

原典を利用した高次方程式の授業に関する一考察 「Horner法」「数学九章」「整関数作図器」を通じて

筑波大学大学院修士過程教育研究科
森本 貴彦

要 約

1. はじめに
 2. 研究目的・研究方法
 3. 授業概要
 - (1) 環境
 - (2) 目標
 - (3) 内容
 4. 結果・考察
 5. おわりに
- 2003年から新設される「数学基礎」で数学史が利用されることをふまえ、本研究では数学基礎以外の科目で数学史を取り入れ原典解釈と追体験をすることで、数学基礎の目標で述べられている「数学と人間のかかわり」や「興味・関心を高める」にいかに関与し、科目内容の理解にどうつながるかについて考察を行った。高次方程式に関する原典解釈と追体験を行う授業を通して、生徒の数学への興味・関心が高まることが確認でき、さらに「数学九章での解法」や「整関数作図器による解法」と2つの違った解法を解釈し追体験することで、高次方程式の理解も促進することが確認できた。

1. はじめに

「分数の計算ができない大学生がいる」と報じられたが、筆者は、これは算数・数学を受験のための教科として捉え、算数・数学そのものに興味・関心を示していない生徒が多いからではないかと考える。この興味・関心という点については、高等学校で2003年から新設される「数学基礎」の目標でも「数学と人間のかかわりや、社会生活において数学が果たしている役割について理解させ、数学に対する興味・関心を高めるとともに、数学的な見方や考え方の良さを認識し数学を活用する態度を育てる。」と述べられている。この目標内の「数学と人間のかかわり」と「興味・関心を高める」の2点に関しては、原典解釈と追体験による数学史を利用した授業が目標達成のために有効であることが、高橋(2001)、伊藤(2001)、熊田(2001)、臼田(2001)によって既に示されている。

しかし、筆者は恩田(1999)が「数学史の扱いは、生徒の興味・関心を喚起するのに役立つのかもしれないが、「数学基礎」という1つの科目で扱うべきもので

はないと思われる。」と指摘するように、興味・関心を持続し、さらに高めていくには、数学史を他の科目でも扱う必要性を感じており、また数学基礎以外の科目で数学史利用の際にも、恩田(1999)、磯田・土田(2001)や磯田(2001)の立場から、原典を用いた数学史指導が有効であり、原典利用に関しては、生徒が解釈することが重要であると考えます。

以上をふまえて、通常他の数学科目で取り上げられている内容を題材とした原典を利用した授業の結果、生徒は数学史とその科目内容を比較しながら今の数学を意識し、数学への興味・関心がどのように変化しているか、また科目内容についての理解がいかにならわっているかについて考察する。

2. 研究目的・研究方法

研究目的... 数学 B(2003 年からは数学)で扱われる高次方程式に関する原典を用い、生徒が原典を解釈し、人の営みとしての数学を意識することで、生徒は昔と今の高次方程式の解法を比較しながら今の数学を意識し、数学への興味・関心はどのように変化するか、さらに高次方程式への理解はいかにならわっているかについて考察する。

研究方法... 上記の目的を達成するために、以下の課題を設定し、事前・事後アンケート、授業テキストと授業を記録したビデオに基づき考察を行う。

課題 1 ... 生徒が親近感を示すであろう中国・東洋の高次方程式に関する原典を解釈し、独自の方法を追体験することにより、Horner 法との比較を通して今の数学を再認識することができるか。

課題 2 ... 高次方程式を解くための作図器を解釈し、Cabri Geoetry を用いた追体験をすることにより、今とは大きく違った解法を体験することで、今の数学と比較し再認識することができるか。

課題 3 ... 課題 1、課題 2 を通して自分たちが学んでいる数学を意識し、数学への興味・関心はどのように変化するか。

課題 4 ... 課題 1、課題 2 を通して高次方程式に対する考え方を見直し、高次方程式に対する理解を促進することができるか。

3. 授業概要

(1) 環境

対象

茨城県私立高校 2 年生 18 名

期間

平成 13 年 12 月 17 日 6 時間目

18 日 5 時間目

19 日 1 時間目

の計 3 時間

(事前(平成 13 年 12 月 15 日 2 時間目)に

Cabri Geometry の指導会実施)

