デカルトの「幾何学」による生徒の数学観の変容
～数学史原典から数学の発展を学ぶ～

筑波大学大学院修士課程教育研究科
阿部　千里

要約

本研究は、平成 15 年度から実施される新科目「数学基礎」に先立って、数学史を取り扱った授業を行い、数学を人間の営みとしてそして発展的な視点で捉えられるような数学観の変容への効果を見るものである。教材としてはデカルトの「幾何学」を用い、数学の発展に着目しながら授業を進めた。その結果、生徒の数学に対する見方考え方、また、興味・関心等に変容が見られた。この変容により、数学科に数学史を 取り入れることの有用性を見出すことができた。

1．　はじめに

平成 15 年度から実施される新学習指導要領[1)]では、科目「数学基礎」が新設される。そしてここで導入される数学史について、「数学史的な話題を取り上げ、数学の諸概念の発展と人間とのかかわりについて理解させる」ということが書かれている。このことが取り上げられた背景としては、IEA（国際教育到達度評価学会）の第 2 回国際数学教育調査最終報告(1991)[2)]のアンケート結果から、数学の発展や発見などについて、日本は他の国々に比べてあまりよい結果が得られていないことなどが挙げられるだろう。そして、それに対応する手立てとして数学史を取り上げていることは、数学教育における数学史の取り扱いの有用性を示唆しているものであると考えられる。数学が人間の活動によって発展や発見されてきたという視点で、数学史を教材として授業に取り入れることの有用性は、多くの先行研究により提言されている。その中で、数学の形成過程を追体験するという活動に対して、礒田(1987)[3)]は、「数学史に対する真の理解をもたらすとともに、創造的な活動としての数学に対する理解・

数学的な思考方法の理解を深めるものとして意義がある」と述べ、実践例を挙げている。そして、数学史を取り扱うにあたって、それぞれの数学をその数学が使われた時代の文脈において解釈し、そのよささを相対的に吟味することを通じて、その時代を生きた人々の文化的営みを認める活動、そしてそのような解釈、吟味を通じて、現在我々の学ぶ数学が一つの文化であることを認める活動は、数学を人間の文化的営みとして体験する活動の典型である(礒田，2001)[4]。本研究は、その解釈、吟味の対象にできる数学史原典を解釈し、その中で数学の発展の過程を追体験するということが、数学を人間の営みや創造的な活動としてそして発展的に捉えることにおいて、生徒にとって大変意義のあるものであると考え授業実践を行い、生徒の数学観の変容をみるものである。

2．研究の目的・方法

(1)研究目的

「数学史原典を用いた授業を通して、生徒の数学観の変容をみる」

本研究での数学観の変容とは、生徒自らの数学を発展的に捉えること、数学を人間の営みとして捉えることを目指すものである。

目的達成のために、以下の課題を設定する。

課題 1:当時の手紙や記述を用いて数学史原典を解釈をすることにより、数学が人間の営みであることを捉えられるかどうか。

課題 2：数学の発展を追体験することで、生徒が自らの数学を発展的に捉えられるかどうか。

(2)研究方法

数学史原典を扱ったテキストを開発し、それに沿って授業を行う。そして、事前事後アンケートや授業の感想、また授業の様子を撮影したビデオにより、生徒の変容を調べる。

3．授業概要

(1)授業環境

対象：公立高校 2 年生　2 クラス　84 名

実施時期・時間数：平成 13 年 11 月 6,7,8 日　　65 分×2 時間

準備：コンピュータ　Cabri GeometryⅡ　Microsoft Power

Point ビデオプロジェクター 事前アンケート　事後アンケート　ワークシート　授業資料

○事前・事後アンケートについて

授業実施 1 週間前に、生徒の数学に対する固定的・発展的な意識を調査するために簡単なアンケートを行った。そして、授業後同じ内容のアンケートと授業に対する感想を書いてもらった。

(2)教材開発

本研究では、主にデカルトの「幾何学」「精神指導の法則」を教材に授業を行った。デカルトの「幾何学」を教材として扱う先行研究は、例えば後藤(1996)[5)]など、代数と幾何の統合を図ることを目的になされているものが多い。しかし、本研究の実践では、他者の世界において考えてみることを根幹に置いている解釈学的営み(礒田，土田 2001)[7)]に基づき、一次文献を用いて、実際のデカルトの手紙や記述から当時の数学や考え方を解釈していく。そして、デカルトによる数学の発展的な創造を追体験することを通して、生徒自身の数学が発展的に捉えられることと、数学が人間の営みであることの理解を目的に授業を進めた。また、原典を用いる際に、Jahnke(2000)[6)]は「原典はそれが書かれた時代と考えの文脈について、詳しく深く理解する必要がある」と述べている。そこで、デカルトの考え方をより発展的に捉えられるようにするために、デカルト以前の数学を方程式やその表現に注目してアラビア・ヨーロッパ(アル・フワーリズミー、ウマル・ハイヤーム、カルダノ)の方程式の分類、また表現方法の比較のためにヴィエタの「OPERA MATHEMATICA」の一部を資料に取り上げた。

