授業資料

Brachistochrone Problem を解こう！

Ｖｏｌ．３【１１月１４日(水)】

授業者：齋　藤　康　則
(筑波大学大学院教育研究科教科教育専攻数学教育コース)

Leibnizens mathematische Schriften

herausgegeben

von

C. I. Gerhardt.

Erste Abtheilung.

Band III.

Briefwechsel zwischen Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli und Nicolaus Bernoulli.

HALLE,
Druck und Verlag von H. W. Schmidt.
1855.

先週の内容は覚えていますか？

① Brachistochrone Problem とは・・・

NEW PROBLEM

Which Mathematicians Are Invited to Solve[3]

If two points A *and* B *are given in a vertical plane, to assign to a mobile particle* M *the path* AMB *along which, descending under its own weight, it passes from the point* A *to the point* B *in the briefest time.*

(Acta Eruditorum,Leipzig,1696,P296 より)

新しい問題

数学者は解くことを求められる

もし，２点A，Bが垂直面に与えられるならば，自分自身の重さで降下する可動質点Mが点Aから点Bに最短時間で通過する経路AMBを見つけなさい。(翻訳者：齋藤)

Brachistochrone Problem とはどのような問題か覚えていますか？

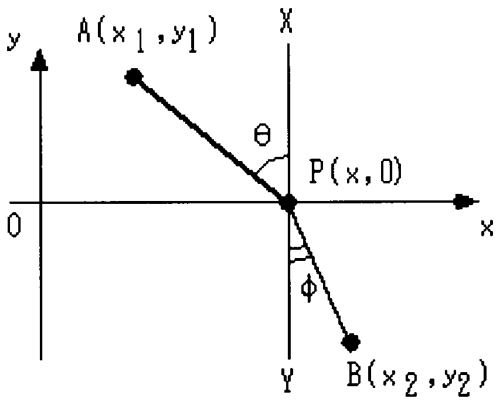
今日は皆さんに私の考えた解法を考えてもらいましょう。

②　フェルマーの最小時間の原理

フェルマー

『２点間を結ぶ光
の経路は，その時間
を最小にするもの
である。』

私の原理からあな
たは何を得ること
ができましたか？



5-1 Brachistochrone Problem とジャン・ベルヌーイ

Smith，A Source Book in Mathematics(Ｐ６４４～Ｐ６５２より抜粋，日本語あり【翻訳者：齋藤】)**を読んで，ジャン・ベルヌーイが Brachistochrone Problem を提出してからの経緯を考えていきましょう。**

問い

①　ベルヌーイが問題を提出してから，自ら解答するまでの経過

②　ベルヌーイが幾何学者と微分積分学者へ抱いた思い

③　ベルヌーイが Brachistochrone Problem を解く際に用いた方法

ホイヘンスは光学の研究をするにあたって，フェルマーのアイデアをしっかりと身につけ，それを完成させた。彼は光の運動を直線運動に限定せず，場所場所で光速が連続的に変化しているような媒質中での曲線運動は多様多種に見えるけれども，そのどれにも基本的性質として最短時間への志向があらわれていることを示した。

(『マッハ力学』エルンスト・マッハ著　伏見　譲訳，講談社　より)

↓↓↓

ジャン・ベルヌーイは Brachistochrone Problem を解く際，目的意識をもって落下運動を光の運動でおきかえた。(この種の問題は落下運動に関しては未解決であるが，光の運動に関しては既に解決済であることにジャンは気づいていた。)