準備

コンピュータ(Windows)、Microsoft Power Point、

Cabri Geometry、ビデオプロジェクタ、

事前アンケート、事後アンケート、授業テキスト、参考プリント

(2) 目標

中国・東洋の高次方程式に関する原典として「数学九章」、高次方程式を解くための作図器に関する原典として「ディドロの『百科全書』」を題材とし、解釈と追体験を通して、今の数学を意識し、高次方程式に対する理解を促進する。

(3) 内容

Cabri Geometry 指導会

普段 Cabri Geometry を利用していないので、Cabri Geometry を使った授業を円滑に進めるために、1 時間を用いて、取り消し、点の作図、直線の作図、線分の作図、垂線の作図、平行線の作図、点の移動、直線の移動、トレースをとるなどの方法について指導を行った。

1 時間目(Horner 法と数学九章の解釈と追体験)

- ・ $x^4 - 15x^3 + 2x^2 - 25x - 75 = 0$ を Horner 法で解くことを事前課題としていたが、授業者が生徒の状況から判断し、Horner 法が組み立て除法そのものであることを生徒につかませることを意図した発問を行いながら、PowerPoint を用いて Horner 法の理解を進めた。
(ここでは、生徒の方から組み立て除法という言葉を引き出せなかったが、これまでの学習の中で同様の方法を行ったことがあると認識させることはできた。)

- ・ $x^4 - 15x^3 + 2x^2 - 25x - 75 = 0$ の解が 15 となる過程を再検討し、Horner 法について気付いた点を生徒に発言させた。その中で、 $x - 10$ で割ったそれぞれの商(図 1 の下線部)の最高次係数に注目する発言から、Horner 法の特徴が次数を下げて高次方程式を解く方法であることをおさえた。さらに、時代認識をきっちりするため、Horner 法を考え出した時代が 17 世紀であることをつかませた。

方程式 $x^4 - 15x^3 + 2x^2 - 25x - 75 = 0$ は、10 と 20 の間に解があるとわかる。

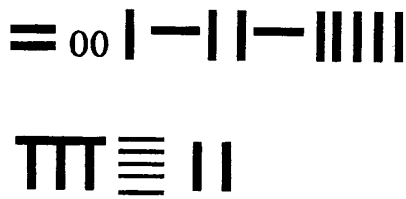
$x^4 - 15x^3 + 2x^2 - 25x - 75$ を $x - 10$ で割ると、 $(x - 10)(\underline{x^3 - 5x^2 - 48x - 505}) - 5125 = 0$

$x^3 - 5x^2 - 48x - 505$ を $x - 10$ で割ると $(x - 10)\{(x - 10)(\underline{x^2 + 5x + 2}) - 485\} - 5125 = 0$

【図 1】Horner 法解説(Horner 法の最初のみ示す。以下同様の手順で進める)

- ・ 数学九章が書かれた当時の中国の算木を用いた記数法(図 2 参照)を事前課題としていたので、PowerPoint 上に同様の数を示して、その数がいくつであるかを答えさせながら、当時の数の表し方を生徒に体験させた。

