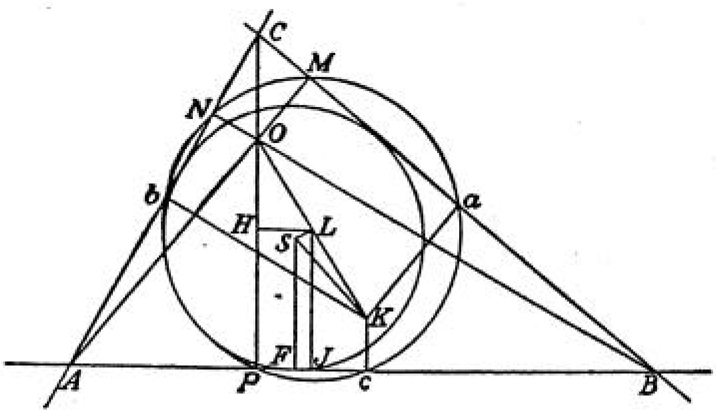
授業資料集(2000年12月4日～6日)

～三角形のこころのふしぎ～

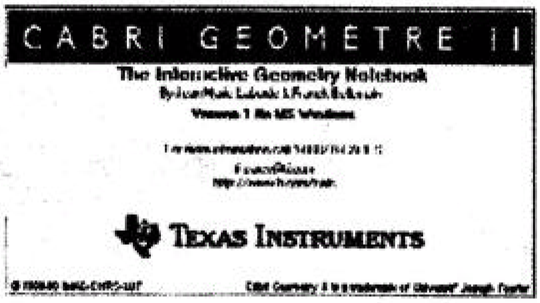
担当　筑波大学大学院修士課程教育研究科　竹谷　正

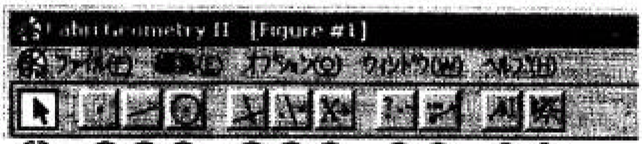


3年Ｄ組　　　番　氏名

資料1

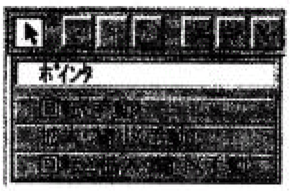
Cabri GeometryII（カブリII）の使い方





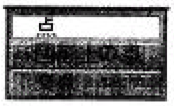
① ②③④ ⑤⑥⑦ ⑧⑨ ⑩⑪

機能①



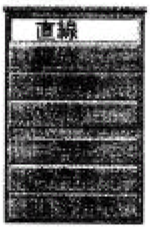
ポインタ　図形を選択、移動、変形する。

機能②



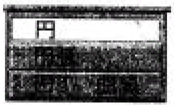
点　空いているスペース、図形上、2つの図形の交点に点を作成する。
図形上の点　図形上に点を作成する。
交点　2つの図形の交点を作図する。

機能③



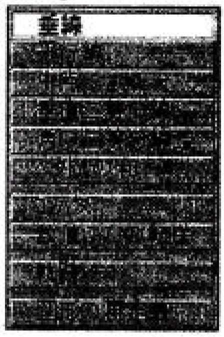
直線　1点を通り指定した傾きを持つ直線、または2点を通る直線を作図する
線分　2点を指定することにより、線分を作図する。
半直線　1点と方向を指定することにより、半直線を作図する。

機能④



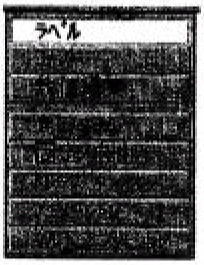
円　中心と半径を指定することにより、円を作図する。

機能⑤



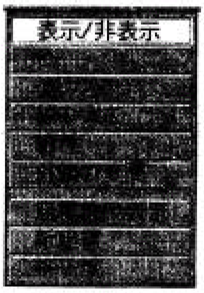
垂線　1点を通り、直線、線分、半直線に垂直な直線を作図する。
平行線　1点を通り、直線、線分、半直線に平行な直線を作図する。
中点　線分、または2点の中点を作図する。
垂直二等分線　線分、または2点の中点を通る垂直二等分線を作図する。
角の二等分線　3点を指定することにより、角の二等分線を作図する。2番目に指定した点が「頂点」になる。
コンパス　既存の線分や2点間の距離を半径とする円を作図する。はじめに半径となる長さを指定し、次に中心となる点を指定する。

機能⑩



ラベル　入力したA, B, Cなどのラベルを点、直線、円につける。

機能⑪



表示／非表示　指定した図形を画面から隠す。隠されていた図形は表示する。

その他

図形を消す　機能①のポインタで消したい図形を選んだ後、Deleteキーを押す。
1つ前に戻す　編集(E)から取り消し(U)を選ぶ。

資料2 ユークリッド『原論』

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛ. ΙΕ.
ΕΚ ΤΩΝ ΘΕΩΝΟΣ ΣΥΝ-
ΟΥΣΙΩΝ.
Εἰς τοῦ αὐτοῦ τὸ πρῶτον, ἐξηγημάτων Πρόκλου βιβλ. δ.
Adiecta præfatiuncula in qua de disciplinis
Mathematicis nonnihil.

BASILEAE APVD IOAN. HERVAGIVM ANNO
M. D. XXXIII. MENSE SEPTEMBRI.

