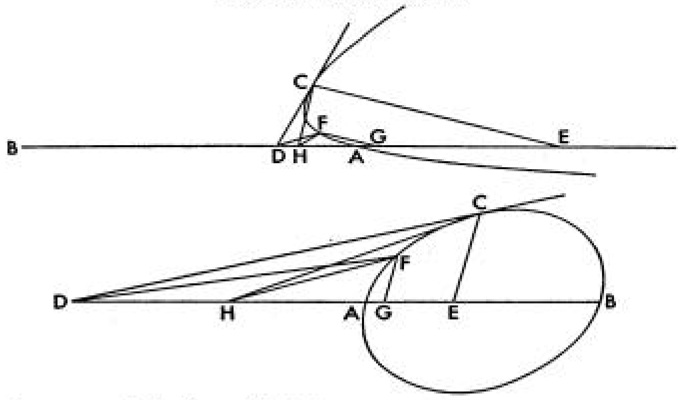
PROPOSITION 36

If some straight line, meeting the transverse side of the figure touches an hyperbola or ellipse or circumference of a circle, and a straight line is dropped from the point of contact ordinatewise to the diameter, then as the straight line cut off by the tangent from the end of the transverse side is to the straight line cut off by the tangent from the other end of that side, so will the straight line cut off by the ordinate from the end of the side be to the straight line cut off by the ordinate from the other end of the side in such a way that the corresponding straight lines are continuous; and another straight line will not fall into the space between the tangent and the section of the cone.

Let there be an hyperbola or ellipse or circumference of a circle whose diameter is the straight line AB, and let the straight line CD be tangent, and let the straight line CE be dropped ordinatewise.

I say that

$$BE : EA :: BD : DA.$$



I say that no straight line will fall between the section and the straight line CD.

直径が直線ＡＢの双曲線、楕円、円周がある。直線ＣＤが接線で、直線ＣＥを縦線方向に引く。

ＢＥ：ＥＡ

＝ＢＤ：ＤＡ

切り口と直線ＣＤの間に引ける直線はない。

Proposition 47

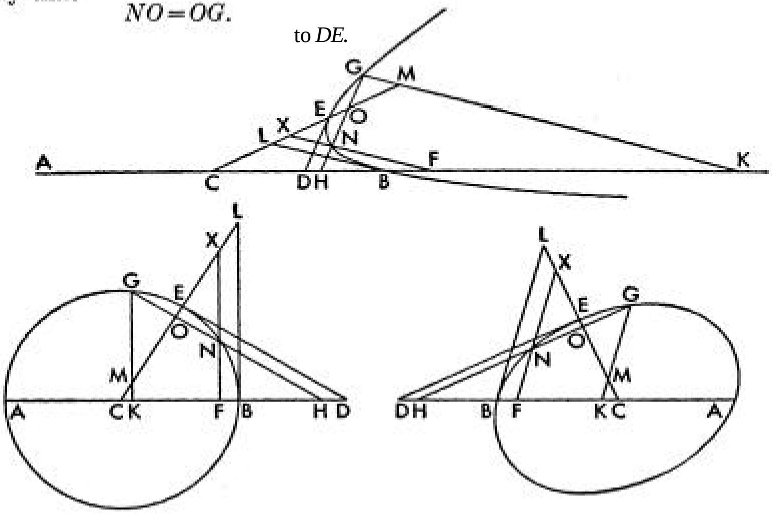
If a straight line touching an hyperbola or ellipse or circumference of a circle meets the diameter, and through the point of contact and the center a straight line is drawn in the direction of the section, it bisects the straight lines drawn in the section parallel to the tangent.

Let there be an hyperbola or ellipse or circumference of a circle whose diameter is the straight line AB and center C, and let the straight line DE be drawn tangent to the section, and let the straight line CE be joined and produced, and let a point N be taken at random on the section, and through N let the straight line $HNOG$ be drawn parallel.

I say that

$$NO = OG.$$

to *DE*.



