授　業　資　料

Brachistochrone Problemを解こう！

Ｖｏｌ．１【１０月３１日(水)】

授業者：齋　藤　康　則

(筑波大学大学院教育研究科教科教育専攻数学教育コース)

Chapter1　ジャン・ベルヌーイの **Brachistochrone Problem**

1－1　微分積分学の歴史

◎歴史的に古いのは積分学である。

↓↓↓

面積や体積を測ることが最初に行われている。

三角形・円・球・円柱・円錐などはすべて古代ギリシアの時代に面積・体積が求められている。これらは『細かく区切ったものをすべてあわせる』という概念に基づいて作られた。$\Longrightarrow$区分求積法

◎フェルマー

微積分に関する業績があげられる。連続関数に接線を引く方法として提案されたこの問題は，フェルマーを極値の問題に導き，微分の概念に到達させたもので，微分積分学の創始者とされるニュートンやライプニッツの生まれる十数年前にこの成果が得られていた。

光学に応用　↓↓↓

極大極小の問題の考究───＞最短時間の原理(フェルマーの原理)を得る。

◎デカルト

『方法序説』(1637)で「座標」という概念を導入した。その中で「解析幾何学」を展開している。

↓↓↓

今までの幾何学が「三角形，合同，相似…」という世界だけだったのに比べ，座標の導入によりデカルトの幾何学は運動と変化を扱うのに適しており，力学と結びつき，ニュートン・ライプニッツが完成させた微分積分学へとつながっていく。

◎ニュートン

ガリレオの力学とケプラーの天文学を統合してニュートン力学を創造した。ニュートンは無限級数の理論(今で言うテイラー展開)を用いて，微分，積分，接線，面積，極限などの概念を一つにまとめた。彼は現在「拡張された二項定理」と呼ばれているものを別の方法で見つけ，それを使って微分積分の基本的性質(積分は微分の逆であるなど)を導き出している

◎ライプニッツ

ライプニッツは無限に近い値の列というところから微分積分学を考えた。また，数列における連続量間の差を表す「微分」という概念を導き出した。さらに彼は，関数，微分，座標，微分方程式，$\frac{dy}{dx}$，積分記号などの用語を導入した。

1－2　Brachistochrone Problemとは・・・

New Problem

Which Mathematicians Are Invited to Solve[3]

If two points A *and* B *are given in a vertical plane, to assign to a mobile particle* M *the path* AMB *along which, descending under its own weight, it passes from the point* A *to the point* B *in the briefest time.*

(Acta Eruditorum,Leipzig,1696,P296 より)

新しい問題

数学者は解くことを求められる

もし，２点A，Bが垂直面に与えられ，可動質点Mを設け，経路AMBに沿ってそれ自身の重さで降下するならば，それは点Aから点Bに最短時間で通過する。(翻訳者：齋藤)

↓

問い：上記の問題に対するあなたのイメージを書いて下さい。

この問題は，きわめて巧妙な方法で，ジャン・ベルヌーイ自身により，さら

にまたライプニッツ，ロピタル，ニュートン，ジャック・ベルヌーイによって解かれた。

１－３　人物紹介

・ジャック・ベルヌーイ(Jacques Bernoulli，１６５４～１７０５年；英語名 James【ジェームズ】，ドイツ名 Jakob【ヤコブ】)

○積分(integral)という用語を初めて使った人物

○「ベルヌーイの微分方程式」・「大数の法則」

・ジャン・ベルヌーイ(Jean Bernoulli，１６６７～１７４８年；英語名 John【ジョン】，ドイツ名 Johann【ヨハン】)

○世界で初めて微積分の講義を行った。

○ロピタルの定理 (※)

２人の仲たがいは，ジャンが大学教授になろうとしたとき，そのポストが，兄のジャックによってふさがっていたことに始まる。Brachistochrone Problem で相手の証明を盗むなどして４年間に渡りけんかを続けた。ジャックはけんかに疲れ，５１歳で亡くなり，ジャンは後任の教授となった。

【下線部(※)に関して】

ロピタル(L'Hopital)公爵はジャンに数学を学び，１６９６年，世界で最初の微積分の教科書『無限小解析』を出版した。ベルヌーイはロピタルの死後，$\dfrac{0}{0}$の形の表現の規則を主張した(Acta Eruditorum，1704 年 8 月)。

Ｃｈａｐｔｅｒ２　物体の運動

2－1　等速直線運動

一定の速さの直線運動，すなわち等速直線運動では，物体の移動距離は経過時間に(　　　)する。一定の速さ v [m/s]で，時間 t [s]の間に s [m]進んだとき，次の式が成り立つ。

↓

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

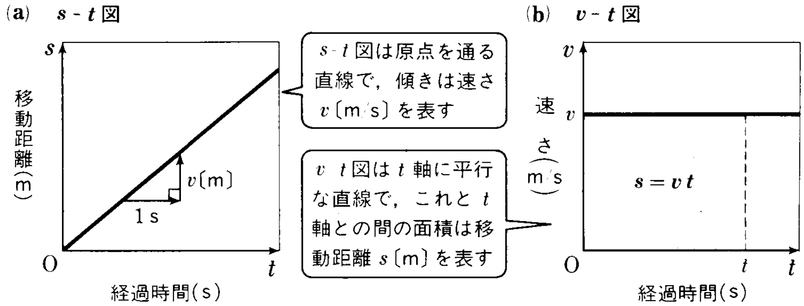


図２　等速直線運動のグラフ(『物理』数研出版株式会社　より)