(3)授業展開

指導目標(1 時間目)

・デカルト以前のアラビア・ヨーロッパの方程式表現を把握する。

・デカルトの考え方を解釈して、次元の制約が解除されたことを理解する。

【デカルト以前の数学とデカルトの線分による演算】(1 時間)

「ぼくは、連続量であれ非連続量であれ、任意の種類の量について提出されうるすべての問題を一般的に解くことを可能にするような、或るまったく新しい学問を作り出したいと思う。それも、各問題をその本性に応じて解くのだ。算術において、或る問題は有理数によって解かれ、或るものはただ根数(第 3 巻注 14 を参照)によって解かれ、また或るものは想像はされるが解かれないのと同様に、連続量においても、或る問題は直線か円周のみによって解かれ、或るものは、ただひとつの運動によって生じ新しいコンパスによって描かれうる他の曲線を用いなければ解かれず、－このコンパスも円を描く普通のコンパスに劣らず正確で幾何学的であるとぼくは考えるのだ－また或るものは、有名な円積線のように、互いに関連のない別々の運動によって生じ単に想像的であるにすぎない曲線を用いなければ解かれないということを、ぼくは証明したいと思う。そして、少なくともこれらの線によって解かれないようなものは想像し得ないとぼくは考える。しかしぼくは、どの問題はかくかくの仕方で解かれ、他の仕方では解かれない、ということを証明するようになりたいのだ。こうすれば、幾何学中にもはや発見すべきものはほとんど残らないはずだ。これは際限のない仕事であり、ひとりの人間にできることではない。途方もなく野心的なことだ。しかしぼくは、何か或る光がこの学問の暗い渾沌を貫いて輝くのを観たのだ。この助けによって、最も暗い闇をも散らすことができるとぼくは考えるのだ」(AT，X，p. 156－158)。

1619 年 3 月 26 日　デカルトがオランダの物理学者ベークマンにあてた手紙

①導入

「幾何学」を積極的に解釈させるために、上のようなデカルトの思いが書かれている、ベークマンあての手紙を読んだ。

授業者は、二重下線「或るまったく新しい学問」について強調し、デカルトの行ったことに興味をもたせた。そして、当時の数学をよりよく理解するために、下線部「任意の種類の量」「すべての問題」を問題視させた上で、デカルト以前に行われていた数学に目を向けさせた。

②デカルト以前の数学

テキストに資料として載せた、アラビアのアル・フワーリズミー、ウマル・ハイヤーム、ヨーロッパのカルダノ、ヴィエタの方程式の分類や式表現を通して、以下のことを理解させた。

- 方程式の分類が多くなされていたこと。
- 方程式が現代のような記号ではなく言葉で表され、また 2 乗 3 乗に対しては面積・体積というような次元にとらわれていたこと。

デカルト以前の数学は、生徒たちにとって普段とかけ離れたものであり、大変印象的であったことが伺えた。

◎生徒の感想より

・式のない数学があったなんて初めて知ったし、とても驚いた！

・ 文字が多くわかりづらいところがあった。でも、考えた人たちはすごいと思った。

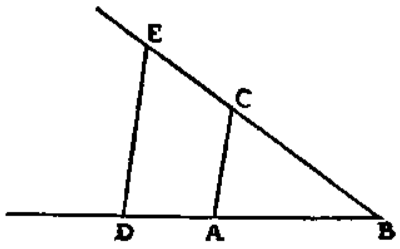
③「幾何学」第１巻　線分による加減乗除、平方根の抽出

加法減法についてはパワーポイントで説明した。

〈乗法について〉

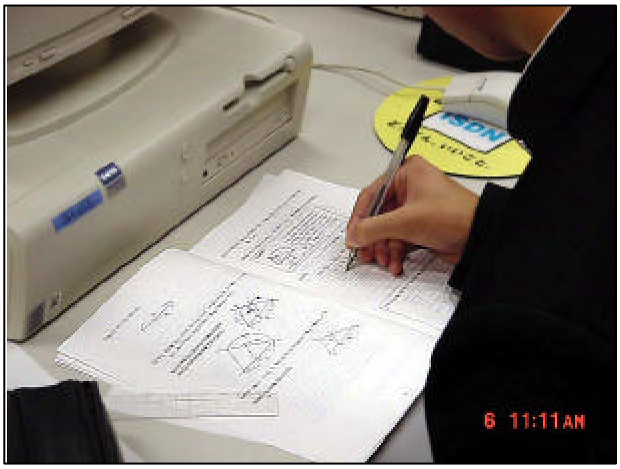
[乗　法]