【対話 1】



【図 2】算木を用いた記数法

教師：「どんな数字を表していますか？」

生徒：「...？」

教師：「左から 2,0,0,1,1,2,1,5 ですね。」

教師：「では、この数字はいくらを表していますか？」

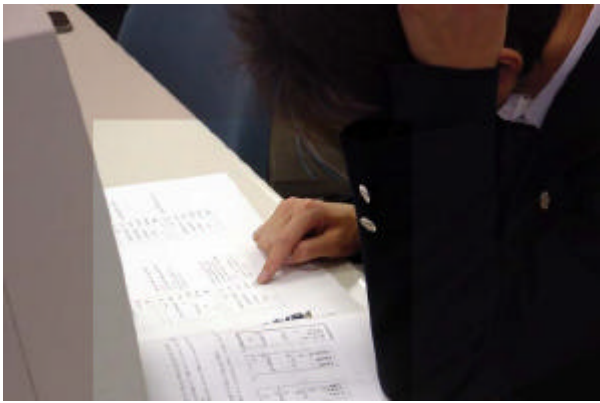
生徒：「852。」

教師：「そうですね、順に 8,5,2、852 を表していますね。」



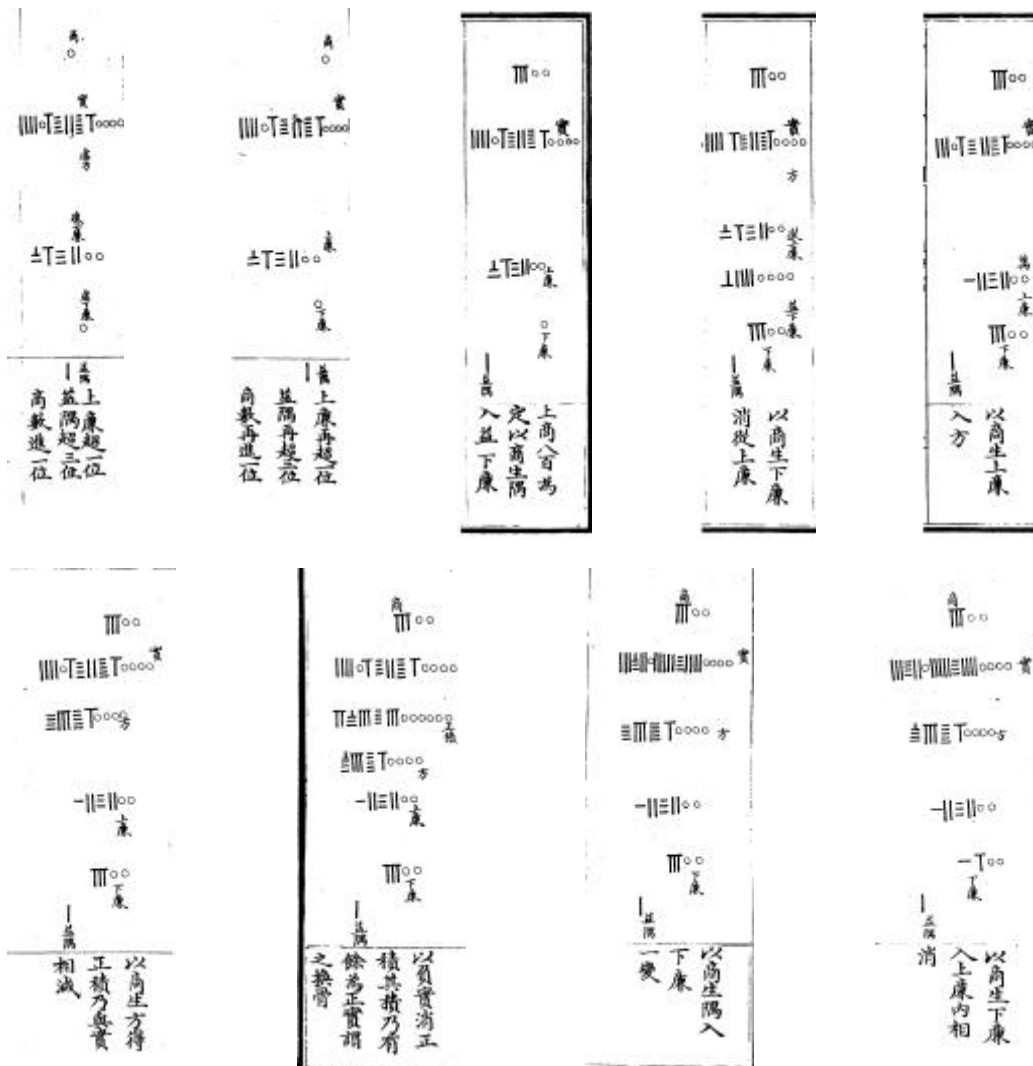
【図 3】

- ・ 原典として扱う数学九章について、13 世紀に秦九韶によって書かれたものであることなどを生徒に紹介した。
- ・ 数学九章の中で記されている高次方程式(図 3 参照)を、原典に記されている規則(方程式の定数項(“実”と呼んだ)を第 2 層におき、得数(方程式を解いて得ることのできる数)である“商”を最上層におく。以下、上から下へ順次 x の 1 次項、2 次項...(それぞれを“廉”と呼んだ)とならべ、最下層に最高次項の係数(“隅”と呼んだ)をおくことや商は必ず正とし、定数項すなわち実の符号は必ず負としており、それ以外の係数については、正負を問わず、図の中で従は正を表し、益は負を表すこと)についての記述をもとに $-x^4 + 763200x^2 - 40642560000 = 0$ と表記させた。



・この方程式が、土地の面積を求める過程で作られたものであることを紹介し、数学九章での高次方程式の解法を最初は原典(図4参照)そのものを用いて解釈させた。その後生徒の進み具合から判断し、日本語に訳したものをを用いて解釈を進めた。(写真1参照)

【写真1】数学九章での方法を解釈



【図4】数学九章での高次方程式の解法

(解法の最初のみ示す。以下同様の手順で21まで進める)

・数学九章での高次方程式の解法を図5のような4次方程式($x^4 - 15x^3 + 2x^2 - 25x - 75 = 0$)を例として追体験させた。(写真2参照)



【写真 2】数学九章での方法を追体験

					商