直径が直線ＡＢで、中心がCの双曲線、楕円、円周がある。

切り口に接線ＤＥを引く。

直線ＣＥを結び、延長する。点Nを切り口に任意にとる。直線ＤＥに平行にNを通って直線HNOGを引く。

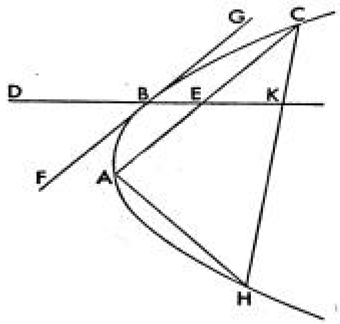
NO＝OG

Proposition 5

If the diameter of a parabola or hyperbola bisects some straight line, the tangent to the section at the end of the diameter will be parallel to the bisected straight line.

Let there be the parabola or hyperbola ABC whose diameter is the straight line DBE, and let the straight line FBG touch the section, and let some straight line AEC be drawn in the section making AE equal to EC.

I say that AC is parallel to FG.



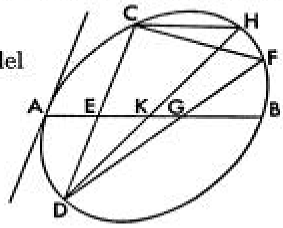
直径が直線ＤＢＥである放物線または双曲線ＡＢＣがあり、直線ＦＢＧが切り口に接し、任意の直線ＡＥＣが切り口内でＡＥとＥＣを等しくする。Ａ

Proposition 6

If the diameter of an ellipse or circumference of a circle bisects some straight line not through the center, the tangent to the section at the end of the diameter will be parallel to the bisected straight line.

Let there be an ellipse or circumference of a circle whose diameter is the straight line AB, and let AB bisect CD, a straight line not through the center, at the point E.

I say that the tangent to the section at A is parallel to CD.



直径が直線ＡＢである楕円、円周があり、ＡＢは中心を通らない直線ＣＤをＥで二等分する。

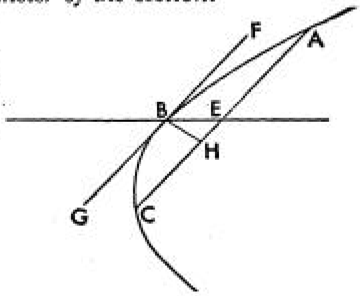
切り口にＡで接する接線はＣＤに平

PROPOSITION 7

If a straight line touches a section of a cone or circumference of a circle, and a parallel to it is drawn in the section and bisected, the straight line joined from the point of contact to the midpoint will be a diameter of the section.

Let there be a section of a cone or circumference of a circle *ABC*, and *FG* tangent to it, and *AC* parallel to *FG* and bisected at *E*, and let *BE* be joined.

I say that *BE* is a diameter of the section.