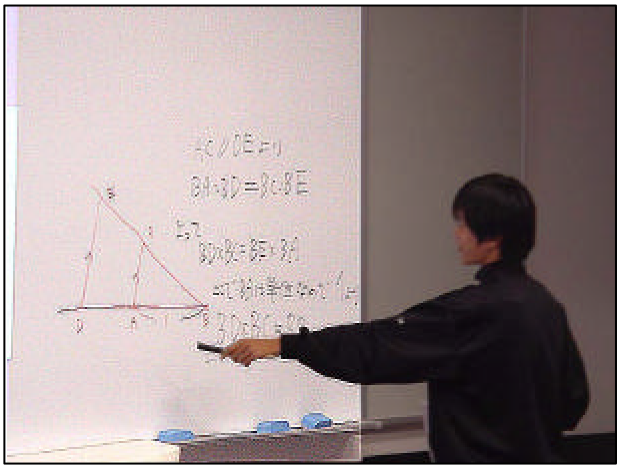
たとえば，AB [第1図] を単位とし，BD に BC を掛けねばならぬとすれば，点AとCを結び，CA に平行に DE をひけばよい．BE はこの乗法の積である．



[第１図]

上の原典日本語訳を解釈し、BE が AB と DB の積になっていることを証明させた。その際、ヒントとして単位 AB=1 を提示した。





≪問題に取り組む≫　　　　≪発表≫

最初は多くの生徒が戸惑っていたが、相似ということに気がつくと証明自体はスムーズに取り組めていた。今まで、線分と線分の掛け算は面積であると考えられていたものが、また線分で表すことができるという大きな発見に、多数の生徒が驚きを示していた。

〈除法について〉

同様の方法であるため、授業者がホワイトボードで説明した。

〈平方根の抽出について〉

まず、予備知識としてユークリッド「原論」第 2 巻命題 14 の比例中項を現代的な方法で証明した。2 つの線分の比例中項が、円と直線だけを用いて表せることに、生徒は歓声を上げていた。デカルトの方法は、一方を単位 1 と置くことにより、1 つの線分の比例中項を求めることができる。線分による演算を通して、生徒から次のような驚きが伺える感想を得た。

◎生徒の感想より

・‘1’を利用したのはすばらしい。

・今でこそ当たり前だが、当時の世界ではすごい発見だったのだろう。

・頭の使い方にびっくりした。先入観をもって考えたらわからない。

・世間で言う常識を変えてしまったことがすごいと思いました。

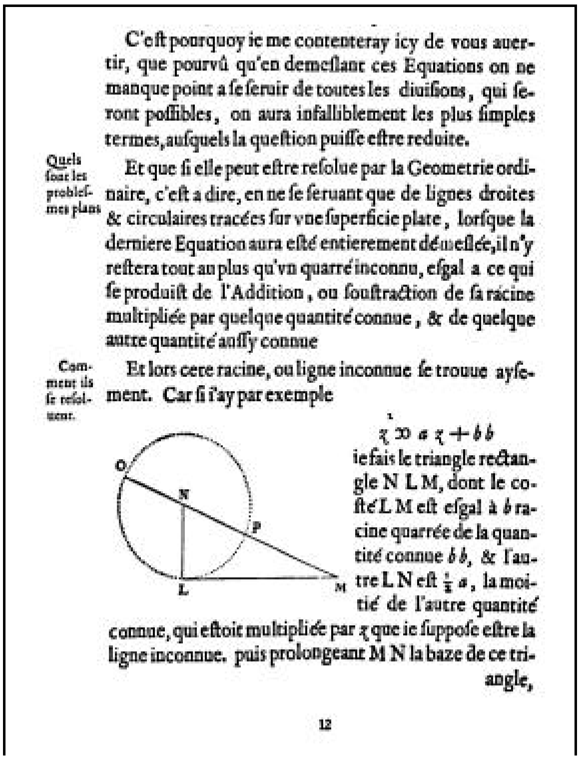
指導目標(2 時間目)

・デカルトの方法で、円と直線を用いて方程式を解く。

・デカルトによる曲線の新しい分類を把握し、曲線から方程式を導く。

【円と直線による方程式の解法と、曲線から方程式を求めること(2 時間目)

①「幾何学」第 1 巻　平面的な問題



C'eſt pourquoy ie me contenteray icy de vous auertir, que pourvû qu'en demeſlant ces Equations on ne manque point a ſe ſeruir de toutes les diuiſions, qui ſeront poſſibles, on aura infalliblement les plus ſimples termes, auſquels la queſtion puiſſe eſtre reduite.