			-7	5	実
			-2	5	方
				2	上廉
			-1	5	下廉
				1	開

【図 5】

- ・ 追体験後に、Horner 法と数学九章での解法を比較し、同様の方法が行われていることを結論として 1 時間目をまとめた。

【対話 2】

教師：「この方法を通じて、何か感じることはありますか？」

生徒：「商を 10 にしている」

教師：「そうだね。最初は 10 にしているね。この方法、どこかで見た？」

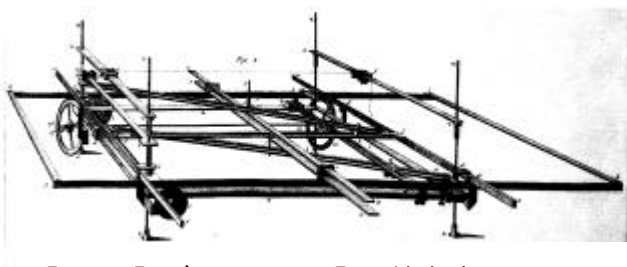
生徒：「Horner」

教師：「そう！ Horner の方法だね。」

2 時間目(高次方程式を解ける作図器を解釈し、Cabri Geometry を用いて追体験する)

(2 時間目は原典に忠実に 2 次方程式の解法について行った)

- ・ デイドロの『百科全書』について、18 世紀のフランスを代表する百科事典であるという紹介を行い、写真でデイドロの『百科全書』を提示した。
- ・ デイドロの『百科全書』で示されている作図器(図 4 参照)について、原典と英語訳(図 7 参照)を用いて紹介を行った。



【図 6】デイドロの『百科全書』で示されている作図器

XXIV. Directions for making a Machine for finding the Roots of Equations universally, with the Manner of using it: By the Rev. Mr. Rowning, to John Bevis, M. D. F. R. S.

【図 7】作図器の紹介(英語訳)



【写真3】作図器を解釈する

【対話3】

生徒：「なぜ道具を使うんですか？」

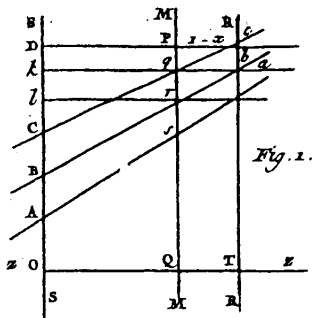
教師：「う～ん、それはいい質問だね。」

- ・ 作図器の構造と使い方について、原典と英語訳を用いて解釈させ、授業者が生徒の状況から判断し、日本語訳を配布し、解釈をさらに進めた。(写真3参照)