円錐の切り口または円周ABCがある。

FGはそれに接し、

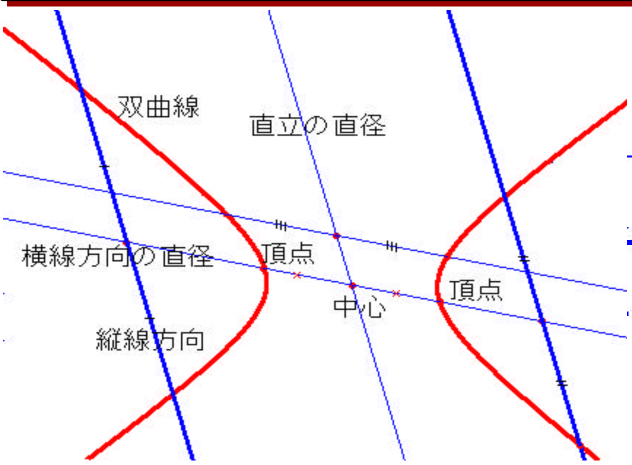
ACはFGに平行でEで二等分され、BEを結ぶ。

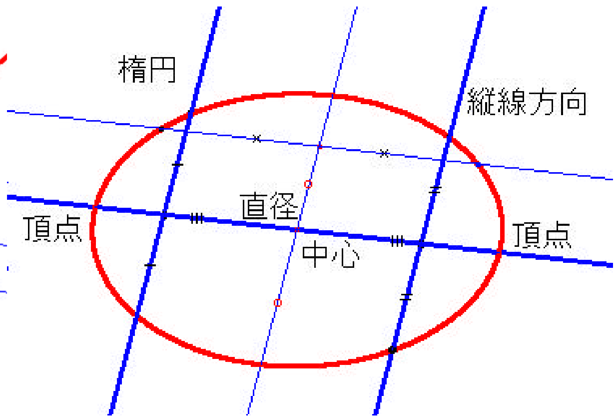
BEは切り口の直径である。

3．　接線の性質を用いて、作図ツールを使って作図する。

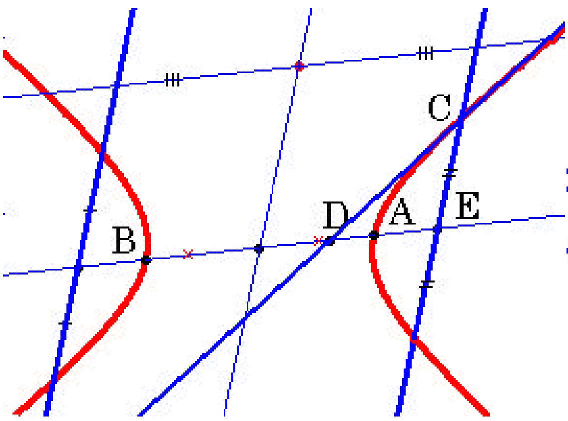
3－1．定義・性質で直径、頂点、接点、縦線方向の関係を考えて、作図する。

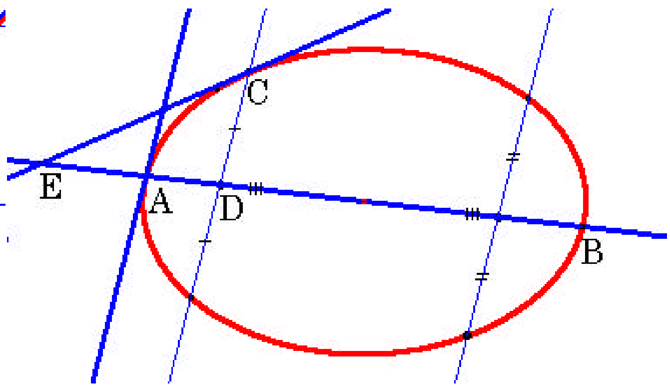
定義4・5　　直径：平行な直線を二等分する直線
縦線方向：平行線
頂点：直線と直径の交点