Quels ſont les problesmes plans

Et que ſi elle peut eſtre reſolue par la Geometrie ordinaire, c'eſt a dire, en ne ſe ſeruant que de lignes droites & circulaires tracées ſur vne ſuperficie plate, lorſque la derniere Equation aura eſté entierement démeſlée, il n'y reſtera tout au plus qu'vn quarré inconnu, eſgal a ce qui ſe produiſt de l'Addition, ou ſouſtraction de ſa racine multipliée par quelque quantité connue, & de quelque autre quantité auſſy connue

Comment ils ſe resoluent.

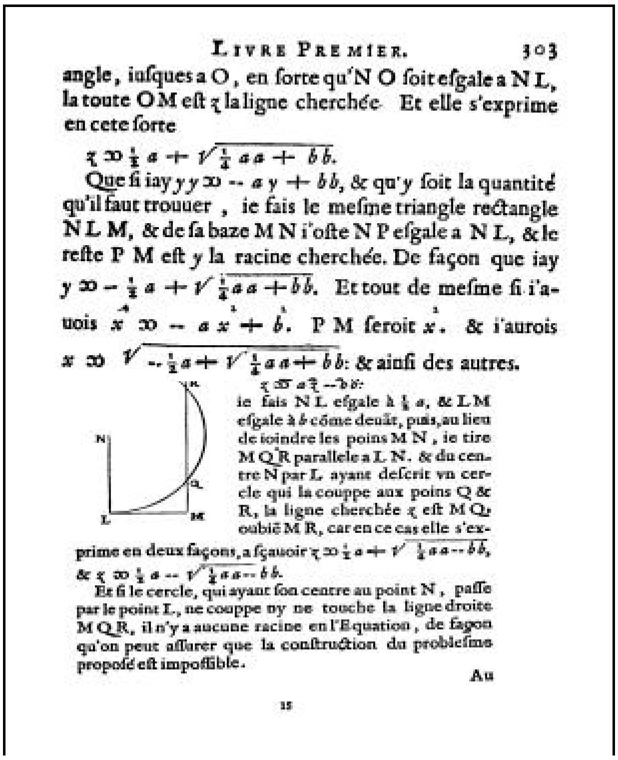
Et lors cete racine, ou ligne inconnue ſe trouue ayſement. Car ſi i'ay par exemple

$$z^2 \propto az + bb$$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par z que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle,

12

≪テキスト1≫



LIVRE PREMIER. 303

angle, iuſques a O, en ſorte qu'N O ſoit eſgale a N L, la toute OM eſt z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete ſorte

$$z \propto \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}.$$

Que ſi i'ay $yy \propto -ay + bb$, & qu'y ſoit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le meſme triangle rectangle N L M, & de ſa baze M N i'oſte N P eſgale a N L, & le reſte P M eſt y la racine cherchée. De façon que i'ay $y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Et tout de meſme ſi i'auois $x^4 \propto -ax^2 + b^2$. P M ſeroit x^2. & i'aurois $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: & ainſi des autres.

$$z^2 \propto az - bb:$$

ie fais N L eſgale à $\frac{1}{2}a$, & L M eſgale à b côme deuât, puis, au lieu de ioindre les poins M N, ie tire M Q R parallele a L N. & du centre N par L ayant deſcrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z eſt M Q, oubiē M R, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, a ſçauoir $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

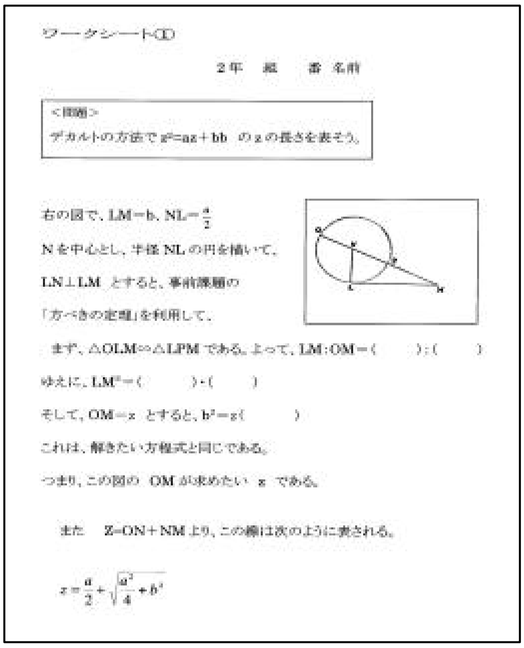
Et ſi le cercle, qui ayant ſon centre au point N, paſſe par le point L, ne couppe ny ne touche la ligne droite M Q R, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut aſſurer que la conſtruction du probleſme propoſé eſt impoſſible.

