ライプニッツ差分のグラフ表示による微分指導

―「分数式にも無理式にも煩わされない極大・極小ならびに接線を求める新しい方法」を教材として―

筑波大学大学院修士課程教育研究科

関　淳

要約

本稿では数学史を取り入れた授業の実践例として、微積分の創始者のひとりであるといわれる、ライプニッツの一次文献を解釈することにより、微分法という概念を歴史的に再認識させることで単なる計算技術としての微分ではなく、そこに含まれる接線とのかかわりを理解させる授業を実践した。その結果多くの生徒から微分に対する興味・関心の高まりと微分に対するより深い理解が感じられた。この結果から数学史を用いた微分指導が有用であると考えられる。

1. はじめに

「微分積分」は高校数学を代表する単元のひとつといえる。それは微積分という概念が高校においてはじめて学習するものであること、また中学校における 1 次関数、数学Ｉにおける２次関数の流れをふむ関数学習の最終地点として微積分が重要な役割を担っていること、そしてなによりも極限を基本概念とする微分積分の習得が非常に困難であるからではないだろうか。それゆえ数学IIの「微分・積分の考え」において微積分の概念を正確に理解し定着させることが必要となってくる。しかしながら、生徒の多くはその有用性から導関数の求め方や３次関数のグラフの表し方といった単なる計算技術として微分を理解しており、その本質的な理解をしている生徒は少ないように思われる。

そこで本研究では、平成 15 年より施行される高等学校学習指導要領より加わった「数学基礎」において紹介されている「数学史」に注目する。17 世紀の微積分

の歴史に注目した先行研究としては神長（1984）[1]や青木（2001）[2]が挙げられる。これらの研究成果を考慮し本研究では微分の概念理解という点に焦点をおき、それに数学史がいかに有用であるかを考察していく。礒田（2001）[3]は「テキスト解釈による異文化体験を通じて、人の営みとしての数学が顕在化し、人の営みを志向して現在の数学相対化するものとしての文化的視野の覚醒が起こる」と述べており、また Jahnke（2000.）[4]は歴史的なテキストを読むことによってこれまでとそれとは異なるものとの置き換え[5]によってカルチャーショックを与えうると述べている。これらの考えを元に微積分の歴史を学び一次文献を解釈することにより、生徒の微積分の必要性、および有用性を再認識させ学習意欲を高め、より本質に迫るような微分の概念形成を目的とする。

また、グラフ表示の手段として作図ツール（Cabri Geometory Ⅱ以下カブリとよぶ）を用いることにした。これにより、数学におけるテクノロジーの有用性についても議論してゆくことにする。

2. 研究目的・方法

本研究では以下のことを目的とする。

目的：原典を取り入れた教材を作図ツールを用いて解釈することにより、微分の概念をより深く正確に定着させることができるか考察する

目的達成のために以下のような下位課題を定めた。

下位課題１：歴史上の微分を学習することで、生徒の微分に対する考え方が変化するか考察する。

下位課題２：数学史を用いた学習によって、人の営みとして数学を体験することができるか考察する。

下位課題３：作図ツールの利用が数学の理解を促進するのに効果があるのかを考察する。

---

[1]高等学校における微積分指導に関する一考察－微積分額形成の歴史を踏まえて－

[2]数学者の新方法の公示による生徒の数学観の変容に関する一考察～フェルマーの論文「極大および極小値研究のための方法」の解釈を通じて～

[3]異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒に関する一考察

―隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて―

[4] The use of original source in the mathematics classroom

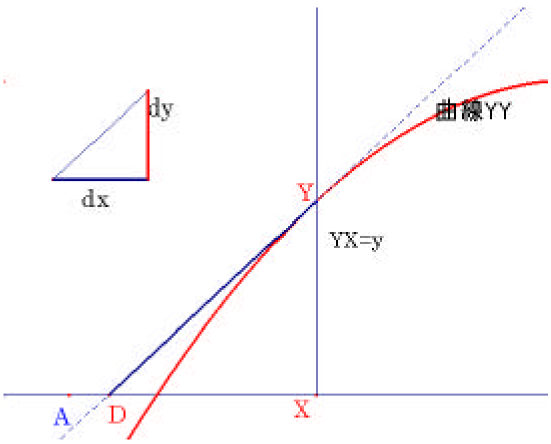
[5] Jahnke の定義では置き換え(replacement)とは Integrating history in mathematics replaces the usual with something different : it allows mathematics to be seen as an intellectual activity, rather than as just a corpus of knowledge or a set of techniques. としている