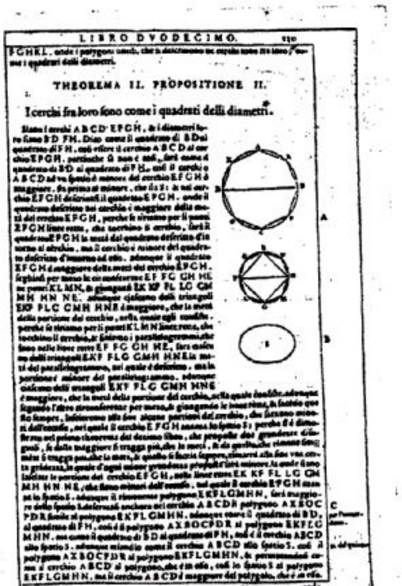
はじめてギリシァ原文の『原論』が印刷本として刊行されたもの——グリュナエウス版(1533)——editio princeps. 左はその表紙，右は命題1および命題2の部分である。詳細は伝承史参照のこと。

グリュナエウス版(1533)の『原論』第1巻の終わりの部分，命題46とその図，命題47——いわゆるピタゴラスの定理——とその現在でも用いられている図が見られる。

DE GLI
ELEMENTI
D'EVCLIDE
LIBRI QVINDICI
CON GLI SCHOLII ANTICHI.
TRADOTTI PRIMA
IN LINGVA LATINA DA M.
FEDERICO COMMANDINO DA VRBINO,
& con Commentarij illustrati,
ET HORA D'ORDINE DELL'ISTESSO TRASPORTATI NELLA NOSTRA VVLGARE, & da lui riueduti.
CON PRIVILEGIO.
IN VRBINO, APPRESSO DOMENICO FRISOLINO.
M. D. LXXV.

16世紀のイタリヤの数学者コンマンディノ(Federico Commandino 1509-1575)は多くのギリシァ数学の古典のラテン訳を行なった。とくにユークリッドの『原論』,アルキメデスの著作のラテン訳は有名である。この写真はコンマンディノがそのラテン訳『原論』を自らイタリヤ語に訳したものである。左はその表紙,下の2図は第12巻求積論のはじめの部分で,定理1と定理2の一部が見えている。

DE GLI ELEMENTI
DI EVCLIDE
LIBRO DVODECIMO
ET DE SOLIDI LIBRO II.
CON LI SCHOLII ANTICHI,
ET COMMENTARII
Di Federico Commandino da Vrbino.
THEOREMA I. PROPOSITIONE I.
I POLYGONI Simili, che si descriuono ne cerchi sono fra loro, come i quadrati delli diametri.



LIBRO DVODECIMO.
THEOREMA II. PROPOSITIONE II.
I cerchi fra loro sono come i quadrati delli diametri.

資料3　ユークリッド『原論』第4巻（日本語訳）

第 4 巻

定　義

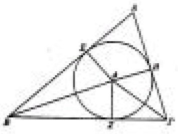
1. 内接する図形のおのおのの角が、内接される図形のおのおのの辺の上にあるとき、直線図形は直線図形に内接するといわれる。
2. 同様に、外接する図形のおのおのの辺が、外接される図形のおのおのの角に接するとき、図形は図形に外接するといわれる。
3. 内接する図形のおのおのの角が円周上にあるとき、直線図形は円に内接するといわれる。
4. 外接する図形のおのおのの辺が円周に接するとき、直線図形は円に外接するといわれる。
5. 同様に、円周が、内接される図形のおのおのの辺に接するとき、円は図形に内接するといわれる。
6. 円周が外接される図形のおのおのの角に接するとき、円は図形に外接するといわれる。
7. 線分はその両端が円周上にあるとき、円に挿入されるといわれる。

第 4 命題

与えられた三角形に円を内接させること。

与えられた三角形を ΑΒΓ とせよ。このとき三角形 ΑΒΓ に円を内接させねばならぬ。角 ΑΒΓ, ΑΓΒ が線分 ΒΔ, ΓΔ によって2等分され、点 Δ において相会するとし、Δ か

ら線分 ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ に垂線 ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ がひかれたとせよ。



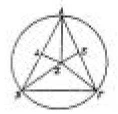
そうすれば角 ΑΒΔ は角 ΓΒΔ に等しく、直角 ΒΕΔ は直角 ΒΖΔ に等しいから、ΕΒΔ, ΖΒΔ は2角が2角に等しく、1辺が1辺に等しい、すなわち等しい角の一つに対する辺 ΒΔ を共有する二つの三角形である。それゆえ残りの辺も残りの辺に等しいであろう。ゆえに ΔΕ は ΔΖ に等しい。同じ理由で ΔΗ も ΔΖ に等しい。したがって3線分 ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ は互いに等しい。それゆえ Δ を中心とし、ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ の一つを半径として円が描かれれば、残りの点をも通り、そして点 Ε, Ζ, Η における角が直角であるから、線分 ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ に接するであろう。なぜなら、もし交わるならば、円の直径にその端から直角にひかれた直線が円の内部に落ちることになるであろう。これは不合理であることが証明された。ゆえに Δ を中心とし、ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ の一つを半径として描かれた円は線分 ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ と交わらないであろう。したがってそれらに接し、三角形 ΑΒΓ に内接された円であろう。それが ΖΗΕ のように内接されたとせよ。

よって与えられた三角形 ΑΒΓ に円 ΕΖΗ が内接された。これが作図すべきものであった。

第 5 命題

与えられた三角形に円を外接させること。

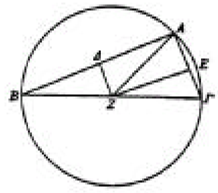
与えられた三角形を ΑΒΓ とせよ。与えられた三角形 ΑΒΓ に円を外接させねばならぬ。



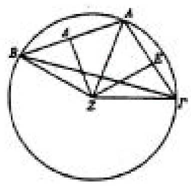
線分 ΑΒ, ΑΓ が点 Δ, Ε において2等分され、点 Δ, Ε から ΑΒ, ΑΓ に直角に ΔΖ, ΕΖ がひかれたとせよ。するとそれらは三角形 ΑΒΓ の内部か線分 ΒΓ 上かまたは ΒΓ の外部で相会するであろう。

まず内部で Ζ において相会するとし、ΖΒ, ΖΓ, ΖΑ が結ばれたとせよ。そうすれば ΑΔ は ΔΒ に等しく、ΔΖ は共通でかつ直角をなすから、底辺 ΑΖ は底辺 ΖΒ に等しい。同様にして ΓΖ が ΑΖ に等しいことも証明しうる。それゆえ ΖΒ も ΖΓ に等しい。ゆえに3線分 ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ は互いに等しい。したがって Ζ を中心とし、