Au

15

≪テキスト2≫

授業者はまず、表記に対して原典(テキスト 1、2)を見せて、前時に取り扱ったデカルト以前の数学と比較することによりその発達を把握させた。また、この平面的な問題を理解する上で、**方べきの定理を補助定理として説明し、また当時の考え方として、方程式を解くということはその方程式を満たすような線分を求めることであるということを注意した。生徒は、ワークシート①を取り組み、その内容を把握した。**



ワークシート①

2年　組　番 名前

＜問題＞
デカルトの方法で $z^2=az+bb$ の z の長さを表そう。

右の図で、LM＝b、NL＝$\frac{a}{2}$

N を中心とし、半径 NL の円を描いて、

LN⊥LM とすると、事前課題の

「方べきの定理」を利用して、

まず、△OLM∽△LPM である。よって、LM : OM＝(　　　) : (　　　)

ゆえに、LM²＝(　　　)・(　　　)

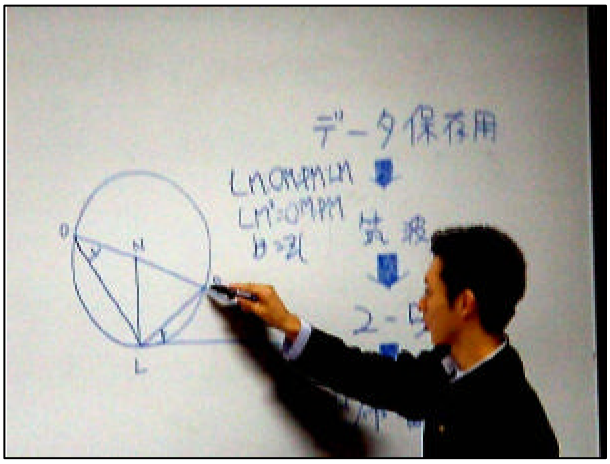
そして、OM＝z とすると、b²＝z(　　　)

これは、解きたい方程式と同じである。

つまり、この図の OM が求めたい z である。

また Z=ON＋NM より、この線は次のように表される。

$$z=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$$



≪発表≫

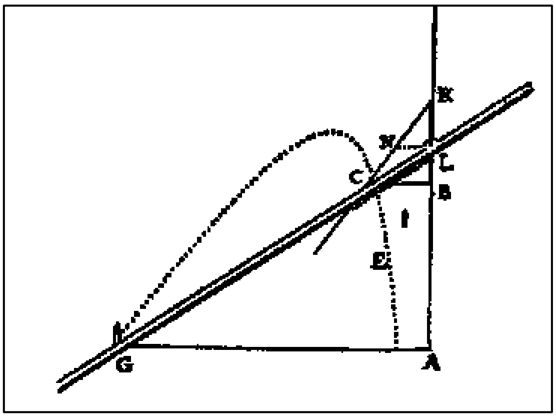
②「幾何学」第 2 巻　曲線の性質について

[すべての曲線をいくつかの類に分け、そのすべての点が直線の点にたいしてもつ関係を知る方法]
　次々と複雑さを増して限りなく進む曲線を描きまた考える手段は、ほかにもいくつか示すことができる。しかし、自然のなかにあるすべての曲線を包括し、それらを順序正しくいくつかの類に分けるためには、次のように述べるのが最もよいと私は考えるのである。幾何学的と名づけうる線、すなわち、何らかの的確で精密な計測を受けうる線のすべての点は、必ず、ひとつの直線のすべての点にたいして或る関係をもち、この関係は線のすべての点に関して同一の方程式によって表されうる。そして、この方程式が 2 個の未定量による矩形あるいは同一の未定量による正方形までしかのぼらないとき、曲線は第 1 の最も単純な類に属し、そこに含まれるものは円と放物線と双曲線と楕円しかない。しかし、方程式が 2 個の未定量－というのは、ここでは 1 点と他の点との関係を証明するのに 2 個の未定量が必要だからであるが－の双方または一方の第 3 ないし第 4 次元までのぼるときは、曲線は第 2 類に属する。方程式が第 5 ないし第 6 次元までのぼるときは、線は第 3 類に属し、以下同様にどこまでも進む。

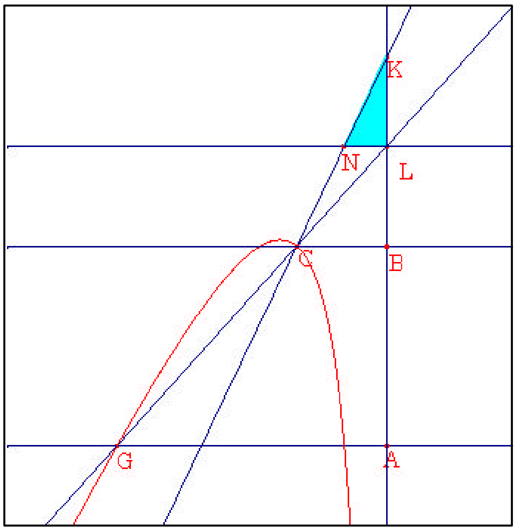
上のようなデカルトの記述から、当時の曲線の分け方とそれに対するデカルトの批判を把握した。そして、「ではデカルトはどのように曲線を分類したのか」という問いかけをし、疑問視させた上で続きの記述からそれを読み取った。