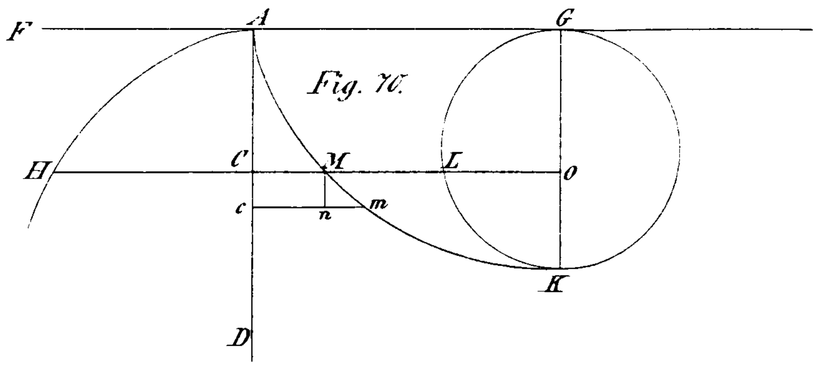
5−2 ジャン・ベルヌーイの解法

Sic generaliter solvere licet problema nostrum, quamcunque statuamus accelerationis legem. Eo enim reductum est, ut quaeratur curvatura radii in medio secundum raritates, prout libuerit, variante. Esto ergo medium FGD (fig. 70) terminatum ab horizontali FG, in qua punctum radians A, verticalis AD axis curvae datae AHE, cujus applicatae HC determinant raritates medii in altitudinibus AC, vel velocitates radii seu globuli in punctis M; radius incurvatus ipse qui quaeritur, AMB. Vocentur AC, x; CH, t; CM, y; differentialis Cc, dx; different. nm, dy; diff. Mm, dz; constans quaedam ad arbitrium assumta, a. Erit accepta Mm pro sinu toto, mn sinus anguli refractionis seu inclinationis curvae ad verticalem, et proinde per ea, quae modo diximus, mn est ad HC in ratione constante, id est, $dy.t = dz.a$; quod hanc suggerit aequationem, $a\,dy = t\,dz$, seu $aa\,dy^2 = tt\,dz^2 = tt\,dx^2 + tt\,dy^2$, quae reducta generalem dabit aequationem differentialem $dy = \frac{t\,dx}{\sqrt{aa - tt}}$ pro curva AMB quaesita. Atque adeo una opera duo insignia problemata, opticum unum, mechanicum alterum, ultra quam ab aliis petebam, resolvi, ostendique, quamvis ex diversissimis Matheseos partibus sint desumta, ejusdem tamen esse naturae.

Sumanus jam specialem casum, et quidem hypothesin communem a Gallilaeo primitus introductam et demonstratam, quod velocitates gravium cadentium sint in ratione subduplicata altitudinum emensarum; in hoc enim proprie quaestionis tenor consistit. Quo supposito, curva data AHE erit parabola, id est, $tt = ax$ et $t = \sqrt{ax}$, quae si substituantur in aequatione generali, habebitur haec $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a - x}}$, ex qua concludo Curvam Brachy-

III. 20

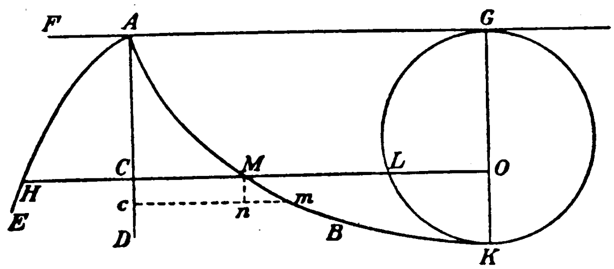
stochronam esse Cycloidem vulgarem. Si enim circulus GLK, cujus diameter $= a$, rotetur super AG et initium rotationis sit in ipso A, describet punctum K cycloidem, quae reperitur eandem habere aequationem differentialem $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, positis AC, x, et CM, y; potest tamen hoc a priori et analytice inveniri sic: $dx\sqrt{\frac{x}{a-x}} = \frac{x\,dx}{\sqrt{ax-xx}} = \frac{-a\,dx + 2x\,dx}{2\sqrt{ax-xx}} + \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax-xx}}$ est autem $\frac{a\,dx - 2x\,dx}{\sqrt{ax-xx}}$ differentialis quantitas, cujus summa $\sqrt{ax-xx}$ seu LO; et $\frac{a\,dx}{2\sqrt{ax-xx}}$ est differentialis ipsius arcus GL; ideoque, summata aequatione $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, habebitur y seu $CM = GL - LO$, ergo $MO = CO - GL + LO$; quoniam vero (assumta $CO =$ semiperipheriae GLK) $CO - GL = LK$, erit $MO = LK + LO$, et ablata communi LO, erit $ML = LK$; quod docet curvam KMA esse Cycloidem.