これらの目的・課題に対して、原典をとりいれた教材を開発しそれを用いた授業を実践した。また授業前後にアンケートを実施し、その結果や授業のビデオをもちいて本研究の目的が達成されたかを考察していく。

3. 授業概要

3．1　教材開発

青木（2001）[2]は17世紀の微積分学の形成過程を題材にした授業研究としてフェルマーの極大極小値問題を取り上げており、それにより「生徒は数学の連続性・発展性を感じ取ることができたと認識でき、数学観の変容がうかがえる」と報告している。本研究では微分という概念自体のより明確な理解を目標に原典として G.W.ライプニッツの 1684 年に発表された「分数式にも無理式にも煩わされない極大・極小ならびに接線を求める新しい方法、またそれらのための特別な計算法」を取り上げた。この論文は発表された最古の微分に関する論文としていわれている。この中で発表当時まだ無限小の概念を確立できていなかったライプニッツは、無限小を用いずに微分を定義しようとしている。その方法とは微分係数が接線の傾きであることに注目し、任意点から軸におろした垂線とその点における接線を引き垂線の長さと接射影の長さとの比の値が任意の線分 dx に対する比の値になるように dy を定めている。こうすることで $\dfrac{dy}{dx}$ の値はその点における接線の傾きつまり微分係数と等しくなる。また dx は任意であるので、その長さを 1 としてもその一般性は失われず、このとき線分 dy こそが微分係数と等しくなり、この線分のことをライプニッツは差分[6](differentia)とよんでいる。これを用いることにより、極限という概念を用いることなく微分が曲線の接線の傾きであることを理解させ、カブリによるグラフ化をすることによって、導関数がどのようにして作られるのかを理解する教材を作成した。



ライプニッツによる差分の定義

---

[6]本来、差分とは「x を区間 I を動く実変数、y を区間 I における x の関数とし、$\varDelta x$ は有限一定の値とする。x および $x+\varDelta x$ が、区間 I 内にあるとき $\varDelta y(x)=y(x+\varDelta x)-y(x)$ を x における y の差分という」と定義されるが本研究では上のように定義することにする。

3．２　授業環境

日時：平成 13 年 11 月６，７，８日

対象：県立高校　第２学年（2 クラス 85 名）

数学Ⅱ「微分法」履習中

準備：コンピュータ（Windows）、作図ツール（Cabri Geometry Ⅱ）、Microsoft Power Point2000、ビデオプロジェクター、実物投影機、事前事後アンケート、授業資料

3．３　授業展開

(１時間目)

目標：微分誕生の歴史を学び、「分数式にも無理式にも煩わされない極大・極小ならびに接線を求める新しい方法、またそれらのための特別な計算法」を解釈することによりライプニッツの差分の定義を理解する。

まず、授業の導入として 17 世紀における微積分の確立の歴史を紹介するため、フェルマーとデカルトの接線法を解説した。そうすることで、接線法と微分法とのつながりを生徒に気付かせ、ライプニッツの業績に興味を抱かせるように授業を進めていった。

I.

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, ITEMQUE TANGENTIBUS, QUAE NEC FRACTAS NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR, ET SINGULARE PRO ILLIS CALCULI GENUS *).

Sit (fig. 111) axis AX, et curvae plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatae ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quae vocentur respective v, w, y, x, et ipsa AX, abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE, axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, et recta, quae sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad XB (vel XC, vel XD, vel XE) vocetur dv (vel dw, vel dy, vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, vel y, vel z).

【原典】

A NEW METHOD FOR MAXIMA AND MINIMA AS WELL AS TANGENTS, WHICH IS NEITHER IMPEDED BY FRACTIONAL NOR IRRATIONAL QUANTITIES, AND A REMARKABLE TYPE OF CALCULUS FOR THEM, BY G.W.L.

Let an axis AX and several curves such as VV, WW, YY, ZZ be given, of which the ordinates VX, WX, YX, ZX, perpendicular to the axis, are called v, w, y, z respectively. The segment AX, cut off from the axis [*abscissa ab axe*[1]] is called x. Let the tangents be VB, WC, YD, ZE, intersecting the axis respectively at B, C, D, E. Now some straight line selected arbitrarily is called dx, and the line which is to dx as v (or w, or y, or z) is to XB (or XC, or XD, or XE) is called dv (or dw, or dy, or dz),[2] or the difference[3] of these v (or w, or y, or z).