ZA, ZB, $Z\Gamma$ の一つを半径として円が描かれれば，残りの点をも通り，そしてこの円は三角形 $AB\Gamma$ に外接されるであろう。$AB\Gamma$ のように外接されたとせよ。



次に第2図のように ΔZ, EZ が線分 $B\Gamma$ 上で Z において相会するとし，AZ が結ばれたとせよ。同様にして点 Z は三角形 $AB\Gamma$ に外接される円の中心であることを証明しうる。



さらにまた第3図のように ΔZ, EZ が三角形 $AB\Gamma$ の外部で Z において相会するとし，AZ, BZ, ΓZ が結ばれたとせよ。そうすればまた $A\Delta$ は ΔB に等しく，ΔZ は共通でかつ直角をなすから，底辺 AZ は底辺 BZ に等しい。同様にして ΓZ が AZ に等しいことも証明しうる。それゆえ BZ も $Z\Gamma$ に等しい。ゆえに Z を中心とし，ZA, ZB, $Z\Gamma$ の一つを半径として円が描かれれば，残りの点をも通り，三角形 $AB\Gamma$ に外接されているであろう。

よって与えられた三角形に円が外接された。これが作図すべきものであった。

そして次のことは明らかである，すなわち円の中心が三角形の内部におちるときには，角 $BA\Gamma$ は半円より大きい切片内にあるから，直角より小さく，中心が線分 $B\Gamma$ 上におちるときには，角 $BA\Gamma$ は半円内にあるから，直角である。また円の中心が三角形の外部におちるときには，角 $BA\Gamma$ は半円より小さい切片内にあるから，直角より大きい。

6

与えられた円に正方形を内接させること。

与えられた円を $AB\Gamma\Delta$ とせよ。このとき円 $AB\Gamma\Delta$ に正方形を内接させねばならぬ。

円 $AB\Gamma\Delta$ の二つの直径 $A\Gamma$, $B\Delta$ が互いに直角をなすようにひかれ，AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA が結ばれたとせよ。

そうすれば E は中心であるから，BE は $E\Delta$ に等しく，EA は共通でかつ直角をなすから，底辺 AB は底辺 $A\Delta$ に等しい。同じ理由で $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ の双方も AB, $A\Delta$ の双方に等しい。それゆえ四辺形 $AB\Gamma\Delta$ は等辺である。次いで方形でもあると主張する。線分 $B\Delta$ は円 $AB\Gamma\Delta$

1.6　オイラー線と垂心

> ギリシャ人は幾何学のほかにも，いろいろな数学の領域で実り豊かな成果をあげた．しかしわれわれは今でもあらゆる領域，とくに幾何学においても本質的にそれ以上に進歩している，ということを主張しよう．
>
> F. クライン (F. Klein, 1849～1925)
> (Klein 2, p. 189) (邦訳, 4, p. 262)

これからあとでは，いろいろな機会に，レオナルド・オイラー (Leonhard Euler, 1707～1783) の名前にたびたび言及することになろうが，このスイス人は，その生涯の大部分をロシアで過ごし，数学のあらゆる部門に重要な貢献を行なったのである．かれのもっとも著名な発見のいくつかは，ユークリッドの亡霊をして，「どうしてわたしはそれを考えつかなかったのだろう」といわしめるようなたぐいのものである．

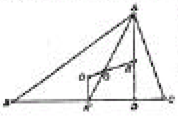


図 1.6a

三角形の外心 O と重心 G が一致する場合には，各中線はその対辺に垂直であるから，三角形は《三重に二等辺》でなければならない．つまり正三角形でなければならない．したがって，三角形 ABC がもし正三角形でないならば，外心と重心は三角形のオイラー線とよばれる1本の直線 OG を決定する．この直線 OG の延長上に点 H をとり，$OH=3OG$，つまり $GH=2OG$ になるようにする（図1.6a）．すると，$GA=2A'G$ であるから，『原論』VI.2 の後半部から，AH は $A'O$ に平行になる．$A'O$ は辺 BC の垂直二等分線だから，AH も BC に垂直になる．同様に，BH は CA に，CH は AB に垂直になる．

三角形の頂点から対辺へひいた垂線のことを，高さということにすると，上に述べたこと [Court 2, p. 101 参照] から，

三角形の3つの高さは，オイラー線上の1点で交わる

ことがわかる．この3本の高さの交点を，三角形の垂心とよぶ．

問　題

1. 与えられた三角形 ABC の各頂点を通って，対辺に平行線をひく．こうしてできた大きな三角形の辺の垂直二等分線を考えると，$\triangle ABC$ の3つの高さが1点で交わることの別証明が得られる．
2. 鈍角三角形の垂心は外部にある．

3. 直角三角形の垂心はどこにあるか．
4. 2つの高さが等しい三角形は二等辺三角形である．
5. 中線 BB' と高さ BE を与えて，二等辺三角形（底辺 BC）を作図せよ（ヒント：重心は，中線 BB' を 2 : 1 に内分する点である）．(H. Freudenthal)
6. $\triangle ABC$ の高さ AD の長さは，

$$2R\sin B\sin C$$

に等しい．

7. 重心 G から辺 BC へ下ろした垂線の長さを求めよ．
8. オイラー線が三角形の頂点を通るときは，その三角形は直角三角形か二等辺三角形か（あるいはその両方）である．
9. オイラー線が辺 BC に平行なときは，関係

$$\tan B\tan C=3$$

が成り立つ．

1.7　九　点　円

> この円こそは，初等幾何学に現われる最初の真に独創的な円である．
>
> ダニエル・ペドー (Daniel Pedoe, 1910～　)
> [Pedoe 1, p. 1]