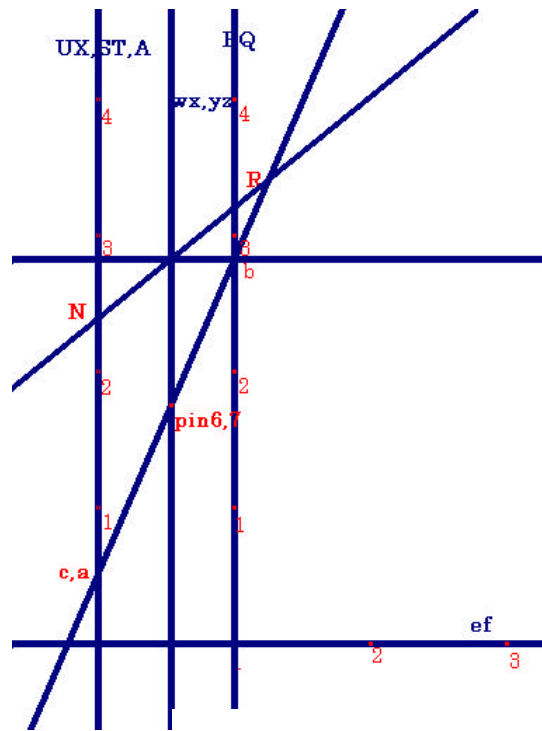


【写真4】作図器の使い方を追体験する

- ・ 原典に示された作図器の構造図(図8参照)をもとに作成した Cabri Geometry のファイル(図9参照)を用いて、 $x^2+2x+1=0$ を例として作図器の使い方を追体験させた。



【図8】原典に示された作図器の構造図

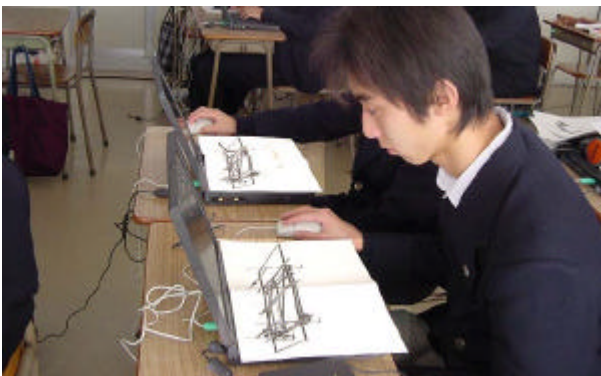


【図9】

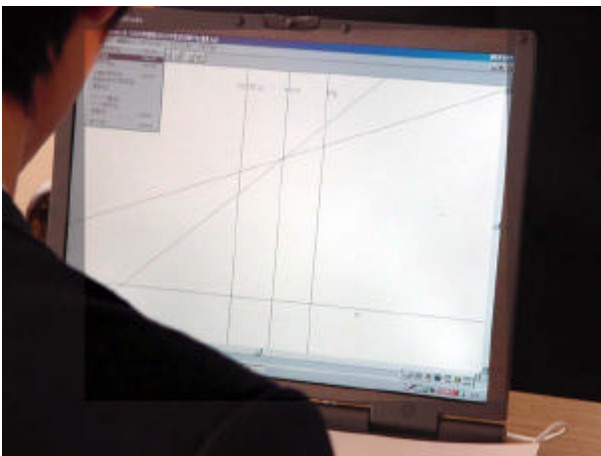
- ・ 作図器を使って方程式の根が求められるということを再度確認して、原典の記述をもとに高次方程式の根を作図器を用いて解くということに注目させた。
(次の時間では3次についてチャレンジすることを伝え、そのための準備として、さらなる道具の解釈を宿題とした。)

3 時間目(3 次方程式を解ける作図器を自ら作り、作図器の理解を進め、3 時間全体のまとめをする)