【英語訳】

そして、ライプニッツはどのように微分を考えていたのかを理解しようという目的のもと、一次文献である原典を実際読み進めていくことにした。しかし原典はラテン語であるため、その下に同文章の英語約を掲載し次のようなやり取りをすることで授業を展開していった。

質問①：原典と英語訳とを見比べながら、次の解説を穴埋めしていきましょう

分数式にも無理式にも煩わされない極大・極小ならびに接線を求める
新しい方法、またそれらのための特別な計算法
（1684年10月発表）

AXを軸とし、いくつかの曲線VV，WW，YY，ZZをとります。曲線から軸にたいしておろした[ ]をVX，WX，YX，ZXとし、それぞれv，w，y，zと呼びます。次に[ ] VB，WC，YD，ZEはそれぞれ軸と点B，C，D，Eで交点を持つとします。このときある任意の線分dxをとり、v（またはw，またはy，またはz）のXB（またはXC，またはXD，またはXE）に対する割合が、dyのdxに対する割合と同じになるようにつまり

dy：　＝y：

となるように、線分dy（またはdw，またはdy，またはdz）をとり、これをv（またはこれらのw，またはy，またはz）の差分とよびましょう。

【日本語訳】

授業者：この最初の単語のNOVAって英語で言うと、どの単語に対応しているかな？

生徒1：NEWです。

授業者：じゃ、どういう意味だろう。

生徒1：新しい。

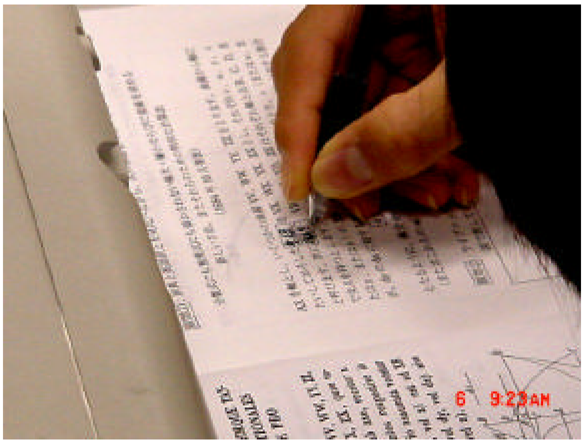
授業者：そうだね、それではこのMETHODUSは

生徒2：METHOD。

授業者：意味は

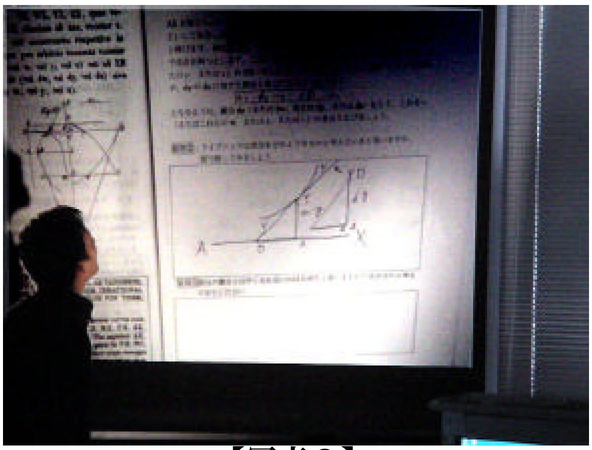
生徒2：方法。

授業者：そのとおり、つまりこの論文はなにか「新しい　方法」について書いていということがわかります。どうやら別にラテン語が読めなくても英語との対応を見てゆけば読めそうですね。それでは同じ要領でとなりのページの穴埋めをやってみてください。



【写真1】

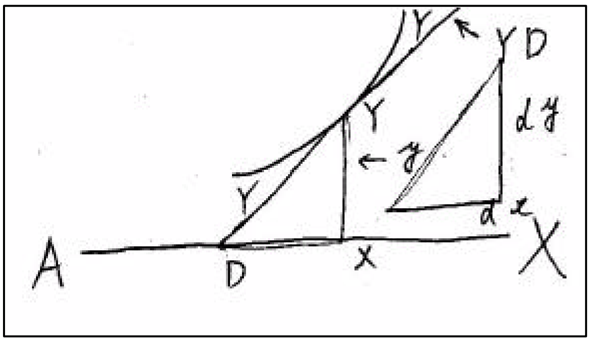
このようにして原典を解釈していった。とはいえ、全文を訳させるには時間が足りなく、第一生徒の集中力も続かないであろうと考え、重要な単語のみを穴埋め形式にて訳させた。【写真1】その結果、ほとんどの生徒がキーワードとなる単語を日本語として引き出すことが出来た。