三角形の高さの足（図1.6a の D のような点）の作る三角形を，もとの三角形 ABC の垂足三角形という．

垂足三角形の外接円は，3つの高さの足だけでなく，他の6個の重要な点を通るので，もとの三角形の九点円ともいわれる．実際，

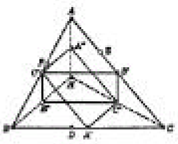


図 1.7a

1.71　三角形の3辺の中点，垂心と3頂点を結ぶ線分の中点，3本の高さの足は同一円周上にある．

証明 [Coxeter 2, 9.29]．図1.7a のように，BC, CA, AB, HA, HB, HC の中点をそれぞれ A', B', C', A'', B'', C'' とし，高さの足を D, E, F とする．ふたたび『原論』VI.2, 4 により，$C'B'$, $B''C''$ はともに BC に平行で，$B'C''$, $C'B''$ は AH に平行である．AH は BC に垂直だから，四辺形 $B'C'B''C''$ は長方形である．同様に $C'A'C''A''$ も長方形である．したがって，$A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ は1つの円の直径でなければならない．これらの直径はそれぞれ点 D, E, F に対して直角を張る [たとえば，$\angle A'DA''$=直角など……訳注] から，上の円はこれらの点をも通る．

資料5　ユークリッド『原論』第6巻（日本語訳）

第 6 巻

定　義

1. 相似な直線図形とは角がそれぞれ等しくかつ等しい角をはさむ辺が比例するものである。

[2. 二つの図形の双方に前項と後項の比があるとき，二つの図形は逆比例する。]

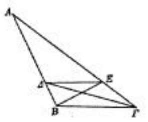
3. 線分は，不等な部分に分けられ，全体が大きい部分に対するように，大きい部分が小さい部分に対するとき，外中比に分けられたといわれる。

4. すべての図形において高さとは頂点から底辺にひかれた垂線である。

[5. 比の大きさがかけあわされてある比をつくるとき，この比は比から合成されるといわれる。]

2

もし三角形の1辺に平行に直線がひかれるならば，三角形の2辺を比例するように分けるであろう。そしてもし三角形の2辺が比例するように分けられるならば，区分点を結ぶ直線は三角形の残りの1辺に平行であろう。



三角形 $AB\Gamma$ の1辺 $B\Gamma$ に平行に ΔE がひかれたとせよ。$B\Delta$ が ΔA に対するように，ΓE が EA に対すると主張する。

BE, $\Gamma\Delta$ が結ばれたとせよ。

そうすれば三角形 $B\Delta E$ は三角形 $\Gamma\Delta E$ に等しい。なぜなら同じ底辺 ΔE 上に同じ平行線 ΔE, $B\Gamma$ の間にあるから。そして三角形 $A\Delta E$ は別ものである。ところで二つの等しいものは同じものに対し同じ比をもつ。それゆえ三角形 $B\Delta E$ が三角形 $A\Delta E$ に対するように，三角形 $\Gamma\Delta E$ が三角形 $A\Delta E$ に対する。ところが三角形 $B\Delta E$ が $A\Delta E$ に対するように，$B\Delta$ が ΔA に対する。なぜなら同じ高さ，すなわち E から AB へ下された垂線をもつから，それらは互いに底辺に比例する。同じ理由で三角形 $\Gamma\Delta E$ が $A\Delta E$ に対するように，ΓE が EA に対する。ゆえに $B\Delta$

が ΔA に対するように，ΓE が EA に対する。

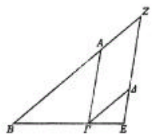
また三角形 $AB\Gamma$ の2辺 AB, $A\Gamma$ が比例するように分けられ，$B\Delta$ が ΔA に対するように，ΓE が EA に対し，ΔE が結ばれたとせよ。ΔE は $B\Gamma$ に平行であると主張する。

同じ作図がなされたとき，$B\Delta$ が ΔA に対するように，ΓE が EA に対し，$B\Delta$ が ΔA に対するように，三角形 $B\Delta E$ が三角形 $A\Delta E$ に対し，ΓE が EA に対するように，三角形 $\Gamma\Delta E$ が三角形 $A\Delta E$ に対するから，三角形 $B\Delta E$ が三角形 $A\Delta E$ に対するように，三角形 $\Gamma\Delta E$ が三角形 $A\Delta E$ に対する。それゆえ三角形 $B\Delta E$, $\Gamma\Delta E$ の双方は $A\Delta E$ に対して同じ比をもつ。ゆえに三角形 $B\Delta E$ は三角形 $\Gamma\Delta E$ に等しい。そして同じ底辺 ΔE の上にある。ところが同じ底辺上にある等しい三角形は同じ平行線の間にある。したがって ΔE は $B\Gamma$ に平行である。

よってもし三角形の1辺に平行に直線がひかれるならば，三角形の2辺を比例するように分けるであろう，そしてもし三角形の2辺が比例するように分けられるならば，区分点を結ぶ直線は三角形の残りの1辺に平行であろう。これが証明すべきことであった。

4

互いに角を等しくする二つの三角形の等しい角をはさむ辺は比例し，しかも等しい角に対する辺がそれぞれ対応する。



$AB\Gamma$, $\Delta\Gamma E$ を角 $AB\Gamma$ が角 $\Delta\Gamma E$ に，角 $BA\Gamma$ が角 $\Gamma\Delta E$ に，また角 $A\Gamma B$ が角 $\Gamma E\Delta$ に等しい二つの等角な三角形とせよ。三角形 $AB\Gamma$, $\Delta\Gamma E$ の等しい角をはさむ辺は比例し，しかも等しい角に対する辺がそれぞれ対応すると主張する。

$B\Gamma$ が ΓE と一直線をなすようにせよ。そうすれば角 $AB\Gamma$, $A\Gamma B$ の和は2直角より小さく，角 $A\Gamma B$ は角 $\Delta E\Gamma$ に等しいから，角 $AB\Gamma$, $\Delta E\Gamma$ の和は2直角より小さい。それゆえ BA, $E\Delta$ は延長されれば交わるであろう。延長されて Z において交わるとせよ。

そうすれば角 $\Delta\Gamma E$ は角 $AB\Gamma$ に等しいから，BZ は $\Gamma\Delta$ に平行である。また角 $A\Gamma B$ は角 $\Delta E\Gamma$ に等しいから，$A\Gamma$ は ZE に平行である。それゆえ $ZA\Gamma\Delta$ は平行四辺形である。

