授業資料

ライプニッツの微積分

―　見えない微分　　見える差分　―

2年　　　組　　　番

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

授業者：関　淳

（筑波大学修士課程教育研究科教科教育専攻）

§１接線をひこうとした人々

曲線に接線をひくということは、紀元前より考えられてきた非常に古い問題のひとつです。ところが、さまざまな曲線に対する接線の求め方はさまざまな方法で示されてきたのにもかかわらず、『*どのような曲線に対しても接線を求めることができる方法*　』については、はっきりした方法が発見されないまま、長い年月が過ぎていきました。ところが時は１７世紀、この問題に対する答えは急速な展開を見せることとなったのです。ここではそこにかかわった いくつかの人々を紹介してゆきましょう。

ピエル・ド・フェルマ（**1601－1665**）

フェルマはある点Ｐに対して、それとはｅだけ離れた点Ｐ'との間に相似な三角形を導き出し、ｅを０にしてしまうことで、ＰとＰ'とを結んだ直線が、Ｐにおける接線に等しくなるという考えで、接線をひいていました。彼のこの方法で一般化された放物線をはじめとするさまざまな接線を求めています

ルネ・デカルト（**1596－1650**）

デカルトは、ある点に対してその法線（接線に垂直な線）がひければよいとかんがえていました。また円の法線が必ず中心を通ることを知っていた彼は、曲線に対して２つの交点を持つ円を考え、その交点を近づけてゆくことで曲線に接するような円をもとめればよいと考えていました。

しかし、フェルマの方法においても無理式や分数式には接線をひくことはできませんでした。しかし微積分学の創始者の一人とされるライプニッツは世界初の微積分に関する論文の中で次のように述べています。

> **私が微分学と呼んでいる、この計算方法を知ることによって他の全ての微分方程式を同様の方法で解くことができるのである。今まで発表された方法とは異なりわれわれは分数でも無理数でもその他の（計算上の）制限を取り除く必要なしに接線と同様に、極大、極小を見つけ出すことができるのである。**
>
> 《出典：数学を築いた天才たち　下》

さてライプニッツの考えた微分とはいったいどのようなものだったのでしょう。

§２　人物紹介

ゴットフリート・ヴィルヘルム・ライプニッツ
（Godefroi Guillaume Leibnitz1646－1716）
ライプニッツは１７世紀ドイツの数学者です。確かに彼は数学者としても有名ですがそれと同様に哲学者としてもよく知られています。そしてそれ以外にも法学、政治学、神学、歴史学、論理学、物理学にいたるまできわめて広い分野にわたって活躍した「万能の天才」でした。

数学者としての彼の功績は

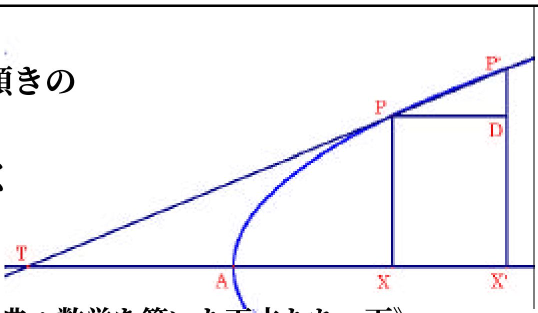
- 微積分学の創始者のひとり
- 2 進法の発明
- 関数、座標、微分方程式などの言葉の導入
- $\frac{dy}{dx}, \int dx$ といった記号の発明

などの多岐にわたっています。

§３　ライプニッツの微分ってどんなもの？

1676 年までには、すでに彼の頭の中には微積分学に関する基本的な概念と方法がありました。しかし彼がこのことを論文で発表したのは 8 年もあとの 1684 年なのです。なぜこんなに間があいてしまったのかというと、次のような理由があったからです。彼は微分というものを次のように考えていました。