【写真2】

次にこの訳をもとに差分の定義を理解し、差分の定義を図に表すという課題を出した。様々な解答が生徒からなされたが、その中から数名、前に出て実物投影機を使って発表してもらった。次はそのときの生徒の発表である。

生徒3：（任意の）曲線YYを書き、適当に垂線を引いてYXとする。次に曲線の接線をとり、軸との交点をDとする。ひとまずここまででおいておき、適当にdxをとり、DXとYXの比がdxとdyの比と等しくなるようにdyをとればよいから、dxの端をここ（点Y）に重ねて（軸と平行にすれば）、dyはここ（反対の端からの垂線の長さ）になる。【写真2】



【生徒の解答】

これらの活動から、生徒は差分というもののイメージが固まってきたようであった。しかしここで注意しなければならないことは、差分とはあくまでも線分の長さであり、本来変化の割合の極限である微分とは根本的に異なっているということを生徒に認識させることである。そこで生徒たちに次のような発問をした。

問：差分が微分とよばれず、あえて差分という呼び方をされているのはなぜだと思いますか

この問に対しては、しばらく考えてもらった後、口頭で解答してもらったのだが、生徒から様々な意見がでた。その中からいくつかをここで取り上げる。

生徒４：差分は微分を求めるための道具だから

生徒５：差分は高さでしかないため、接線の傾きである微分とは異なる

生徒６：dx を無限に小さくすると、比の値が $\frac{0}{0}$ になってしまうのでそれをさけたかった。

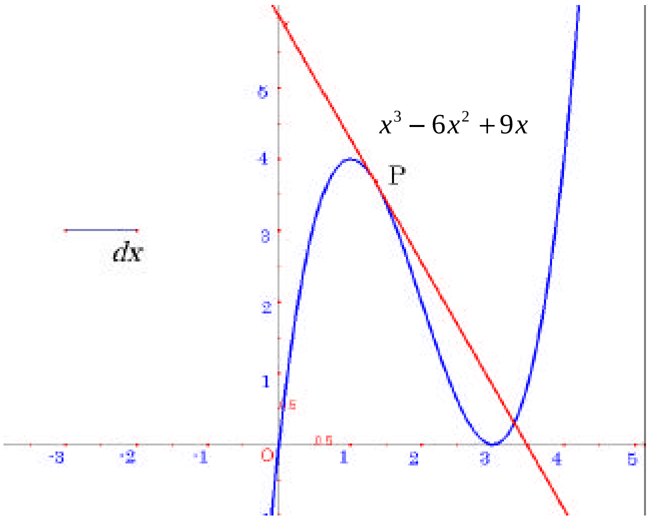
生徒７：差分は有限な線分の長さで、微分には無限の概念が含まれている。

ここで、授業者が望んでいた解答は７の有限と無限の違いである。しかし他の生徒からでた解答には、微分が接線の傾きであるということや、不定形についてなど、微分や極限の本質を突く発言がでたことは、非常に興味深い結果であった。ここでは全ての解答を尊重した上で、解答例として生徒７の説明を解説し１時間目の授業をしめくくり。授業後アンケートを本時の感想を記入してもらった。

（２時間目）

目標：カブリを用いて、差分をグラフとして表現することで導関数の意味を理解し、差分の有用性を確認する。

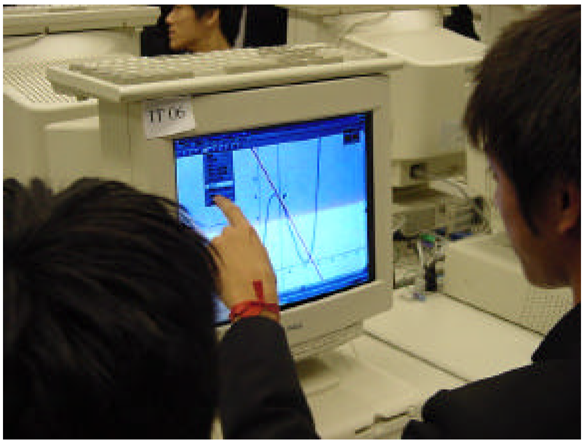
まず、前時の復習として差分の定義を確認した後、３次関数の差分をとる問題に取りかかった。２時間目の活動は、生徒たちが実際カブリで３次関数の差分をとりその導関数を求めるというものである。そこで次のような問題に取り組んだ。