- ・ 前時の復習と作図器についての解釈を進めることを意図して、Cabri Geometry で作図器を表現したもの(図 9 参照)を用いて、 $-2x^2+3x+2=0$ を解かせた。
- ・ これまでの 2 次方程式を解くことができる作図器に対する解釈と追体験を基に、作図器に用いられている考え方をつかませるため、3 次方程式を解くことのできる作図器を Cabri Geometry を用いて作成させた。(写真 5, 6 参照)



【写真 5】原典から 3 次の作図器を考える



【写真 6】3 次の作図器を作成している

【対話 4】

生徒：「これは 100 次もできるんですか？」

教師：「できるよ。」

生徒：「全部作らないといけないんですか？」

教師：「そうだね。」

生徒：「応用はすぐできそう！」

教師：「素晴らしいじゃないですか。」

- ・ 授業者が生徒の状況から判断し、途中まで授業者主導で作図器を作成させた。
- ・ 生徒の理解が進み、生徒が自ら作成していることが確認できたので、生徒に発表させながら作成を完了させた。
- ・ 作成した作図器を用いて、3 次方程式が解けることを確認させた。

- ・ 作図器の構造をまとめ、2 次の曲線が 1 次で描けることに注目させる。
- ・ 3 時間トータルして、次数を下げて考えるという観点で、Horner 法・数学九章・整関数作図器をつなげ、まとめとした。

4 . 結果・考察

事前・事後アンケートと生徒の各時間終了後の感想の抜粋を結果として示す。

1 時間目終了後の感想

そんな昔から方程式が解かれているとは思わなかった。昔の式を理解しようとしても難しいことがわかった。

難しかった。でもあれがあって数学が進歩したかもって思った。

おもしろかった。もっといろんなやりかたをためしたい。

Horner の方法のやり方を実は今日までよく理解していなかったけど、今日でやり方はわかった。

中国の数学の意外性を感じた。

数学九章はやり方が難しかった。今まで全く見たこともなかった中国の数字とかができてよかった。昔の中国人はすごいと思った。

2 時間目終了後の感想

最初あんな機械で計算なんてできんのかよ - と思ったけれど、できるとわかったので、すごかった。

機械で方程式を解けるとは思わなかった。今までの解き方と違ってグラフを描いて求めるので、よりよいものだと思った。

使っていて難しい道具だったけれど、グラフ(放物線など)が描けて、答えがでたときは感動した。フランス人は偉大だ。

本当に道具を使って計算ができるとわかって昔の人はすごいと思った。2次関数が直線だけで描けるとは、知らなかった。

事前・事後アンケートの

(1) 数学は好きですか？

a 好き b どちらかといえば好き c ぶつう d どちらかといえば嫌い e 嫌い

(2) それを選んだ理由

という問いへの回答の変化(以下、事前 事後の形で表す)

(1) に対し「c」	—————>	(1) に対し「b」
(2) に対し「得意じゃないから」		(2) に対し「意外と楽しいから」
(1) に対し「c」		(1) に対し「b」
(2) に対し「解ければいいけど、 わからないのが多いから」	—————>	(2) に対し「解いているのは嫌いではないから」

事後アンケートの「あなたは中国の数学について、どのようなイメージを持っていますか？」という問いへの回答

数学九章、13世紀からすごい。(算木による記数法をさして)独自のスタイルを持っていた。

すごいけれど、わかりにくい。

事後アンケートの「この授業を通して変わったことなどがあれば、自由に書いて下さい。」という問いへの回答

昔の人の方が数学についてよく知っている。

高次方程式はいろいろな解き方がありました。いろんなこと学びました。

新しい発見ができておもしろかった。

Hornerの方法はいろいろなことに役立っているのだと分かった。

方程式について、ずいぶん昔からいろいろな人が工夫してとき方を考えていたのだなと思った。

カブリの使い方が分かるようになった。

以下、この結果と授業中の対話を基に、課題1～課題4について考察を行う。

課題1...生徒が親近感を示すであろう中国・東洋の高次方程式に関する原典を解釈し、独自の方法を追体験することにより、Horner法との比較を通して今の数学を再認識することができるか。