連続する縦座標の差が「接線の部分的な傾きの近似値になる」
もし連続する縦座標の間隔が無限に小さくなったとしたらその近似値はより正確になるに違いない。



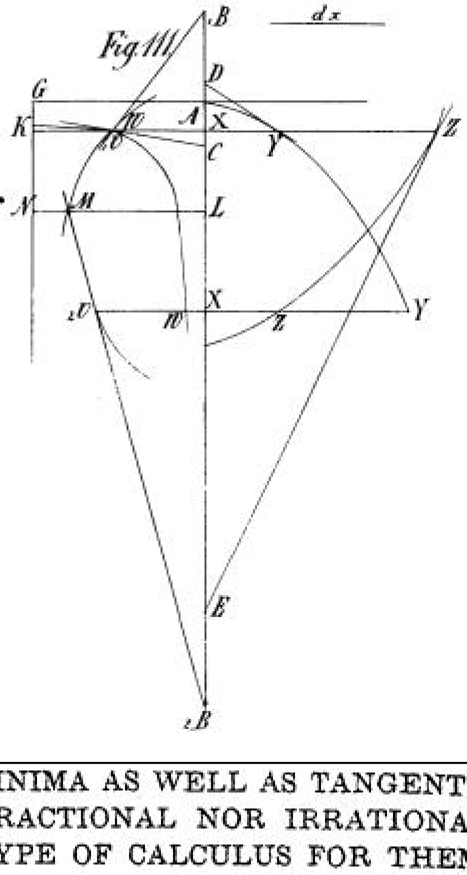
《出典：数学を築いた天才たち　下》

しかし彼はこの無限に小さくなるという概念に明らかに弱点があり、批判を受けやすいと考えていたのです。そこで彼はその矛先を弱めるため、次のように微分を定義し、発表したのです。

Act. Erud. Lips. an. 1684.

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, ITEMQUE TANGENTIBUS, QUAE NEC FRACTAS NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR, ET SINGULARE PRO ILLIS CALCULI GENUS *).

Sit (fig. 111) axis AX, et curvae plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatae ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quae vocentur respective v, w, y, x, et ipsa AX, abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE, axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, et recta, quae sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad XB (vel XC, vel XD, vel XE) vocetur dv (vel dw, vel dy, vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, vel y, vel z).



右図：fig 111

《**出典：**G.W.Leipniz
Mathematische Schriften》

英語訳

A NEW METHOD FOR MAXIMA AND MINIMA AS WELL AS TANGENTS, WHICH IS NEITHER IMPEDED BY FRACTIONAL NOR IRRATIONAL QUANTITIES, AND A REMARKABLE TYPE OF CALCULUS FOR THEM, BY G.W.L.

Let an axis AX and several curves such as VV, WW, YY, ZZ be given, of which the ordinates VX, WX, YX, ZX, perpendicular to the axis, are called v, w, y, z respectively. The segment AX, cut off from the axis [*abscissa ab axe*[1]] is called x. Let the tangents be VB, WC, YD, ZE, intersecting the axis respectively at B, C, D, E. Now some straight line selected arbitrarily is called dx, and the line which is to dx as v (or w, or y, or z) is to XB (or XC, or XD, or XE) is called dv (or dw, or dy, or dz),[2] or the difference[3] of these v (or w, or y, or z).

《**出典：**Struik SOURCE BOOK IN MATHEMATICS》

質問①：原典と英語訳とを見比べながら、次の解説を穴埋めしていきましょう

分数式にも無理式にも煩わされない極大・極小ならびに接線を求める
新しい方法、またそれらのための特別な計算法
（1684 年 10 月発表）

AX **を軸とし、いくつかの曲線** VV，WW，YY，ZZ **をとります。曲線から軸にたいしておろした**＿＿＿**を** VX，WX，YX，ZX **とし、それぞれ v，w，y，z と呼びます。次に**＿＿＿ VB，WC，YD，ZE **はそれぞれ軸と点** B，C，D，E **で交点を持つとします。このときある任意の線分** dx **をとり、y（または w，または z，または v）の** XD（または XC，または XE，または XB）**に対する割合が、**dy **の** dx **に対する割合と同じになるようにつまり**