【図１】

問：x^3-6x^2+9xの導関数を求めよ。

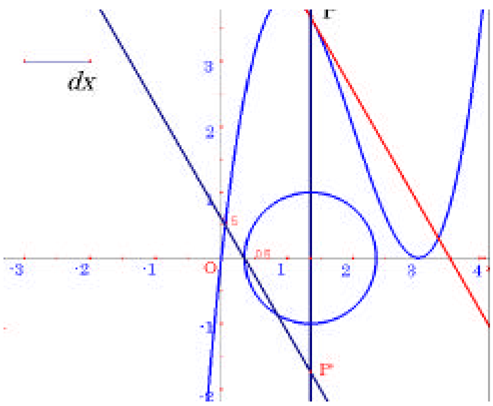
はじめに、生徒にこの導関数を、微分を使って計算してもらった。生徒がまだ微分を履修中ということもあってか、少々とまどう様子もあったが、全員の共通解答として$3x^2-12x+9$という式が挙げられた。
そこで、カブリを使ってこの関数の差分をとってみようということで、こちらが事前に用意しておいた、x^3-6x^2+9xの関数とその接線のファイルを生徒に配布した。【図１】



【写真３】

この図から点Ｐの差分をとってゆくのであるがそれまでには次のような行程が必要である。

① Ｐをとおるｘ軸の垂線を引く
② ①の垂線とｘ軸との交点を取る
③ ②の交点からdxの長さを取る（半径dxの円を取る）
④ ③の円とｘ軸との交点をとる
⑤ ④の交点をとおる、Ｐの接線の平行線をとる
⑥ ⑤の平行線と①の垂線の交点を取りＰ’とする



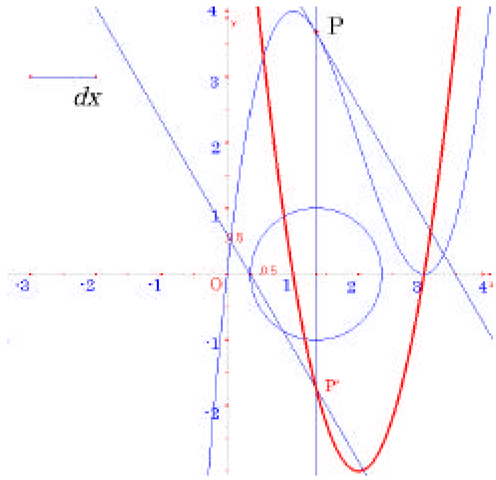
【図２】

これらの行程を行うとｘ軸と点Ｐ’との距離こそが点Ｐにおける差分となる。今回受講した生徒のほとんどが、カブリ未経験だったため授業者がひととおり全ての行程をその意味を追いながら実行し、生徒に示した。その後一つ一つの行程を生徒の進行状況を確認しつつ、全員が完成できるよう注意して作図を進めていった。【写真３】誤って操作してしまい遅れてしまう生徒もいたが、授業者のサポーターがつき

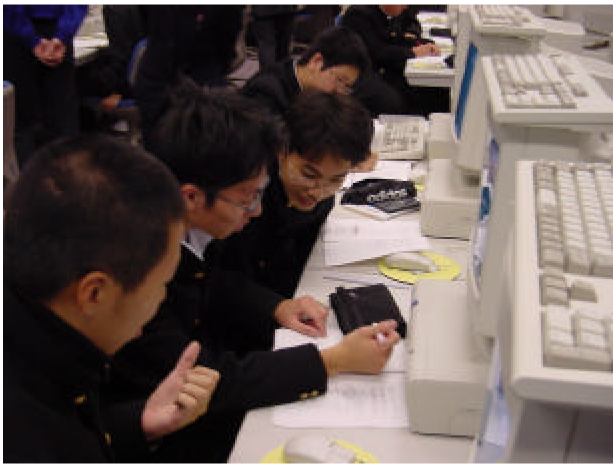
っきりで指導することで対応した。最終的に、かなりの時間は要したが（20分）全ての生徒が差分をとることが出来た。【図２】

x 軸と点 P’との距離が差分となることから、これが点 P における微分係数になっていることを説明し、点 P を動かすことで、P’のトレースが取れることができることを解説し、作図した。すると P’のトレースが次第に放物線を描いている【図３】ことに気が付いたのか、いたるところで、歓声があがった。【写真４】