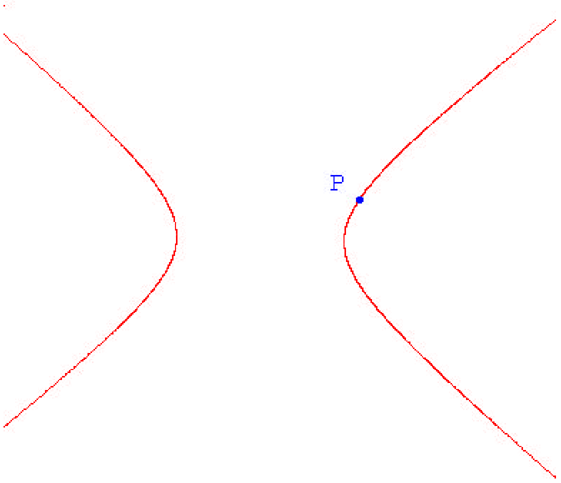
放物線との違い
命題３４、３６　　BE：EA＝BD：DA



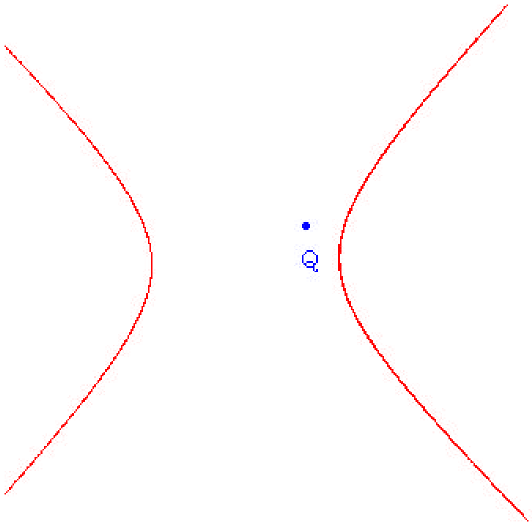


３．双曲線の接線の作図

３－１．双曲線上の点における接線

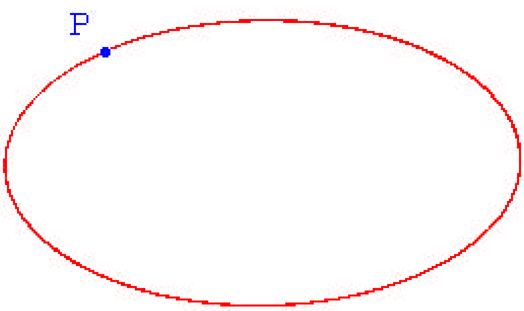


３－２．双曲線外の点からの接線

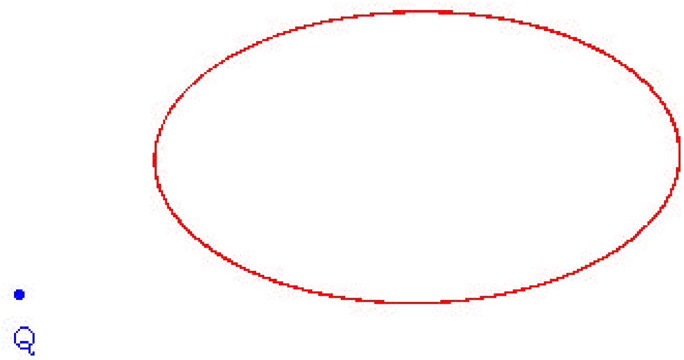


４．楕円の接線の作図

４－１．楕円上の点における接線

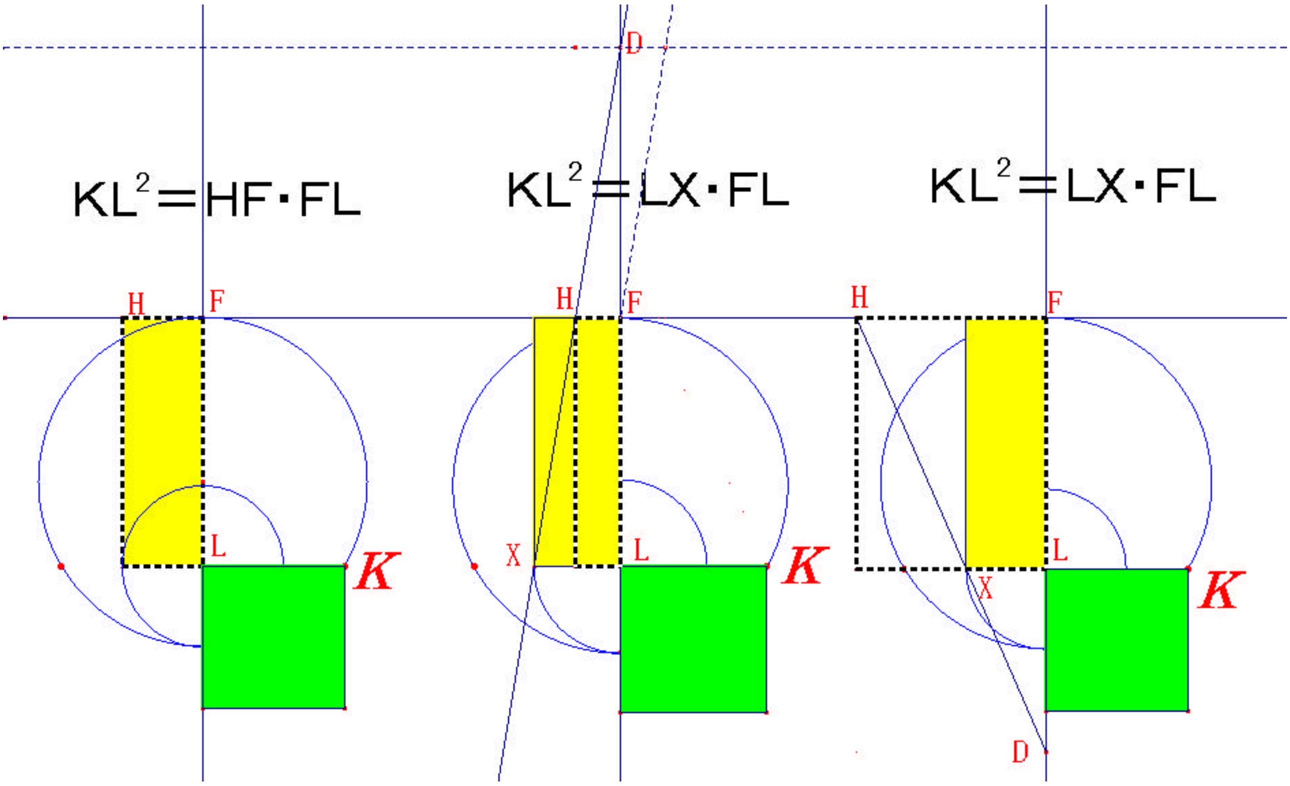


４－２．楕円外の点からの接線



円錐曲線の定義