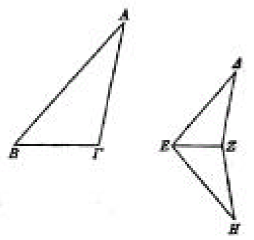
ゆえに ZA は $\Delta\Gamma$ に，$A\Gamma$ は $Z\Delta$ に等しい。そして $A\Gamma$ は三角形 ZBE の1辺に平行にひかれたから，BA が AZ に対するように，$B\Gamma$ が ΓE に対する。ところが AZ は $\Gamma\Delta$ に等しい。したがって BA が $\Gamma\Delta$ に対するように，$B\Gamma$ が ΓE に対し，いれかえて AB が $B\Gamma$ に対するように，$\Delta\Gamma$ が ΓE に対する。また $\Gamma\Delta$ が BZ に平行であるから，$B\Gamma$ が ΓE に対するように，$Z\Delta$ が ΔE に対する。ところが $Z\Delta$ は $A\Gamma$ に等しい。それゆえ $B\Gamma$ が ΓE に対するように，$A\Gamma$ が ΔE に対し，いれかえて $B\Gamma$ が ΓA に対するように，ΓE が $E\Delta$ に対する。そこで AB が $B\Gamma$ に対するように，$\Delta\Gamma$ が ΓE に対し，$B\Gamma$ が ΓA に対するように，ΓE が $E\Delta$ に対することが証明されたから，等間隔比により BA が $A\Gamma$ に対するように，$\Gamma\Delta$ が ΔE に対する。

よって互いに角を等しくする二つの三角形の等しい角をはさむ辺は比例し，しかも等しい角に対する辺がそれぞれ対応する。これが証明すべきことであった。

5

もし二つの三角形の辺が比例するならば，二つの三角形は互いに等角であり，対応する辺に対する角は等しいであろう。

$AB\Gamma$，ΔEZ が辺が比例する二つの三角形であり，AB が $B\Gamma$ に対するように，ΔE が EZ に対し，$B\Gamma$ が ΓA に対するように，EZ が $Z\Delta$ に対し，また BA が $A\Gamma$ に対するように，$E\Delta$ が ΔZ に対するとせよ。三角形 $AB\Gamma$ は三角形 ΔEZ に等角であり，対応する辺に対する角，すなわち角 $AB\Gamma$ は角 ΔEZ に，角 $B\Gamma A$ は角 $EZ\Delta$ に，また角 $BA\Gamma$ は角 $E\Delta Z$ に等しいと主張する。



線分 EZ 上にその上の点 E, Z において角 $AB\Gamma$ に等しい角 ZEH が，角 $A\Gamma B$ に等しい角 EZH がつくられたとせよ。そうすれば残りの A における角は残りの H における角に等しい。

三角形 $AB\Gamma$ は EHZ に等角である。ゆえに三角形 $AB\Gamma$，EHZ の等しい角をはさむ辺は比例し，等しい角に対する辺がそれぞれ対応する。したがって AB が $B\Gamma$ に対するように，HE は EZ に対する。ところが AB が $B\Gamma$ に対するように，ΔE が EZ に対すること

資料6 Smith A source book in mathematics

FEUERBACH

On the Theorem Which Bears His Name

(Translated from the German by Professor Roger A. Johnson, Hunter College New York City.)

Karl Wilhelm Feuerbach (1800–1834) was a professor of mathematics in the Gymnasium at Erlangen, Germany. He is known chiefly for the theorem which bears his name and which is reproduced in this article. The preceding article calls attention to the theorem and to the earlier work upon the subject by Brianchon and Poncelet. The present translation is made from the *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch Sie bestimmten Linien und Figuren*, published by Feuerbach in 1822 (2d ed., 1908). It includes certain passages which lead up to the theorem, but it omits such parts of the work as are not used in the proof. As is the case with the preceding article, this furnishes a source of some of the interesting work on the modern geometry of the triangle.

10

CHAPTER I

On the Centers of the Circles, Which Touch the Three Sides of a Triangle

§1. [It is stated to be known, that there are four circles which are tangent to the sides of a triangle *ABC*, one internal to the triangle and the others external. Their centers S, S', S'', S''', are the points of intersection of the bisectors of the angles of the triangle.]

§2. Let the radii of the circles about the centers S, S', S'', S''' be denoted by r, r', r'', r''' respectively; then we know that their values are

$$r = \frac{2\Delta}{a+b+c}, r' = \frac{2\Delta}{-a+b+c}, r'' = \frac{2\Delta}{a-b+c}, r''' = \frac{2\Delta}{a+b-c}$$

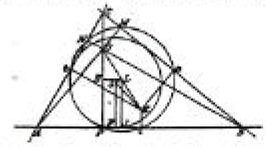
where, as usual, a, b, c denote the sides BC, CA, AB, and Δ the area of the triangle *ABC*.

. . . .

CHAPTER II

On the Point of Intersection of the Perpendiculars Dropped from the Vertices of a Triangle on the Opposite Sides

§19. If from the vertices of the angles of a triangle *ABC*, perpendiculars *AM*, *BN*, *CP* are dropped on the opposite sides, intersecting, as is well known, in a point O, the feet of these perpendiculars determine a triangle *MNP*, which is notable as having the least perimeter of all triangles inscribed in triangle *ABC*. . .



[Denoting the angles of the triangle by α, β, γ respectively], we have $AP = b \cos \alpha$, $AN = c \cos \alpha$, hence

$$NP^2 = (b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha)\cos^2 \alpha;$$

but $b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = a^2$, whence $\overline{NP}^2 = a^2 \cos^2 \alpha$ and $NP = a \cos \alpha$; similarly $MP = b \cos \beta$, and $MN = c \cos \gamma$; or, if the cosines are expressed in terms of the sides,

$$MN = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}$$

[and similarly for MP and NP]. If we add these three values, then since

$a^2(-a^2 + b^2 + c^2) + b^2(a^2 - b^2 + c^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2) = 16\Delta^2$ [1] $MN + MP + NP = \frac{8\Delta^2}{abc}$, and since $\frac{abc}{4\Delta} = R$,[2] where R, as previously, represents the radius of the circle circumscribed about triangle *ABC*, the desired result is obtained:

$$MN + NP + MP = \frac{2\Delta}{R}.$$

. . . .