【写真４】



【図３】



【写真５】

まとめとして、次のような発問をした。

問：はじめ計算した導関数と、いま作図したグラフを比べるとどうだろうか

最初は戸惑っていた様子だったが、しばらくすると…

生徒８：あ、これを因数分解するとさぁ

生徒９：え、なに？

生徒８：ほら、x 軸との交点が

生徒９：あ、ほんとだ。

生徒８：y 軸との交点はどうだ

生徒 10：おおっ、すごい

などの議論が、さまざまなところで起こり【写真５】、最終結論としてほぼ全員の生徒が、差分の軌跡がきちんと導関数になっているという結論に達した。

最後に差分と導関数との関係そして、差分と微分の関係から微分と導関数との関係についてまとめ、授業を締めくくり、授業後のアンケートに解答してもらった。

発展として、3 次関数だけではなく、三角関数や指数・対数についても同様のことしたいと考えていたのだが、時間の関係上、自由課題としファイルのみを生徒に配布した。

４.考察

事前事後および各授業後のアンケートより下位課題１から３を考察してゆく

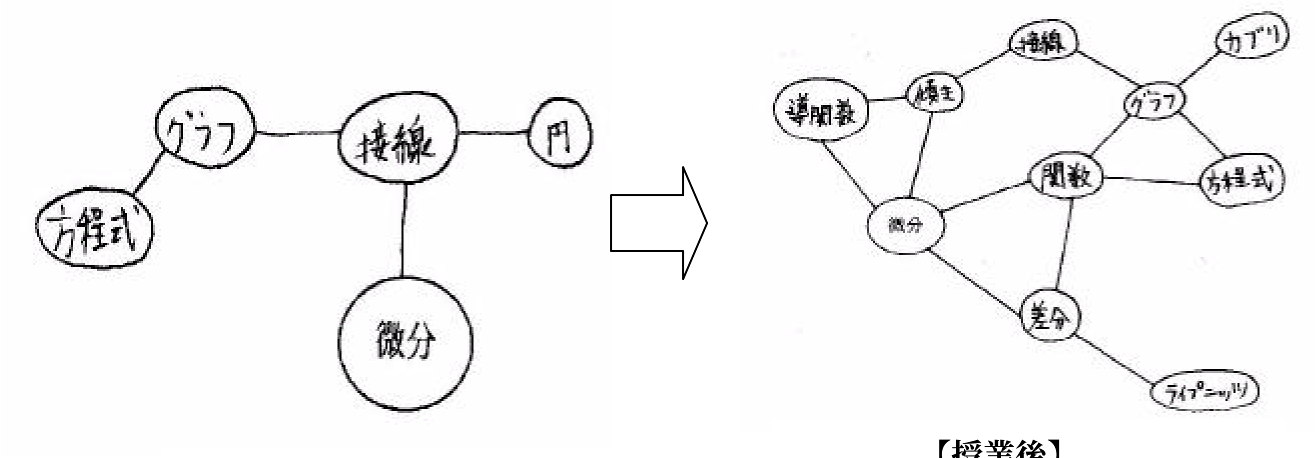
下位課題１：歴史上の微分を学習することで、生徒の微分に対する考え方が変化するか考察する。

授業後の感想よりそのまま抜粋

- なんとなく使っていた微分というものがこんなに奥が深いのだと驚きました
- 教科書には載っていない微分を教わることが出来てよかった
- 微分の基本概念みたいなものを習ってよかった
- 普段教科書で言う微分は「無限に小さくする」と言う概念が良くわからないがライプニッツの差分は実際、カブリでやってみることでわかりやすかった
- 微分法にも差分を用いるものや今学んでいるやり方など様々な求め方がありおもしろかった
- 差分で導関数を求めるのはとても楽しいしうる覚えであった導関数が目で見えることによって理解が深まった
- 微分の元の部分から学んで今までの授業でやっていたことで足りなかった部分が少し埋まったきがする
- 教科書では 3 次関数の微分が何でそうなるか理解できなかったがなぜそうなるかわかった
- 微分では本当に導関数のとおりかたむきになっているかわからなかったが差分はグラフになる過程がよくわかって面白かった
- （微分の）本質を理解できた

これらの結果は生徒が 1 時間目の授業において微分の歴史的背景を学んだり、原典を解釈することで微分と接線の関係を理解するという活動から生まれた解答だと考えられる。また 2 時間目に行った有限線分である差分を実際グラフに表すという活動からより視覚的に導関数の概念が理解できたことがわかる。以上のことから生徒の微分に対する考えがあいまいなものから、より概念的に明確化していることが読み取れる。また下の図はある生徒の微分に関する概念マップである。