実際に、≪図１≫のような機械で描かれた曲線について、その方程式とそれが第何類でどんな曲線であるのかをデカルトの方法で導き出す。まず、この機械の定義に沿って作図ツール Cabri GeometryⅡで同じものを作成し、生徒一人一人に提示する。≪図 2≫


≪コンピュータに取り組む≫


≪図１≫

まず､GL を動かし､KN との交点 C が描く軌跡を予想させた。



≪図 2≫

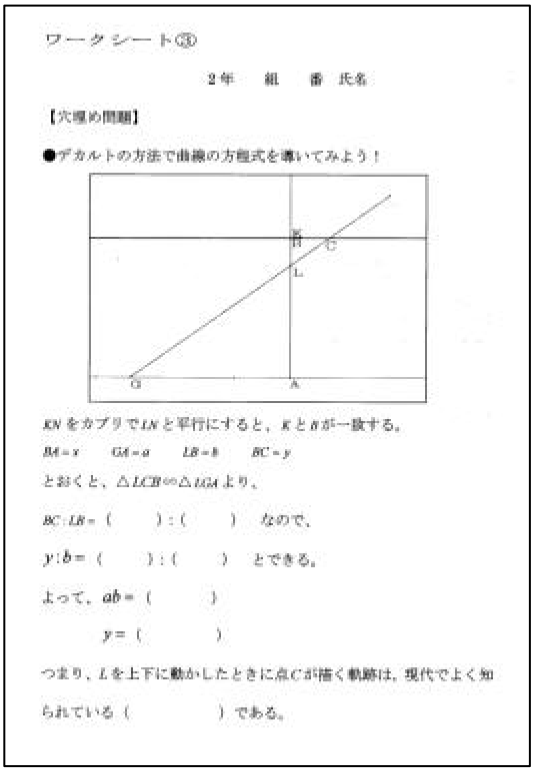
T：定木 GL を動かして、点 C がどんな曲線を描くのか予想してみよう。

S1：放物線？

S2：でもちょっと微妙。

T：そうだね。放物線とはちょっと違うかも。では、これがどんな曲線なのか、デカルトのように方程式を導いて調べてみよう。

生徒は、一般的な双曲線については未習であるため、放物線のようだがそうではないという見解をしていた。そこで、双曲線の方程式が未習であることも含め、実際に式は複雑で曲線の種類が判断しにくいので、生徒にはワークシート③のように少し形を変えて直角双曲線になるようなものを考えてもらった。



ワークシート③

2年　組　番　氏名

【穴埋め問題】

●デカルトの方法で曲線の方程式を導いてみよう！

KN をカブリで LN と平行にすると、K と N が一致する。

$BA=x$　$GA=a$　$LB=b$　$BC=y$

とおくと、$\triangle LCB \backsim \triangle LGA$ より、

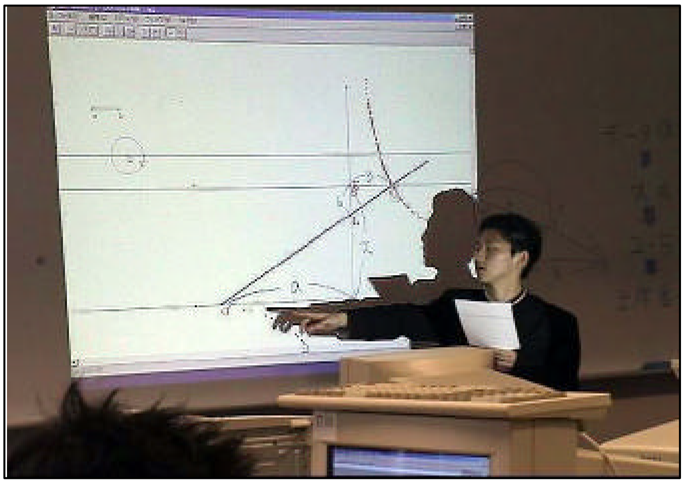
$BC:LB=$（　　）:（　　）　なので、

$y:b=$（　　）:（　　）　とできる。

よって、$ab=$（　　）

$y=$（　　）

つまり、L を上下に動かしたときに点 C が描く軌跡は、現代でよく知られている（　　　）である。



≪発表≫

生徒たちは、曲線から方程式を導いたことについて結構印象的だったようである。普段、関数領域においては方程式をもとにして曲線を学んでいくからであると思われる。また、この生徒たちは数学でコンピュータを使うことが初めてで、大変興味をもって活動している姿が見られた。