2－2　等加速度直線運動

【１】　加速度

x 軸上を進む物体が原点 O を通るときの速度を $\vec{v}_0$ [m/s]，それから t [s]後に点 P を通るときの速度を $\vec{v}$ [m/s]とすると，時間 t [s]の間に速度が(　　　　　) [m/s]だけ変化しているから，1 秒当たりの速度の変化の平均，すなわち平均の加速度 $\vec{a}$ [m/s^2]は次のように表される。

$$\vec{a} = \frac{\text{速度の変化}}{\text{経過時間}} = \frac{(\qquad\qquad)}{t}$$

【２】　等加速度直線運動

はじめの位置を原点Oとして，初速度の向きにx軸をとる。初速度v_0[m/s]，加速度a [m/s^2]として，このときの等加速度直線運動を考える。

$a > 0$のとき

速度は毎秒(　　　) [m/s]ずつ増すから，t[s]後には(　　　) [m/s]だけ増し，そのときの速度v[m/s]は，

$$v = (\qquad\qquad\qquad\qquad) \quad \cdots ①$$

となる。したがって，$v-t$グラフは傾きaの直線になる。(図３)

$v-t$グラフの直線とt軸との間の面積は(　　　　　　　)を表すから，t[s]後の(　　　　　　　)は図の台形(　　　　)の面積になる。これがt[s]後の変位(物体が点Oから点Pへ移動したときのOPのこと) x[m]に相当するから，

$$x = \frac{(\qquad\qquad)t}{(\ )} = \frac{(\ )+(\qquad\qquad)}{(\ )}t = (\qquad\qquad\qquad\qquad)t$$

となる。したがって，

$$x = (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) \cdots ②$$

が成り立つ。

また，①，②からtを消去すると，変位とそのときの速度との関係式として

$$(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) \cdots ③$$

が得られる。

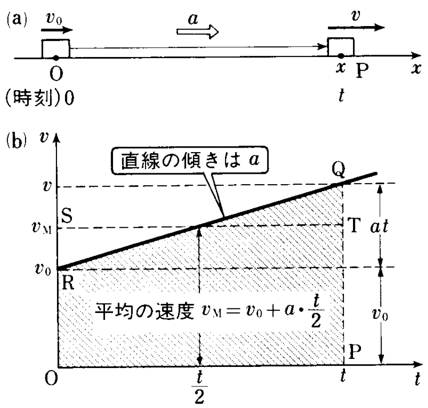


図３　等加速度直線運動($a > 0$)(『物理』数研出版株式会社　より)

$a < 0$のとき

図４のようになるが，この場合にも①～③が成り立つ。

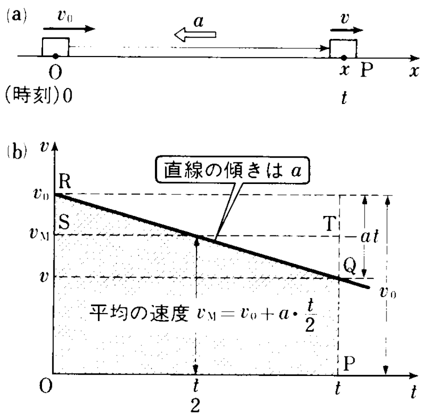
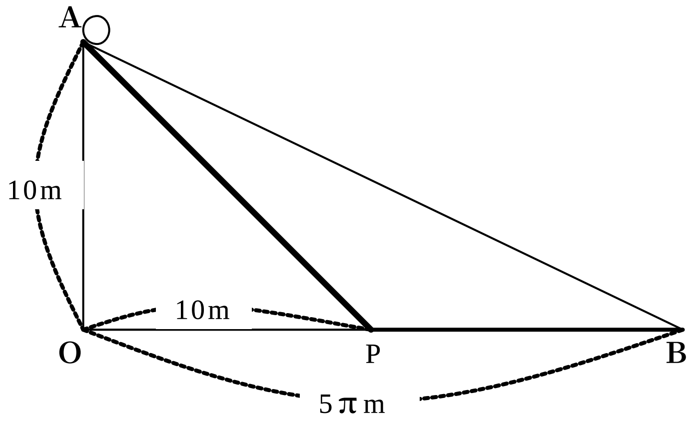


図４　等加速度直線運動($a < 0$) (『物理』数研出版株式会社　より)

【２ つの坂道問題（ＡＢ間が直線経路の場合）】

(参考：「数学と遊ぼう」http://www25.tok2.com/home/toretate/d000103.html)



地上から１０ｍはなれた地点Ａから斜面にそって質量５ｋｇのボールを転がすとき，ボールがルートＡＢとルートＡＰＢのどちらのルートを転がると先に地点Ｂに到着するか，考えなさい。

※物体が斜面上を転がるとき，鉛直下方の重力に影響される。落下の加速度を g (＝１０m/s^2)として物体の加速度を考えてみよう！

条件

・ボールの初速度は０とする。

・面とボールとの間に摩擦は生じないものとする。

この問題をワークシートに解いてみよう！

☆左ページの問題を解いて，あなたが気づいたことを下にまとめてみよう！