これをノヴァック・ゴーウィン（1984）[7]をもとに考察していく。授業前この生徒の微分に対するイメージは方程式のグラフを求めるための接線であり微分というものであった。しかし授業後には導関数との接線の傾きの関係や微分とのつながりを表現している。このことからこの生徒の微分に関するこれまでの概念が授業によって得られた新しい概念によって統合的に調和されたことが見て取れる。この生徒の授業後の感想を見ると「教科書にない基本概念のようなものをしってよかった」となっている。このことからも課題 1 は達成されたように思われる。



【授業前】　　　　【授業後】

下位課題２：数学史を用いた学習によって、人の営みとして数学を体験することができるか考察する

授業後の感想よりそのまま抜粋

- 今僕達が苦労しているものを 300 年以上前に（微分）発見していたなんてすごいと思う
- 発明した人の気持ちになって微分を学ぼうと思った
- 微分という単元だけでも様々な人々がいてすごしづつ考え方がちがっていてすごいとおもった
- 今僕達は証明された公式を使っていますがそれを発見し考え出すと言うのはかなりの知識、時間ひらめきが必要だからライプニッツは偉大な人だと思った
- ライプニッツと言う人は知らなかったけど。この人のやり遂げたことが今ではいろんな人に伝えられるまでの事をしたことを改めて思うと授業をていねいにうけて身につけたいと実感した
- 普段、微分微分と口にしているけどはるか昔に活躍したライプニッツなど様々な人たちが

[7] 子どもが学ぶ新しい学習法　概念地図法によるメタ学習

絡んでやっと発見したことを改めるとこれからわからずじまいで終わらせてはいけない
- 今日の数学の元を考えてきた人々について勉強するのもたのしいし大切だなぁ
- 今の世の中に欠かすことの出来ないものだからそれを発見したライプニッツに尊敬の意を表したい
- 答えがない問題として物を考えるのもおもしろい
- 誰かの頭の中の軌跡を追っていくのはまた違う面白さがあった

これらの結果は、1 時間目の原典を解釈することによりライプニッツという歴史上の人物を追い微分を理解するという活動を通したものだと考えられる。これらのことから生徒は数学が人の作り出したもの、人間の営みの中で生まれたものだという感想を持ち、数学を作り出した人々に対して多大なる敬意を払っていることが読み取れる。またそれによって、微分を学習することに対する姿勢においてもより積極的なものになっており下位課題２は達成されたといってよいのではないだろうか。

下位課題３：作図ツールの利用が数学の理解を促進するのに効果があるのかを考察する。

授業後のアンケートからそのまま抜粋
- コンピューターを使うという斬新なアイデアがよくて、とても見やすかった
- グラフなどが動かせるのはわかりやすい
- コンピューターを使って微分の授業が出来て以外だった
- コンピューターをつかって関数の差分を求めるのは楽しい
- コンピューターでのグラフは見やすい
- コンピューターでの作図でイメージしやすい
- これからはパソコンなどを有効に活用しみてわかるような授業が増えればいいと思った
- コンピューターを使う授業には興味が引かれた
- 普段は計算ばかりであるがパソコンを使うとおもしろい
- コンピューターにはいろんな機能があることを知った
- カブリを使うことで口や黒板で教えるよりもだいぶわかりやすかった
- パソコンの作業が今なにをやっているのかが理解できなかった
- ソフト（カブリ）がすごい

これらの結果は授業の解説を Microsoft Power Point2000 を用いて行ったこと、そしてカブリを用いて差分のグラフを作図したことからなされたものだと考えられる。多くの生徒が授業にテクノロジーを用いることで、より視覚的直感的に数学を

理解できるという感想をあげている。また動的という特徴を挙げる生徒が多かったこと、またこのアンケートでは全生徒の 3 分の２以上の生徒が、テクノロジーの有用性について感想を述べておりこのことからも、テクノロジーを用いることの有用性と即効性はいえるのではないだろうか。しかし一方で「パソコンの作業が今なにをやっているのかが理解できなかった」「ソフト（カブリ）がすごい」といったコンピュータに対する技能が低かったために、テクノロジーのすごさだけが目に付いてしまう生徒や、授業についていけていない生徒がいて、本来の数学的内容が伝わらないといった事態があったことは事実である。確かにテクノロジーを用いた授業は有用ではあるが、それに伴い生徒たちにあるレベルの情報処理能力を要求しなければならないということを忘れてはならない。