まず、3.授業概要(3)内容での【対話1】(以後、【対話】と表す)では、当時の中国の数文化を解釈し追体験するとともに、【対話2】では、生徒は当時の中国の高次方程式の解法を解釈し追体験し、今の数学に近いHorner法との比較を行った結果、やっていることは同じだと感じている。つまり、今やっている数学を再認識できていると考えられる。

さらに、事後アンケートの や1時間目終了後の の感想から、生徒が当時の中国の独自のスタイルを解釈し、その結果として“すごい”や“難しい”という感想を示していると考えられる。以上の結果と、事後アンケートでの や1時間目終了後の や の感想から、当時の数学と今の数学を比較していたのではないかと考えられる。その結果として のような感想を持つ生徒がいたのではないかと考えられる。

課題 2 ... 高次方程式を解くための作図器を解釈し、Cabri Geoetry を用いた追体験をすることにより、今とは大きく違った解法を体験することで、今の数学と比較し再認識することができるか。

まず、【対話 3】から、フランスの当時の数学を理解しようとしていると考えられ、【対話 4】では、フランスの当時の解法を作図器の解釈をもとに追体験する中で、作図器、つまり当時の解法を理解し、自分の知っている数学を意識し、結びつけることで、さらなる発展を今の数学で考えようとしていると考えられる。

また、2 時間目終了後の の感想は、今の数学を基にして“できんのかよ - ”とっていたが、生徒が作図器を解釈し、作図器を用いた解法を追体験することを通して“できる”とわかり、今の数学を問い直していると考えられる。さらに、2 時間目終了後の の感想は、作図器によって描かれる曲線を自分の知っている数学と照らし合わせ“グラフ”と判断し、自分が知っている解法と比較して“よりよいもの”としていると考えられる。

課題 3 ... 課題 1、課題 2 を通して自分たちが学んでいる数学を意識し、数学への興味・関心はどのように変化するか。

1 時間目終了後の や の感想、2 時間目終了後の や の感想、事後アンケートの の感想のように、解釈や追体験を通して昔の人の“すごさ”を感じることで感動している面が見られる。さらに、 や の事前・事後アンケートの変化、特に理由の変化に着目すると、“楽しい”や“嫌いではない”という言葉を使っていることから、数学に興味・関心を示したと考えられる。

課題 4 ... 課題 1、課題 2 を通して高次方程式に対する考え方を見直し、高次方程式に対する理解を促進することができるか。

1 時間目終了後の や の感想、2 時間目終了後の の感想、事後アンケートの や や の感想から、生徒が今知っている高次方程式の解法とつながる Horner 法や数学九章での高次方程式の解法と生徒が今知っている高次方程式の解法と大きく異なった作図器を用いた高次方程式の解法を解釈し、追体験することで、高次方程式への理解も進んだと考えられる。ここで、事後アンケートの や の感想から、2 つの異なったアプローチを行っていることで、多様な考え方を持ち、理解の促進を助けていると考えられることができる。

5. おわりに

この研究では、「数学基礎」の中で数学史を利用した授業を行うことで、生徒の数学への興味・関心が高まった際に、数学基礎以外の科目にも生徒が一次文献である原典を解釈し、当時の考え方を追体験する方法で、数学史を利用していくことで、興味・関心のどのように変化するか、さらに科目内容の理解はどのように変化するかを考察した。

今回の授業を通じて、生徒自身は昔と今の数学とを比較しつつ、数学への興味・関心を高め、生徒が今知っている解法とつながる解法と生徒が今知っている解法と大きく異なった解法という2つの異なったアプローチを解釈し追体験することで、科目内容への理解も進んだと考えられる。たとえ考えられる。