放物線(parabola) **あてはまる**　　**双曲線**（hyperbola）**超過する**　　**楕円**（ellipse）**不足する**



カブリ(CABRI　GEOMETRY　II)の使い方

2001.12.19

A．クリック：マウスの左ボタンを１回押す

B．ドラッグ：移動させたい図形を指し、マウスの左ボタンを押しながら目的の位置まで動かす。

C．図形の削除：削除したい図形を選択し，点線表示されたら、Delete　キーを押す。

D．作図を途中でやめる：作図画面の外でクリックする。

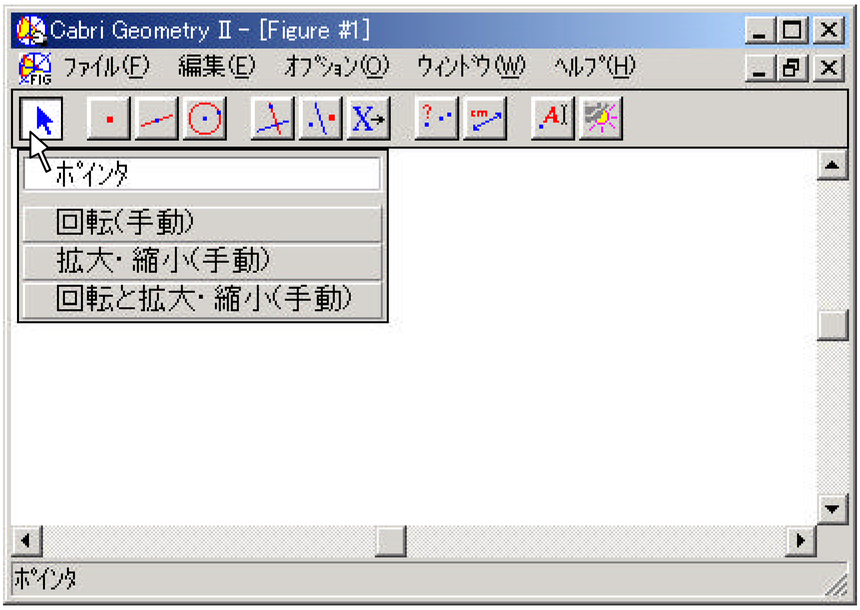
E．取り消し／やり直し：1 回前の操作のみ取り消したり、もとに戻したりすることができる。