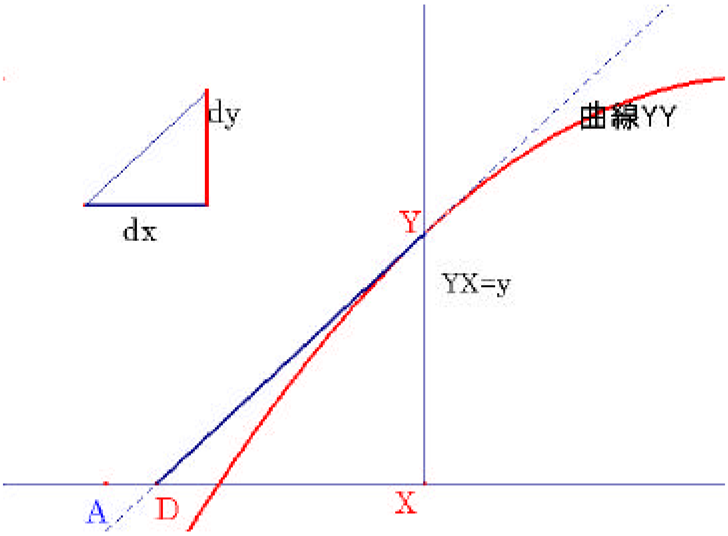
dy：　　＝y：

となるように、線分 dy（または dw，または dy，または dz）**をとり、これを y（またはこれらの** w，**または z，または v）の差分とよびましょう。**

質問②：ライプニッツは差分をどのようなものと考えていると思いますか
図で表してみましょう

質問③差分が微分とはやくされないのはなぜだと思いますか？自分なりに考えてみてください

曲線 YY に注目すればこのような感じです



§４　微分の性質と差分の性質を比べてみよう

質問②：あなたの知っている微分の性質をできるだけ多くあげてください

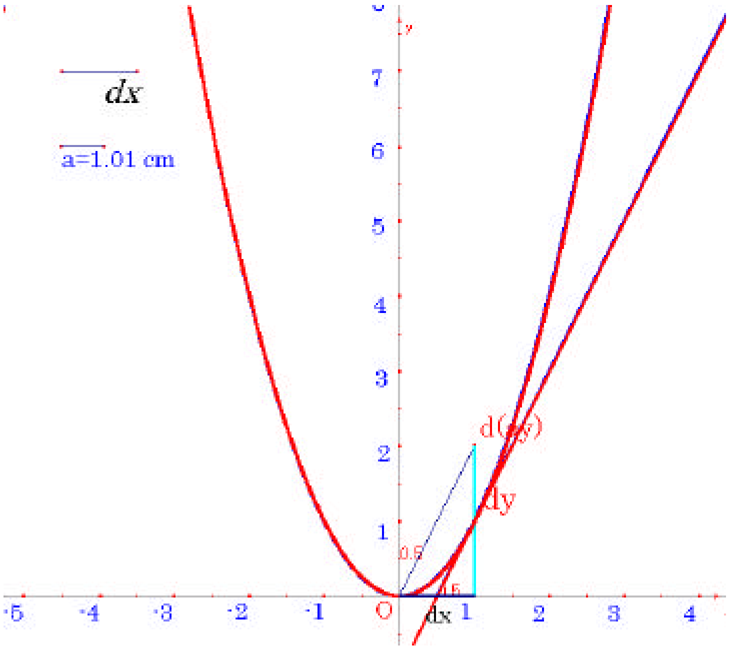
ライプニッツは差分において次のような計算法則が成り立つと述べています

	：a が定数のとき	$da = 0$、$d(ax) = adx$
	：$y = v$ のとき	$dy = dv$
和、差	：$v = z - y - w + x$ のとき	$dv = d(z - y - w + x) = dz - dy - dw + dx$
積	：$y = xv$ のとき	$dy = xdv + vdx$
商	：$z = \frac{v}{y}$ のとき	$dz = \frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$
	：$dx = 0$ のとき	x は極値
累乗	：	$dx^a = ax^{a-1}dx$