(出典：Leibnizens mathematische Schriften)

【英訳】

In this way we can solve our problem generally, whatever we assume to be the law of acceleration. For it is reduced to finding the curved path of a ray of light in a medium varying in rarity



arbitrarily. Let therefore FGD be the medium, bounded by the horizontal FG in which the radiating point A [is situated]. Let the vertical AD be the axis of the given curve AHE, whose associated HC determine the rarities of the medium at the heights AC, or the velocities of the ray, or corpuscle, at the points M. Let the curved ray itself which is sought be AMB. Call AC, x; CH, t; CM, y; the differential Cc, dx; diff. nm, dy; diff. Mm, dz; and let a be an arbitrary constant. Take Mm for the whole sine,[1] mn for the sine of the angle of refraction or of inclination of the curve to the vertical, and then by what we have just said, mn is to HC in constant ratio, that is $dy:t = dz:a$. This gives the equation $ady = tdz$, or $aady^2 = ttdz^2 = ttdx^2 + ttdy^2$; which when reduced gives the general differential equation $dy = tdx:\sqrt{(aa-tt)}$ for the required curve AMB. Thus I have with one stroke solved two remarkable problems, one optical the other mechanical, and [have accomplished] more than I required of others; I have shown that the two problems which are taken from entirely distinct fields of mathematics are nevertheless of the same nature.

Let us now consider a special case, namely that arising on the customary hypothesis first introduced and proved by Galileo, according to which the velocity of heavy falling bodies varies as the square root of the distance fallen through; for this indeed is properly the problem. Under this assumption the given curve AHE will be a parabola, that is, $tt = ax$ and $t = \sqrt{ax}$. If this is substituted in the general equation we find $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ from which I conclude that the *brachistochrone* curve is the *ordinary cycloid*. In fact if one rolls the circle GLK, whose diameter is a, on AG, and if the beginning of rotation is in A itself; then the point K describes a cycloid, which is found to have the same differential equation $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, calling AC, x, and CM, y. Also this can be shown analytically from the preceding as follows:

$$dx\sqrt{\frac{x}{a-x}} = xdx : \sqrt{(ax - xx)}$$

$$= adx : 2\sqrt{(ax - xx)} - (adx - 2xdx) : 2\sqrt{(ax - xx)};$$

also $(adx - 2xdx) : 2\sqrt{(ax - xx)}$ is the differential quantity whose sum[1] is $\sqrt{(ax - xx)}$ or LO; and $adx : 2\sqrt{(ax - xx)}$ is the differential of the arc GL itself; and therefore, summing the equation $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, we have y or $CM = GL - LO$, hence $MO = CO - GL + LO$. Since indeed (assuming CO = semiperiphery GLK) $CO - GL = LK$, we will have $MO = LK + LO$, and, cancelling LO, $ML = LK$; which shows the curve KMA to be the cycloid.

- - - - - - -

(Smith,A Source Book in Mathematics,P652~P653 より抜粋)

参　考

平成１５年度より施行される高等学校新学習指導要領『基礎数学』に関する資料

⑶　各科目の内容

各科目の内容改善の要点は次のとおりである。

ア　原則として内容のすべてを履修させる科目

㈠「数学基礎」（２単位）

この科目は，生徒の特性等の多様化を踏まえ，一層，個に応じた指導が展開できるよう，「数学Ｉ」と選択的に履修できる必履修科目として設けた。

各学校が，生徒の特性等や履修歴などに応じて，指導や評価についてより一層工夫できるよう，次の①から③までの幅広い内容で構成した。

①　数学と人間の活動　②　社会生活における数理的な考察

③　身近な統計

(文部省：高等学校学習指導要領解説　数学編理数編【Ｐ14】より抜粋)

第2章　各　科　目

第1節　数学基礎

1　目　　標

「数学基礎」の目標は，次のように示されている。

> 数学と人間とのかかわりや，社会生活において数学が果たしている役割について理解させ，数学に対する興味・関心を高めるとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し数学を活用する態度を育てる。