F．図形の選択や移動

選択したい図形を示すメッセージが表示されたらクリックします。

図形をドラッグし(ポインタが手でつかんだ形になります)、移動したい場所に移動させます。

図形の選択を解除するには、何もない場所でクリックします。



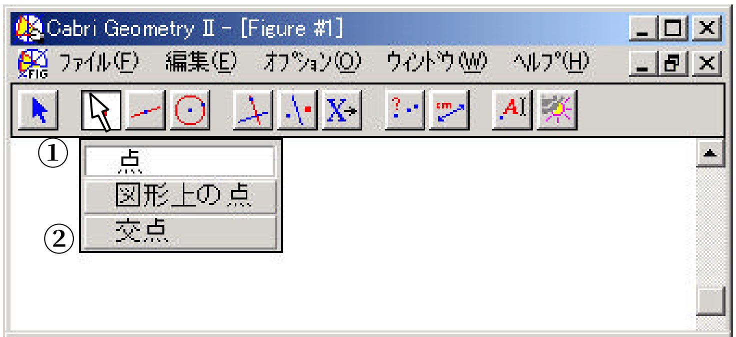
G. 作図する

①点を描く

作図したい場所でクリックする

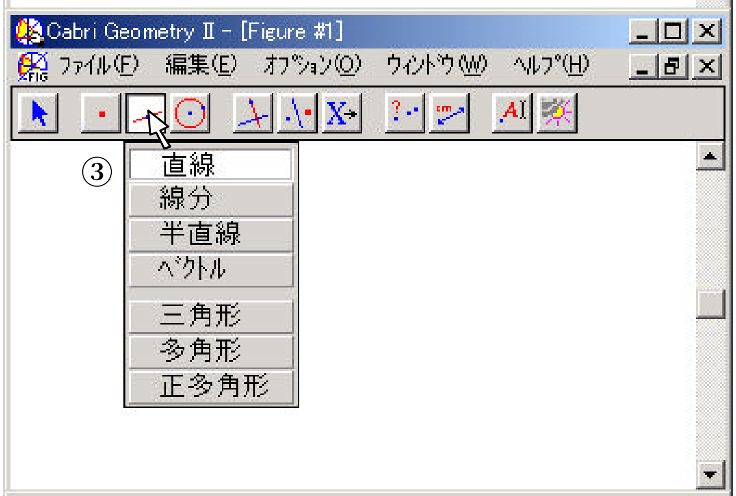
②交点をとる

交点をとろうとする２つの図形(線分，直線など)を選択する。



③直線を描く

直線が通る点をクリックして
引きたい方向にカーソルを移動し
クリックする。



④円を描く

円の中心をクリックし、中心から離しクリックして半径を決める。

⑤垂線を描く

作図される直線に垂直な直線を指定し
垂線が通す点をクリックする。

⑥平行線を描く

作図される直線に平行な直線を指定し、