[1] [This is the familiar formula $\Delta^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ in a modified form.]

[2] [Easily established, since $ab \sin \gamma = 2\Delta$, and $2R \sin \gamma = c$.]

If the triangle has an obtuse angle, say at A, then the corresponding term NP has the negative sign in this relation:

$$MN + MP - NP = 2\Delta/R.$$

The ~~theorems which follow are~~ subject to similar modification.

. . . .

§23. Since $AN = c \cos \alpha$, $AP = b \cos \alpha$, and $\frac{1}{2}bc \sin \alpha = \Delta$, it follows that $\triangle ANP = \Delta.\cos^2 \alpha$; likewise $\triangle BMP = \Delta.\cos^2 \beta$ and $\triangle CMN = \Delta.\cos^2 \lambda$; hence

$$\triangle MNP = \Delta(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma);$$

but since $\cos^2 \gamma = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)^2$ and $\sin^2 \alpha \sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta$, then

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma,$$

and accordingly

$$\triangle MNP = 2\Delta \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{4a^2b^2c^2}\Delta.$$

§24. If ρ designates the radius of the inscribed circle of triangle MNP and $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$, $\rho^{(3)}$ those of the escribed circles, then, by virtue of §2 and §23, we have for the acute triangle ABC:

$$\rho = \frac{4\Delta \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma}$$

$$\rho^{(1)} = \frac{4\Delta \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{-a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma}$$

[and if angle α is obtuse, these equations are modified by changing the sign of each term containing $\cos \alpha$.]

Now since in general, by §19, $a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = 2\Delta/R$, we have for the acute triangle ABC:

$$\rho = 2R \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

and on the other hand, if A is obtuse,

$$\rho^{(1)} = -2R \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

. . . .

26. The radius of the circle circumscribed about the triangle MNP is equal to

$$\frac{MN.MP.NP}{4\,\Delta\,MNP} = \frac{abc \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{8\Delta \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} = \tfrac{1}{2}R$$

that is, to half the radius of the circle circumscribed about the triangle.

. . . .

§32. Since angle AOP equals ABC, then $AO = \frac{AP}{\sin \beta}$, and since $AP = b \cos \alpha$, and $\sin \beta = \frac{b}{2R}$, therefore:

$AO = 2R \cos \alpha$; similarly $BO = 2R \cos \beta$ and $CO = 2R \cos \gamma$; hence

$$AO + BO + CO = 2R(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)$$

[and by substitution of the formulas for the cosines and algebraic reduction, we find for any acute triangle]

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{r + R}{R}, \; AO + BO + CO = 2(r + R)$$

[If the triangle has an obtuse angle, *e. g.*, at C, then]

$$AO + BO - CO = 2(r + R).$$

. . . .

§35. We have $OM = BO \cos \gamma$, and since by §32 $BO = 2R \cos \beta$, therefore

$$OM = 2R \cos \beta \cos \gamma;$$

similarly $ON = 2R \cos \alpha \cos \gamma$, and $OP = 2R \cos \alpha \cos \beta$. If one multiplies these expressions respectively by those of AO, BO, CO (§32), then, since $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{\rho}{2R}$ (§24)

$$AO.OM = BO.ON = CO.OP = 2\rho R$$

That is, *the point of intersection of the three perpendiculars of triangle ABC divides each into two parts, whose rectangle equals double the rectangle of the radius of the circle inscribed in triangle MNP and that of the circle circumscribed about triangle ABC.*

. . . .

CHAPTER III

On the Center of the Circle, Which Is Circumscribed about a Triangle

§45. If K is the center of the circle circumscribed about a triangle ABC, and if perpendiculars Ka, Kb, Kc are dropped from this point on the sides, BC, CA, AB; then if we draw AK, $Kc = AK \cos AKc$; and because $AK = R$ and angle AKc equals ACB, therefore

$$Kc = R \cos \gamma;$$

and similarly $Kb = R \cos \beta$ and $Ka = R \cos \alpha$. If we compare these expressions with those found in §32 for AO, BO, CO,... we have at once

$$AO = 2Ka, \; BO = 2Kb, \; CO = 2Kc,$$

In any triangle the distance from the center of the circumscribed circle to any side is half the distance from the common point of the altitudes to the opposite vertex.

. . . .

CHAPTER IV

DETERMINATION OF THE RELATIVE POSITIONS OF THE POINTS PREVIOUSLY DISCUSSED. [Bestimmung der Gegenseitigen Lage der Vornehmsten bisher betrachteten Punkte.]

§49. If K and S are the centers of the circles circumscribed and inscribed to the triangle ABC, and perpendiculars Kc and SF are dropped from these to the side AB, then

$$\overline{KS}^2 = (Ac - AF)^2 + (SF - Kc)^2$$

Now we have $Ac = \frac{1}{2}c$ and $AF = \frac{1}{2}(-a + b + c)$, whence:

$$Ac - AF = \tfrac{1}{2}(a - b);$$

further, because (§2)

$$SF = \frac{2\Delta}{a + b + c},$$

and (§45)

$$Kc = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{8\Delta},$$

therefore

$SF - Kc =$

$$\frac{(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) - c(a^2 + b^2 - c^2)}{8\Delta}$$

If now we substitute in the above expression for $\overline{KS}^2$, after the necessary reductions we have

$$\overline{KS}^2 = \frac{a^2b^2c^2 - abc(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{16\Delta^2},$$

whence by means of the known values of the radii r and R we arrive at the result:

$$\overline{KS}^2 = R^2 - 2rR$$

In any triangle the square of the distance between the centers of the in- and circumscribed circles equals the square of the radius of the circumscribed circle, diminished by twice the rectangle of this radius and the radius of the inscribed circle.