4．考察

事前事後アンケートをもとに課題 1 課題 2 に答え、本研究の目的が果せたかどうか検討していく。

課題 1：当時の手紙や記述を用いて数学史原典を解釈することにより、数学が人間の営みであることを捉えられるかどうか。

その人本人の言葉というのは、非常に説得力が強いものである。デカルトの手紙や記述を扱うことによって、生徒はデカルトの考えややろうとしたことを直接的に受け入れることができた。

〈生徒の感想より〉

・頭の使い方にびっくりした。先入観を持って考えたらわからない。だからデカルトは、先入観を持たずに考えたんだと思う。

・自分より前の人々の言ってきたことを否定し、そして新しく考えを生み出す。これは、本当にすごいと思った。

・ 理屈がすごかった。視点が自分とは全然違っていた。

・ 頭がやわらかい人だなと思った。

また、上の感想も含め、全体を通して数学が人間の営みであるということを感想にもった生徒が何人か見られた。

・数学は、長い時間をかけて多くの人たちによって作られていたことを感じた。

・今ごく当たり前のように使われている公式は、先人の惜しみない努力によって確立されてきたことを痛切に感じた。

・今まで幾つかのグラフの式を習ったけど、昔の人がいろいろと苦労して考えを使っているのがすごいと思った。

・いろんな人がいろんな見方でとらえて進化したことがすごい。

・ 自分たちが今簡単に公式を使って問題を解くことができるのは、昔の人の苦労のおかげなんだなあと思った。

この授業実践では、デカルト以前の数学者にも 3 の(3)②で述べたように、方程式の分類・式表現などをもとに、方程式が次元にとらわれていたことについて触れた。そしてその後は、主に「デカルト」という 1 人の数学者についてその考えや発見を取り扱った。生徒は，デカルト以前の数学者やデカルトの考えや発見を通じて、今習っている数学の全てが、多くの人々によって培われてきたことを感じ取り、上のような感想をもつことができたと思われる。

課題 2：数学の発展を追体験することで、生徒が自らの数学を発展的に捉えられるかどうか。

授業では、デカルトがそれ以前の数学を否定し、今につながるよ

うな大きな発展をとげた一場面を見てきた。この発展を追体験することにより、生徒から次のような感想が得られた。

〈生徒の感想より〉

・今回の 2 日間で、数学に大切なことは発想の転換と向上心だと思ったそして、数学ほど発展の余地がある学問はないと思う。

・デカルトはホントにすごいと思う。自分も新しい発見がもしかしたらできるのかもしれないかなと思えたし、デカルト以外にもいろいろなことを発見した人のことも知りたくなった。

・数学からいろいろな発想が生まれることを知った。

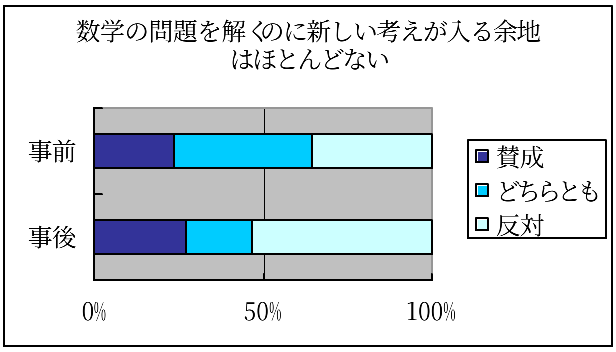
・もうこれ以上新しい公式、解き方、発見はないだろうと感じたが、デカルトのことをやっていると、なにか新しい発見が見つかってきそうな感じがした。

デカルトの考えについて、その偉大さを述べた生徒は大多数いたが、その中で数学における「発想の転換」という点で大きな影響を受けた生徒が、感想から 20 名ほど見受けられた。今までやり方だけにとらわれていた生徒と、数学を固定的に捉えていた生徒も、数学の考え方が無限であるというような感想を書いていた。

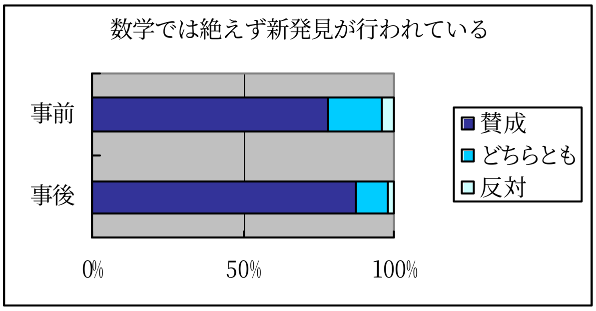
また、事前事後アンケートより、授業の前後の統計的なデータからも、生徒たちの数学に対する変容が伺えた。

以下にその結果を示す。

数学の問題を解くのに新しい考えが入る余地はほとんどない			
	賛成	どちらとも	反対
事前	23.3%	41.6%	35.1%
事後	27.3%	19.7%	53.0%