この科目は，生涯学習の基礎を培う科目の一つとして，生徒の特性等の多様化を踏まえ，一層，個に応じた指導が展開できるよう「数学Ⅰ」と選択的に履修できる必履修科目として設けた。そのため，生徒の主体的な活動を重視し，具体的な事象の考察を通して学習が進められるようにするとともに，他の科目を履修するための基礎的な内容で構成するのではなく，「(1)　数学と人間の活動」，「(2)　社会生活における数理的な考察」及び「(3)　身近な統計」の幅広い内容で構成した。

科目設定の趣旨から内容は大綱的に示されているが，三つの内容のいずれにおいても，この科目のねらいを十分達成できると考えられる教材を生徒の特性等や履修歴などを踏まえて適切に取り上げ，指導と評価を工夫することが重要である。

冒頭に，「数学と人間とのかかわりや，社会生活において数学が果たして

いる役割について理解させ」と示されている。例えば，「(1)　数学と人間の活動」では，記数法などの数学史的な話題を取り上げ，数学の諸概念の発展と人間の活動とのかかわりやそれが用いられてきた背景などを理解させる。

また，このような理解の上に立って，「数学に対する興味・関心を高めるとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し数学を活用する態度を育てる。」と示されている。例えば，「(2)　社会生活における数理的な考察」では，預貯金やローンの仕組みなどを取り上げ，社会生活で数学が活用されている場面や身近な事象を数理的に考察し，数学に対する興味・関心を高め，数学的な見方や考え方のよさを認識させる。このことによって，身近な問題の解決に数学を活用しようとする態度を育成し，数学の学習の必要性を一層認識できるようにする。

2　内容と内容の取扱い

(1)　数学と人間の活動

(1)　数学と人間の活動

数量や図形についての概念等が人間の活動にかかわって発展してきたことを理解し，数学に対する興味・関心を高める。

ア　数と人間

イ　図形と人間

［内容の取扱い］

(1)　内容の(1)については，数学における概念の形成や原理・法則の認識の過程と人間や文化とのかかわりを中心として，数学史的な

話題を取り上げるものとする。

数学の諸概念が人間の活動とのかかわりの中から生まれてきたことを認識することや，数学を文化や社会などとの関連からとらえることは，それ自身として重要であるとともに，数学に対する興味・関心等を高め，数学をより身近なものとして感じとらせるための有効な方法の一つである。

そのため，ここでは，「内容の取扱い」の(1)に示されているように，数学史的な話題を取り上げ，数学の諸概念の発展と人間の活動とのかかわりについて理解させる。

ア　数と人間

数に関する概念と人間の活動とのかかわりについての数学史的な話題として，例えば，記数法に関する話題などを扱うことが考えられる。

現在私たちが用いている10進位取り記数法が普及するまでには，長い年月をかけた様々な変遷があった。このようなことから，例えば，古代のエジプトやローマにおける記数法，中国における漢数字などを題材として，「0」の果たす役割の大きさなどについて理解させることが考えられる。また，バビロニアでは60進法の考えが用いられていたことなどを扱ったり，これらのことに関連して，コンピュータと2進法との関係などを扱ったりすることも考えられる。

このほかに，分数の発達，和算で扱われた話題，方程式や文字式等に関する話題などを扱うことも考えられる。

イ　図形と人間

図形に関する概念と人間の活動とのかかわりについての数学史的な話題として，例えば，三平方の定理に関する話題などを扱うことが考えられる。

三平方の定理の歴史は古く，紀元前に世界の幾つかの地域でこの定理につながる考え方が用いられている。例えば，中国では天体観測，インドでは祭

壇の設置に関する測量に用いられたと言われている。また，バビロニアでは，直角三角形になるような三角形の三辺の長さの組が多数知られており，エジプトでは，三辺の比が３：４：５となることを利用した測量が行われたと言われている。このような考察を通して，数学と人間の活動や文化とのかかわりについて理解させることが考えられる。

さらに，「ア　数と人間」にも関連するが，三平方の定理と関連させて，$\sqrt{2}$ など無理数に関する話題を扱うことも考えられる。

このほかに，円周率に関する話題，測量に関する話題，幾何の生い立ちに関する話題，アルキメデスの求積法に関する話題などを扱うことも考えられる。

(文部省：高等学校学習指導要領解説　数学編理数編【P31~P34】より抜粋)