[By similar methods we find that if S' is the center and r' the radius of an escribed circle,

$$\overline{KS'}^2 = R^2 + 2r'R$$ [1]

. . . .

§51, 53. [By exactly the same methods, we derive the relations]

$$\overline{OS}^2 = 2r^2 - 2\rho R$$
$$\overline{KO}^2 = R^2 - 4\rho R$$

§54. If L is the center of the circle circumscribed about the circle MNP, whose radius (§26) has been found to be $\frac{1}{2}R$, and if OL is drawn, then since O is also the center of the inscribed circle of triangle MNP, then (§49) $\overline{OL}^2 = \frac{1}{4}R^2 - \rho R$, and since we have just seen that $\overline{KO}^2 = R^2 - 4\rho R$, it follows that $\overline{KO}^2 = 4\overline{OL}^2$, or

$$KO = 2OL.$$

[If the triangle is obtuse, a slight modification of the proof leads to the same result, viz:]

In any triangle the common point of the altitudes is twice as far from the center of the circumscribed circle as from the center of the circle through the feet of the altitudes.

§55. If perpendiculars LJ, LH are dropped from the center L on the lines AB, CP, $LJ = PH$, and since H is a right angle, it is known that in triangle OPL, $PH = \dfrac{-\overline{OL}^2 + \overline{OP}^2 + \overline{LP}^2}{2OP}$. But $LP = \frac{1}{2}R$, and (§54) $\overline{OL}^2 = \frac{1}{4}R^2 - \rho R$; further (§35, 45) $OP.Kc = \rho R$, whence $\overline{LP}^2 - \overline{OL}^2 = OP.Kc$. If this expression is substituted in $PH = LJ$, the result is

$$LJ = \tfrac{1}{2}(OP + Kc).$$

From this property it follows at once that the points O, L, K are on one and the same line, and the theorem shines out (erhellet):

In any triangle the center of the circumscribed circle, the common point of the altitudes, and the center of the circle through feet of the altitudes lie on one and the same straight line, whose mid-point is the last named point.

§56. Because the point L, then, lies at the center of the line KO, therefore the point J is also the center of the line Pc, whence

[1] In a historical note, the theorem is attributed to Euler. The history of this theorem has been investigated in detail by Mackay, *Proceedings of the Edinburgh Math. Society*, V. 1886–7, p. 62.

it follows that $Lc = LP = \frac{1}{2}R$; and similarly on each of the other sides AC, BC. Thus we have the theorem:

In any triangle the circle which passes through the feet of the altitudes also cuts the sides at their mid-points.

§57. If the line LS is drawn, we know that in triangle KOS, since L is the mid-point of KO, $2\overline{SL}^2 + 2\overline{OL}^2 = \overline{KS}^2 + \overline{OS}^2$. If we substitute in this equation the values of the squares of OL KS, OS, as found in 54, 49, 51, thus there comes

$$\overline{LS}^2 = \frac{1}{4}R^2 - rR + r^2 = (\frac{1}{2}R - r)^2,$$

or:

$$LS = \frac{1}{2}R - r.$$

Similarly, setting a, b, c in turn negative,

$$LS' = \frac{1}{2}R + r', \; LS'' = \frac{1}{2}R + r'', \; LS''' = \frac{1}{2}R + r'''.$$

Since now (§26)$\frac{1}{2}R$ is the radius of the circle circumscribed about triangle MNP, we deduce from a known property of circles which are tangent, the following theorem:

The circle which passes through the feet of the altitudes of a triangle touches all four of the circles which are tangent to the three sides of the triangle and specifically, it touches the inscribed circle internally and the escribed circles externally.

A History of Mathematics 5ed. 1991.
Florian Cajori Chelsea publishing company New York

mbe, Karl Pohlke (1810–1877) of Berlin,[1] Josef Schlesinger (1831–1901) of Vienna, and particularly W. Fiedler, interwove projective and descriptive geometry.

Wilhelm Fiedler (1832–1912), the son of a shoe-maker in Chemnitz, Saxony, taught mathematics and mechanics in a technical school of Chemnitz, 1853 to 1864, and studied meanwhile the works of M. Chasles, G. Lamé, B. de St.-Venant, J. V. Poncelet, J. Steiner, J. Plücker, von Staudt, G. Salmon, A. Cayley, J. J. Sylvester. He was self-taught. On the recommendation of A. F. Möbius he was awarded in 1859 the degree of doctor of philosophy by the University of Leipzig for a dissertation on central projection. At this time Fiedler made arrangements with Salmon for a German elaborated edition of Salmon's *Conic Sections*; it appeared in 1860. In the same way were brought out by Fiedler Salmon's *Higher Algebra* in 1863, Salmon's *Geometry of Three Dimensions* in 1862, Salmon's *Higher Plane Curves* in 1873. In 1864 Fiedler became professor at the technical high school in Prag, and in 1867 at the Polytechnic School in Zurich, where he was active until his retirement in 1907. The emphasis of Fiedler's activity was placed upon descriptive geometry. His *Darstellende Geometrie*, 1871, was brought, in the third edition, in organic connection with v. Staudt's geometry of position. Especially after the death of Culmann in 1881, Fiedler was criticised on pedagogic grounds for excessive emphasis upon geometric construction. A harmonizing effort was the text on descriptive geometry by *Christian Wiener* (1826–1896) of the Polytechnic School in Karlsruhe. Of interest is Fiedler's recognition in 1870 of homogeneous co-ordinates as cross-ratios, invariant in all linear transformations; this idea had been advanced in 1827 by A. F. Möbius, but had remained unnoticed.[2] Fiedler's *Cyklographie*, 1882, contained constructions of problems on circles and spheres.

The interweaving of projective and descriptive geometry was carried on in Italy by G. Bellavitis. The theory of shades and shadows was first investigated by the French writers quoted above, and in Germany treated most exhaustively by Ludwig Burmester of Munich.