数学では絶えず新発見が行われている			
	賛成	どちらでも	反対
事前	77.9%	18.1%	3.8%
事後	89.4%	9.9%	1.5%



まず、「数学の問題を解くのに新しい考えが入る余地はほとんどない」について、賛成が少し増えてはいるが、事前と比べて事後アンケートでは「どちらともいえない」が大幅に減り、半数以上の生徒が「反対」という意見をもつことができた。また、「数学では絶えず新発見が行われている」という質問に対しては、事前でも多くの生徒が賛成であったが、事後にはおよそ 9 割の生徒が賛成意見をもつことができた。これは、デカルト以前の数学とデカルトの新しい考えとを比較して、発展の場面を追体験したことによる効果ではないかと思われる。そしてこの結果は、生徒自身が数学というものを固定的に考えるのではなく、より発展的な見方で考えるようになったということを示している。

以上のことより、生徒は歴史的な数学の発展を追体験することによって、数学の奥深さ、発想の転換のすばらしさを感じ、数学に対する固定的な概念を、発展的に捉えられるようになったといえる。

5．終わりに

　本研究では、数学史原典を用いた授業が、生徒に数学観の変容を促すことができるかどうかを目的に、主にデカルトの「幾何学」を教材として授業実践を行った。そして、その中でも数学を人間の営みとして捉えられるかどうか、生徒が自らの数学を発展的に捉えられるかどうかに焦点を当ててきた。そのために、解釈学的営みの視点からその人本人の言葉を取り上げて解釈し、数学が発展するまさにそのときを追体験するという立場で授業実践をした結果、多数の生徒から数学観における変容が伺えるような反応が得られた。中には、数学に対する興味・関心が増した生徒、もっといろいろな数学者について知りたいという感想をもつ生徒もいた。また、自ら数学史を学ぶことが有意義であると述べていた生徒も見られた。この授業を通して、本研究における課題は達成され、そしてまた、数学史を取り入れた授業の有用性というものも、実践的な立場から見出せたのではないだろうか。

謝辞

研究授業の実施に際しまして、埼玉県立春日部高等学校の今西善徳先生、片野秀樹先生、福住譲先生を始め、数学科の先生方には多大なるご協力と共に、貴重なご意見・ご指導をいただきました。厚く御礼申し上げます。

註 1　本研究は、筑波大学学内プロジェクト研究（助成研究Ｂ：研究代表者　礒田正美）「インターネット上の数学博物館の開発・評価研究」の一貫として行われた。

註 2　授業の詳細、並びに資料は次に掲示している。

http://www.mathedu-jp.org

参考・引用文献

1）文部省(1999), *高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編*, p33

2）国立教育研究所(1991), *数学教育の国際比較－第 2 回国際数学教育調査最終報告－*

3）礒田正美(1987), *数学学習における数学史の利用に関する一考察*, 筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告　第 26 集, p167

4）礒田正美(2001), *文化的営みとしての数学教育～その方法としての数学史上の一次文献の利用～*, 教科科学　数学教育　7 月号, 明治図書, p107

5）後藤司(1996), *曲線の表現史と作図ツールをふまえた解析幾何教材の刷新に関する一考察～ギリシャから微積分創成期をふまえて～*, 平成 8 年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

6）Hans Niels Jahnke(2000), The use of original sources in the mathematics classroom., In John Fauvel and Jan van Maanen (eds), *History in Mathematics Education*, An ICMI Study, p.291

7）礒田正美、土田知之(2001), *異文化体験を通じての数学の文化的視野の覚醒；数学的活動の新たなパースペクティブ*

8）David Eugene Smith, Marcia L.Latham(1954), *The geometry of REN? DESCARTES*, Dover Publications, p12, p15

9）原亨吉訳 (1974), 幾何学, *デカルト著作集 1*, 白水社, pp3-8, pp16-20

上記以外に授業に際して参考にした文献

10）スチュアート・ホリングテール著　岡部恒治　監訳(1993), *数学を築いた天才たち上*, 講談社

11) **中村幸四郎・寺阪英孝・伊東俊太郎・池田美恵訳**(1996), ***ユークリッド原論***, **共立出版**
12) **中村幸四郎**(1981), ***数学史－形成の立場から－***, **共立出版**
13) 鈴木孝典(1987), *中世の数学*, 共立出版
14) *カルダノ, ARTIS MAGN?*
15) FRANCISCI VIETA, *OPERA MATHEMATICA*
16) ***デカルト***, ***精神指導の規則***(**野田又夫訳**), **岩波書店**
17) 斎藤憲 (1997), *ユークリッド『原論』の成立 :古代の伝承と現代の神話*, 東京大学出版会
18) **大出晁[ほか]訳** (1977), **精神指導の規則**, ***デカルト著作集*** *4*, 白水社
19) 礒田正美 (2001), *デカルト*, *教科教育 数学教育 11 月号*, 明治図書