それではいくつかの性質について実際 Cabri Geometry II（以下カブリ）をつかって確かめてみましょう。

①$d\overline{ax} = adx$ の場合

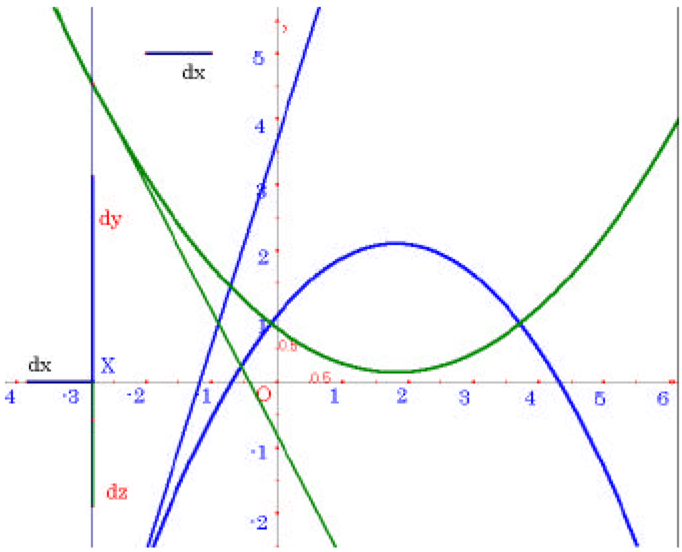
　定数倍.fig という file を開いてください



上の図は $ay = ax^2$ のグラフです。$a = 1$ のときの dy を固定して、a の値をいろいろ動かしてみましょう。$d(ay)$ と ady の間にはどんな関係があるでしょうか。

②$d\overline{x+y} = dx + dy$ の場合

　和.fig という file を開いてください



青線がｙのグラフ、緑線をｚのグラフとします。ことのときｙの差分とｚの差分を足したものとｙ＋ｚの差分を見比べましょう。（X をドラッグすることでいろいろ動かすことが出来ます。）

質問 3

なぜ、このようばことになったのか考えて書いてみてください。

ライプニッツは次のように述べています

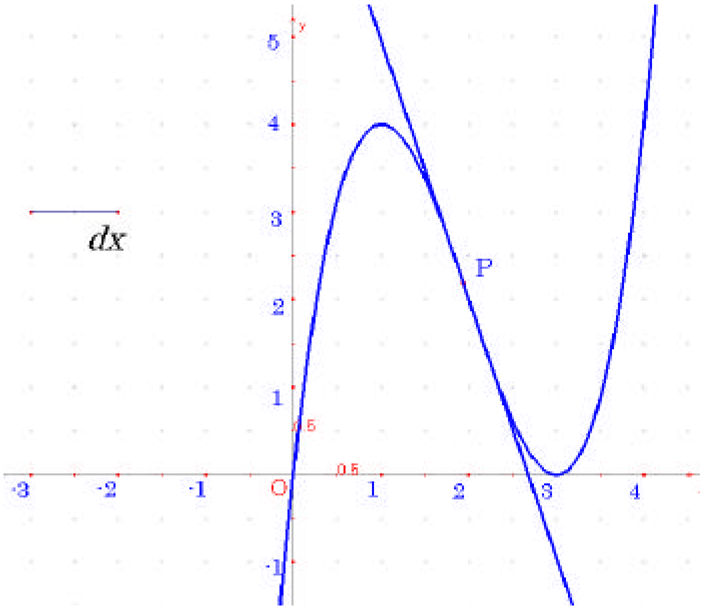
記号に関しては、計算において文字がただ単に差分に置き換えられているときはいつでも同じ記号が使われます。＋ｚに対しては、+dｚとかかれ、－ｚに対しては－dｚとかかれる。
このことは、加減法の性質から明らかである。しかしそれらの値を正確にするとき、つまりｘに対するｚの関係が考慮にされるときには、その dz が正であるのか、あるいは負の値になるのかを明らかになることに十分注意するべきである。