Elementary Geometry of the Triangle and Circle

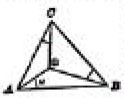
It is truly astonishing that during the nineteenth century new theorems should have been found relating to such simple figures as the triangle and circle, which had been subjected to such close examination by the Greeks and the long line of geometers which followed. It was *L. Euler* who proved in 1765 that the orthocenter, circumcenter

[1] F. J. Obenrauch, *Geschichte der darstellenden und projectiven Geometrie*, Brünn, 1897, pp. 350, 352.

[2] A. Voss, "Wilhelm Fiedler," *Jahresb. d. d. Math. Vereinigung*, Vol. 22, 1913, p. 107.

and centroid of a triangle are collinear, lying on the "Euler line." H. C. Gossard of the University of Oklahoma showed in 1916 that the three Euler lines of the triangles formed by the Euler line and the sides, taken by twos, of a given triangle, form a triangle triply perspective with the given triangle and having the same Euler line. Conspicuous among the new developments is the "nine-point circle," the discovery of which has been erroneously ascribed to Euler. Among the several independent discoverers is the Englishman, *Benjamin Bevan* (?–1838) who proposed in Leybourn's *Mathematical Repository*, I, 18, 1804, a theorem for proof which practically gives us the nine-point circle. The proof was supplied to the *Repository*, I, Part 1, p. 143, by *John Butterworth*, who also proposed a problem, solved by himself and *John Whitley*, from the general tenor of which it appears that they knew the circle in question to pass through all nine points. These nine points are explicitly mentioned by C. J. Brianchon and J. V. Poncelet in Gergonne's *Annales* of 1821. In 1822, *Karl Wilhelm Feuerbach* (1800–1834), professor at the gymnasium in Erlangen, published a pamphlet in which he arrives at the nine-point circle, and proves the theorem known by his name, that this circle touches the incircle and the three excircles. The Germans call it "Feuerbach's Circle." The last independent discoverer of this remarkable circle, so far as known, is *T. S. Davies*, in an article of 1827 in the *Philosophical Magazine*, II, 29–31. Feuerbach's theorem was extended by *Andrew Searle Hart* (1811–1890), fellow of Trinity College, Dublin, who showed that the circles which touch three given circles can be distributed into sets of four all touched by the same circle.

In 1816 *August Leopold Crelle* published in Berlin a paper dealing with certain properties of plane triangles. He showed how to determine a point Ω inside a triangle, so that the angles (taken in the same order) formed by the lines joining it to the vertices are equal. In the adjoining figure the three marked angles are equal. If the construction is made so that angle Ω'AC = Ω'CB = Ω'BA, then a second point Ω' is obtained. The study of these new angles and new points led Crelle to exclaim:



"It is indeed wonderful that so simple a figure as the triangle is so inexhaustible in properties. How many as yet unknown properties of other figures may there not be!" Investigations were made also by *Karl Friedrich Andreas Jacobi* (1795–1855) of Pforta and some of his pupils, but after his death, in 1855, the whole matter was forgotten. In 1875 the subject was again brought before the mathematical public by Henri Brocard (1845–1922) whose researches were followed up by a large number of investigators in France, England and Germany. Unfortunately, the names of geometricians which have been attached to certain remarkable points, lines and

資料8 Smith A source book in mathematics

BRIANCHON AND PONCELET

On the Nine-point Circle Theorem

(Translated from the French by Dr. Morris Miller Slotnick, Harvard University, Cambridge, Mass.)

The nine-point circle was discovered by Brianchon and Poncelet, who published the proof of the fact that the circle passes through the nine points in a joint paper: "Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère, au moyen de quatre conditions données," appearing in Georgonne's *Annales de Mathématiques*, vol. 11 (1820–1821), pp. 205–220. The theorem, of which the translation appears below, occurs as *Théorème IX*, (p. 215) in a sequence of theorems, and is there used merely as a lemma.

The theorem is known as Feuerbach's theorem, although the latter published his *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks*, in which the theorem occurs, in Nürnberg in 1822. However, Feuerbach proved the remarkable fact that the nine-point circle is tangent to the inscribed and the three escribed circles of the triangle. This booklet has been reprinted in 1908 (Berlin, Mayer und Müller), and there the theorems in question are found on pages 38–46. The proofs of Feuerbach are all of a quantitative nature, based as they are on the numerical relations existing between the radii of the various circles associated with a triangle and the distances between the centers of pairs of these circles.

The circle which passes through the feet of the perpendiculars dropped from the vertices of any triangle on the sides opposite them, passes also through the midpoints of these sides as well as through the midpoints of the segments which join the vertices to the point of intersection of the perpendiculars.

Proof.—Let P, Q, R be the feet of the perpendiculars dropped from the vertices of the triangle ABC on the opposite sides; and let K, I, L be the midpoints of these sides.[1]

The right triangles CBQ and ABR being similar,

$$BC : BQ = AB : BR;$$

from which, since K and L are the midpoints of BC and AB,

$$BK \cdot BR = BL \cdot BQ;$$

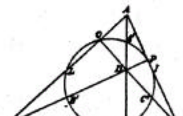
that is to say, the four points K, R, L, Q lie on one circle.[2]

[1] [The figure which appears here is similar to that which is published with the manuscript.]

[2] [The text here reads: "appartiennent à une même circonférence."]

It may similarly be shown that the four points K, R, I, P lie on a circle, as well as the four points P, I, Q, L.

This done, if it were possible that the three circles in question not be one and the same circle, it would follow that the common chords of the circles taken two at a time would pass through a point; now, these chords are precisely the sides of the triangle ABC, whoch do not pass through a common point; it is equally impossible to suppose that the three circles are different from one another; thus they must coincide in one and the same circle.



Now, let C', A', B' be the midpoints of the segments DC, DA, DB which join the point of intersection D of the three altitudes of the triangle ABC with each of the respective vertices. The right triangles CDR and CQB being similar, we have

$$CD : CR = CB : CQ;$$

from which, since C' and K are the midpoints of the segments CD and CB,

$$CC' \cdot CQ = CR \cdot CK;$$

that is to say, the circle which passes through K, R, Q passes also through C'.

It may be shown in the same manner that the circle passes through the other two points A', B'; thus it passes through the nine points P, Q, R, I, K, L, A', B', C'; *which was to be proven.*