平行線が通る点をクリックする。

⑦中点をとる

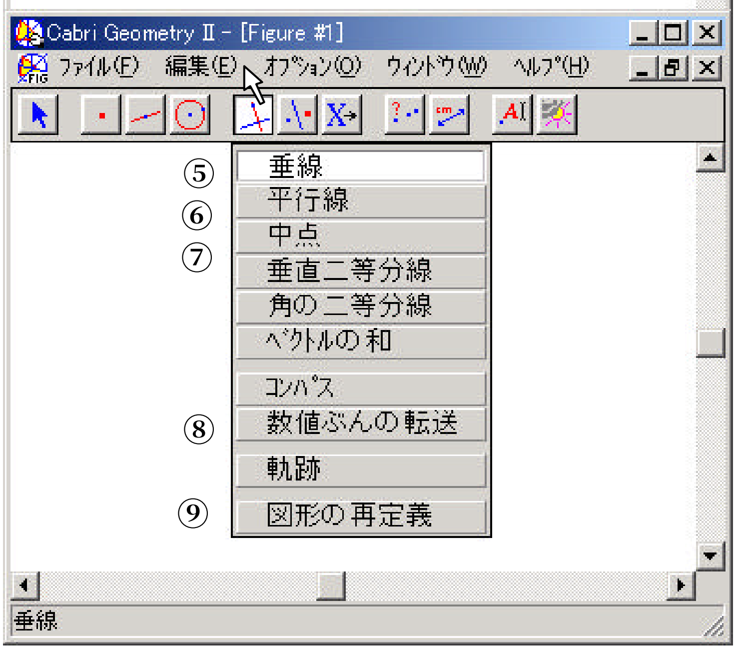
２点を選ぶ。

⑧コンパスで長さをとる

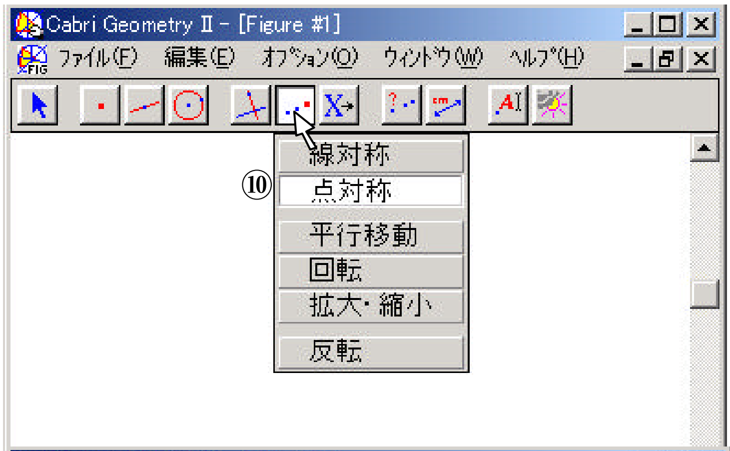
線分の長さをコンパスでとる

⑨軌跡を描く

軌跡を描きたい図形(点)を選択し、
経路上にある点を選択する。

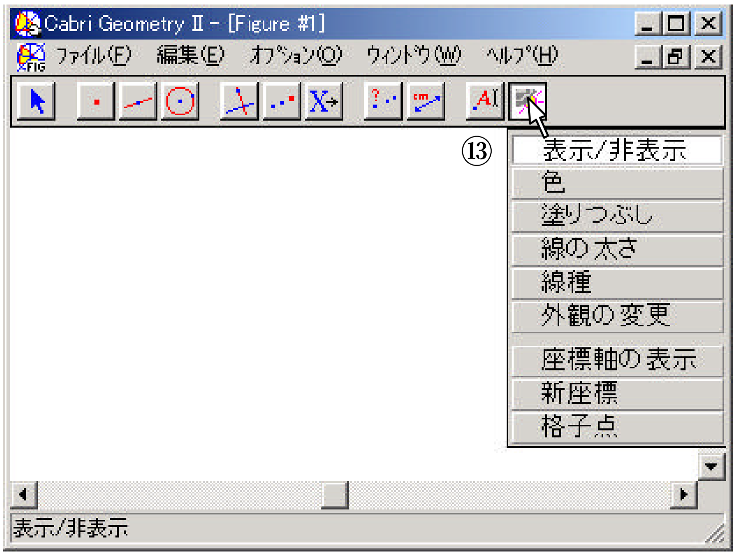


⑩点対称の点をとる
もとの図形を選択し、
対称の中心点を選択する。



⑪図形に名前をつける
点をクリックして選択する、
ボックスに文字を入力する。
⑫トレースを残す
「跡」を表示する図形を選択する。
図形が点線に変わる。
動かす図形をドラッグする。

⑬非表示にする／表示する
非表示にしたい図形を選択する。
非表示の図形は点線で表示される。



図形の色・太さ・線の種類変更
色・太さ・線種を選択し、図形を選択する。