翻訳者：三浦信夫　原亨吉

《出典：ライプニッツ著作集 2 巻》

§５　実際に差分を用いて問題を解いてみよう

問題①：x^3-6x^2+9x**の導関数を求めてみよう**



（１）まずは、計算して導関数がの方程式を求めてみましょう

（２）三次関数.fig という、file を開いてください

（３）作図ツール Cabri を使って作図してみましょう。

$$dx^a = ax^{a-1}dx$$

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪

１．　点 P を通る x 軸との垂線を引きます

⑤から$\boxed{\text{垂線}}$を選び、点 P、x 軸の順クリックします。

２．　１の垂線と x 軸との交点を取ります

②から$\boxed{\text{交点}}$を選び､1 の垂線､x 軸の順にクリックします。

３．　２の点から dx だけの距離の点をとります

⑤から$\boxed{\text{コンパス}}$を選び、線分 dx、２の交点の順でクリック

します

②から$\boxed{交点}$を選び、上の円、ｘ軸の順にクリックします

（点が２つとれると思いますので、左の方を使ってください）

４．　３の点を通り、接線に平行な直線を引きます

⑤から$\boxed{平行線}$をえらび、接線、３の点の順でクリックします

５．　１の垂線と４の平行線の交点をとります

②から$\boxed{交点}$を選び、１の垂線、４の平行線の順にクリックします

この点をＰ’としましょう

６．　Ｐ’のＰに対するトレースをとります

⑩から$\boxed{トレース　オン/オフ}$を選び、点Ｐ’をクリックして点滅させる。①から$\boxed{ポインタ}$点Ｐをドラッグしながら、三次関数のグラフに沿って動かします。

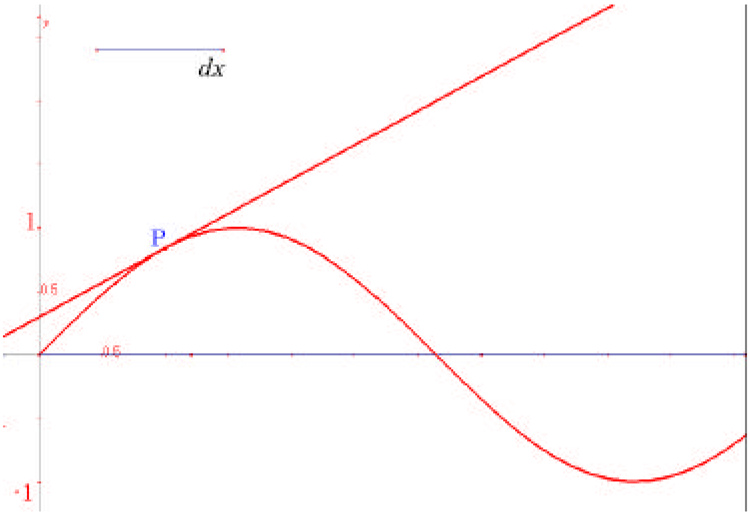
どのような形になるか大体予想できましたか？

７．　Ｐ’のＰに対する軌跡を取ります

⑤から$\boxed{軌跡}$を選び、点Ｐ’、点Ｐの順でクリックします。

（３）（１）の予想と比較してみましょう（形、ｘ軸との交点など）

問題②：sin *x* の導関数を求めてみましょう



（1）sin.fig という file を開いてください

（2）図ツール Cabri を使って作図してみましょう。

①　②　③　④　⑤　⑥　⑦　⑧　⑨　⑩　⑪

1．点 P を通る x 軸との垂線を引きます

⑤から垂線を選び、点 P、x 軸の順クリックします。

2．１の垂線と x 軸との交点を取ります

②から交点を選び、１の垂線、x 軸の順にクリックします。

3．２の点から dx だけの距離の点をとります

⑤からコンパスを選び、線分 dx、２の交点の順でクリックします

②から交点を選び、上の円、x 軸の順にクリックします

（点が２つとれると思いますので、左の方を使ってください）

4．３の点を通り、接線に平行な直線を引きます

⑤から平行線をえらび、接線、３の点の順でクリックします

5．１の垂線と４の平行線の交点をとります

②から交点を選び、１の垂線、４の平行線の順にクリックします。この点を P’としましょう

6．P’の P に対するトレースをとります

⑩から$\boxed{\text{トレース　オン/オフ}}$を選び、点Ｐ’をクリックして点滅させる。①から$\boxed{\text{ポインタ}}$点Ｐをドラッグしながら、三次関数のグラフに沿って動かします。

どのような形になるか大体予想できましたか？

４．　Ｐ’のＰに対する軌跡を取ります

⑤から$\boxed{\text{軌跡}}$を選び、点Ｐ’、点Ｐの順でクリックします。

（３）この軌跡が何を表しているのか、考えてみましょう。

問題③：$\cos x$、e^x、$\log_e x$ の導関数を求めてみよう（自主課題）

cos.fig　指数.fig 対数.fig を用意しました。どんな導関数が出てきますか。挑戦してみよう。