５.おわりに

本研究は数学Ⅱ「微分法」を学習した生徒に対象として、これまで学習した微分法（現在数学）と原始的な微分法（古典数学）とを比較することで微分法の由来や本質を理解する目的で授業を行った。その結果、多くの生徒はこれまでの数学に対する態度をみなおし、微分に対するに認識を改めその理解を深めたということは考察からも明らかである。しかしその一方で今回授業を行った生徒が微分を履修中ということもあり全ての生徒に対してその比較が成功したかというわけではなかった。実際アンケートの中には「微分がわかっていないのでなんともいえない」といった感想も含まれており、数学史を用いた今回のような授業では導入をすることは難しいと考えられる。これからの課題としては、どのような場面において数学史を用いることが有用なのかもしくはどのような生徒に対して有効なのか、より多くの実践例を挙げ比較してゆくことが重要であると考える。

謝辞

研究授業の実施に際し、埼玉県立春日部高等学校の今西善徳先生、福住譲先生、片野秀樹先生をはじめとする数学科の先生方には、準備の段階より貴重な御意見と多大なる御尽力をいただきました。こころより御礼申し上げます。

註１　本研究は、筑波大学学内プロジェクト研究（助成研究Ｂ：研究代表者　礒田正美）「インターネット上の数学博物館の開発・評価研究」の一貫として行われた。

註２　授業の詳細、並びに資料は次に掲示している。

http://www.mathedu-jp.org

引用文献・参考文献

【1】文部省（1999）．*高等学校学習指導要領解説　数学編・理数編．* pp.31-34

【2】神長幾子（1985）．*高等学校における微積分指導に関する一考察－微積分額形成の歴史を踏まえて－．* 昭和 58 年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

【3】青木弘（2001）．*数学者の新方法の公示による生徒の数学観の変容に関する一考察～フェルマーの論文「極大および極小値研究のための方法」の解釈を通じて～．* 世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育―代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開―．中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（８）．筑波大学数学教育研究室．pp.195-213

【4】礒田正美（2001）．*異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒に関する一考察―隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて―．* 筑波数学教育研究．筑波大学数学教育研究室．第 20 号．pp.39-48

【5】Hans Niels Jahnke（2000）．The use of original source in the mathematics classroom．*History in Mathematics Education*．pp.291-326

【6】神長幾子（1985）．*高等学校における微積分の背景―17 世紀の微積分学形成史の考察―．* 筑波数学教育研究―問題解決に関する研究を中心に―．筑波大学数学教育研究室．第４号．pp.76-85

【7】日本数学会（1985）．*岩波数学辞典第 3 版．* 岩波書店．p364-366

【8】G.W.Leibniz(1684)．NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS,ITEMQUE TANGENTIBUS,QUAE NEC FRACTAS NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR,ET SINGULARE PRO ILLIS CALCULI GENUS．*Mathematische Schriften　Ⅴ*．OLMS．pp.220-236

【9】G.W.Leibniz．The first publication of his differential calculus．*A source book in mathematics,1200-1800*　ed D.J.Struik．Cambrige,Mass:Harvard Universitiy Press．pp.271-284

【10】G.W.Leibniz（1684）．分数式にも無理式にも煩わされない極大・極小ならびに接線を求める新しい方法、またそれらのための特別な計算法．*ライプニッツ著作集２数学論・数学．* 三浦伸夫・原享吉訳．工作舎．pp.296-307

【11】J.D.*ノヴァック*＆D.B.ゴーウィン（1984）．*子どもが学ぶ新しい学習法　概念地図法によるメタ学習．* 福岡敏行＆弓野憲一訳　東洋館出版社

上記以外の参考文献

【12】スチュワート・ホリングデール（1989）．*数学を築いた天才たち下．* 講談社．pp.53-86

【13】下村寅太郎（1983）．*ライプニッツ．* みすず書房．pp.128-145

【14】G.W.Leibniz．　ON THE CALCULUS．*SOURCE BOOK IN MATHEMATICS*

VOLIME　TWO. ed D.E.SMITHA. DOVER PUBLICATIONS,INC,NEW YORK. pp.619-626

【15】**下村寅太郎・山本信・中村幸四郎・原享吉監修**（1997）. ***ライプニッツ著作集 3 数学・自然学.*** **工作舎**