しかし、今回の授業では、2時間目の Cabri Geometry の使い方に問題があったと考えている。作図器解釈の際に作図器の動きのイメージがつかめない生徒が多く、追体験に Cabri Geometry を使ったことで、事後アンケートの感想に見られるように、Cabri Geometry のすごさが目立ってしまい、作図器そのものの追体験ができたかどうか疑問が残る。作図ツールを用いることで生徒の理解は増すであろうが、この授業の中で原典解釈や追体験といかに共存させていくかが今後の課題と考える。

謝辞

研究授業を行うにあたって、私立茗溪学園の尾島義之先生、黒澤紀久先生をはじめ、数学科の先生方に貴重なご意見、ご協力をいただきました。厚く御礼申し上げます。

註1

本研究は、筑波大学学内プロジェクト研究（助成研究B：研究代表者 磯田正美）「インターネット上の数学博物館の開発・評価研究」の一貫として行われた。

註2

授業の詳細、並びに資料は次に掲示している。

<http://www.mathedu-jp.org>

参考文献

- ・ 文部省(1999) . 高等学校指導要領

- ・ 高橋秀樹(2001) . 高校数学における数学史の導入に関する一考察：アポロニウスの問題の解法を通して，世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育：代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開，p143-p160
- ・ 伊藤賢二郎(2001) . 数学観を変容させる数学史の効果：中世代数史を用い、数学を文化として捉えることをねらって，世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育：代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開，p174-p184
- ・ 熊田真一(2001) . 文化としての数学学習に関する一考察：方程式の解の公式の歴史解釈を通して，世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育：代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開，p185-p194
- ・ 臼田要介(2001) . 生徒の数学観を変容させるための数学史の活用について：「カバリエリの定理」の教材を通して，世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育：代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開，p222-p235
- ・ 恩田洋一(1999) . 1 次文献を利用した数学史教育に関する一考察：「数学基礎」に関連して，修士論文，筑波大学，つくば市，茨城県 .
- ・ 磯田正美・土田知之(2001) . 異文化体験を通じての数学の文化的視野の覚醒，第 25 回日本科学教育学会年会論文集，p497-p498
- ・ 磯田正美(2001) . 数学的活動論、その解釈学的展開，第 34 回日本数学教育学会論文発表会論文集，p223-p228
- ・ ジョ - ジ・G・ジョ - ゼフ(1996) . 非ヨ - ロッパ起源の数学，講談社，p199-p206，p271-p275
- ・ 王 雲五編 四庫全書珍本別輯 数学九章 二
- ・ 銭 宝琮編(1990，川原秀城訳) . 中国数学史，みすず書房，p168-p172
- ・ ENCYCLOPEDIE : SUITE DU RECUEIL DE PLANCHES , SUR LES SCIENCES , LES ARTS LIBERAUX , ET LES ARTS MECHANIQUES , AVEC LEUR EXPLICATION . TOME X
- ・ ENCYCLOPEDIE : NOUVEAU DICTIONNAIRE , POUR SERVIR DE SUPPLEMENTAUX DICTIONNAIRES DES SCIENCES , DES ARTS ET DES METIERS , PAR UNE SOCIETE DE GENS DE LETTERS . TOME SECOND
- ・ ENCYCLOPEDIE OU DICTIONNAIRE RAISONNE DES SCIENCES DES ARTS ET DES METIERS : Nouvelle impression en facsimile de la premiere edituion de 1751-1780 . Volume 33 . 14E33Nr.33
- ・ ENCYCLOPEDIE OU DICTIONNAIRE RAISONNE DES SCIENCES DES ARTS ET DES METIERS : Nouvelle impression en facsimile de la premiere edituion de 1751-1780 . Volume 19 . p832-p835

- PHILOSOPHICAL TTRANSACTIONS , GIVING SOME ACCOUT OF THE Present Undertakings , Studies , and Labours , OF THE INGENIOUS , IN MANY Considerable Parts of the WORLD . P240-p253
- John Fauvel · Jan van Maanen 編 . History in Mathematics Education . p213-p232
- Wei-Chi Yang·Yahya Abu Hasan 編 .Computer Technology in Mathematical Research and Teaching . P140-p141
- 黒田稔(1927) . 数学教授の新思潮 . 培風館 . P299-p300