第２学年　数学科　学習指導案

１　目標

アポロニウスの問題についての考察を通じて、数学に対しての興味・感心を高め、生徒の歴史・文化としての数学の位置づけと数学観の再構成を行う。

２　内容「アポロニウスの円錐曲線論（Ｔｈｅ　Ｃｏｎｉｃ　Ｓｅｃｔｉｏｎｓ）」の中の「接触」（Ｏｎ　Ｔａｎｇｅｎｃｉｅｓ）よりアポロニウスの問題について考察する。

３　準備・資料

授業資料を小冊子として作成し、それを用いて授業を進めていく。

作図ツール（Ｃａｂｒｉ－ＧｅｏｍｅｔｒｙⅡ、以下「カブリ」と呼ぶ。）を使った授業を行う。

４　①１日目の学習活動の狙い

円、直線（点も含む）に関しての基本的な性質について確認する。

カブリを使った作図ができるように、カブリの基本的な操作を行う。原文を読むことで、当時の考え方に少しでも近づくこと。

（宿題を与える。生徒を指名し、次の授業の最初に解答させる。）

②２日目の学習活動の狙い

カブリの基本的な操作と、実際にカブリを使って“アポロニウスの問題”を考察する。

（宿題を与える。生徒を指名し、次の授業の最初に解答させる。）

③３日目の学習活動の狙い

前日の宿題の解答を行うことで、本時の作図題について関心を高める。

様々な“アポロニウスの問題”を考察することによって当時の数学についての理解を深める。最後にアンケートを取り、生徒の数学観の確認と再構成を行う。

５　指導案（授業展開）

１日目について

２日目について

３日目について

５　授業展開

（１日目の授業内容）（かっこの中のページ数は、授業資料を表している。）

学習活動	指導上の留意点	評価の観点
３日間の授業の目標と計画について説明する。	（Ｐ２）	
ギリシャ時代の数学についての説明を行う。	（Ｐ３～Ｐ７）	①関心・意欲・態度
アポロニウスの業績について説明する。		
「円錐曲線論」のなかの『接触』についての原文と英文を提示する。	日本語訳を適宜、補うようにする。 （Ｐ８～Ｐ１０）	①関心・意欲・態度
内容の確認を行う。		
カブリの基本的な操作についての説明。 生徒が自由に操作すること。	操作の方法がわからない生徒を支援すること。	②技能
参考資料「演習問題」１ 外心、内心に関しての問題を与える。	家庭学習における課題とする。 生徒を指名。次の授業のときに解答をする。	③数学的に処理する力

5　授業展開

（２日目の授業内容）

学習活動	指導上の留意点	評価の観点
宿題の解答を行い、問題の関連について考える。	生徒とのやりとりを重視する。	①関心・意欲・態度
カブリの操作の復習をする。	カブリの特性について補足説明すること。	②技能
アポロニウスの問題の幾何学的な作図による解法を行う。 問題（１）外心の作図 問題（２）内心の作図	ユークリッド原論にも記述があることに注意すること。	①関心・意欲・態度
内心の正しい作図ができているかの確認を点を動かすことによって行う。	カブリの特性に慣れるように指導する。	②技能
問題（３）２点を通り、１直線に接する円の作図	適宜ヒントを出しながら作図を進めていく。	①関心・意欲・態度 ②技能
「演習問題」２ 「アポロニウスの問題の代数的な解法」 に関しての問題を与える。	家庭学習における課題とする。 生徒を指名。次の授業のときに解答をする。	③数学的に処理する力

5　授業展開

（３日目の授業内容）

学習活動	指導上の留意点	評価の観点
宿題の解答を行い、問題の関連について考える	代数的な処理と幾何学的な作図との比較を行う。	①関心・意欲・態度 ③数学的に処理する力
問題（３）の作図を完成する。	条件を満たす円が作図できたとして、どのようなことが言えるのか考えるながら考察を続けていく。	②技能
問題（４）が前の問題（３）に帰着することを説明する。		③数学的に処理する力
様々な「アポロニウスの問題」について、考察を行う。	（４）以降の問題をすべて解く時間的な余裕はないので、できる範囲で作図の確認を行うようにしたい。	
まとめを行う。		
授業全体を通じての感想を書く時間を取る。	今回の一連の授業によって生徒の持つ数学観はどのように変化するか注意深く観察する。	①関心・意欲・態度

配布資料

（目次）

２年（　）組（　）番　氏名（　　　　　　　　　　　　　　　　　）

APOLLONII PERGÆI

CONICORUM

LIBRI OCTO,

ET

SERENI ANTISSENSIS

DE SECTIONE

CYLINDRI & CONI

LIBRI DUO.

OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO, An. Dom. MDCCX.

2年（ ）組（ ）番 氏名（ ）

１　授業を始めるにあたって

（１）挨拶

自己紹介を行う。

（２）授業計画について

目標：アポロニウスの問題を作図によって解決していく中で、数学に対しての興味・関心を高め、生徒の数学観の確認と再構成を行う。

１時間目「アポロニウスの＜円錐曲線論＞」のなかの『接触』について考察する。

　　　　　カブリの基本的な操作についての説明と操作を行う。

２時間目　カブリの基本的な操作と、実際に作図を行う。

３時間目「まとめ」

【MEMO】

２　数学者達

ピタゴラス（ＢＣ５７２－４９７）

　ギリシャの都市「クロトン」で学校を開き、そこで（自分がエジプトに留学して学んだ）数学、哲学、自然科学を教え、弟子達と共に研究に励んだ。この学校で学んだことは、口外することは固く禁じられていた。弟子達が発見したことはすべてピタゴラスの発見とされた。

アルキメデス（ＢＣ２８７－２１２）

　浮力に関する「アルキメデスの原理」で有名である。数学に関して数多くの貴重な研究を行った。

ユークリッド（ＢＣ３００頃活躍）

「原論（１巻から１３巻）」を著す。幾何学ばかりでなく、数論についての記述がある。

アポロニウス（ＢＣ２３０頃活躍）

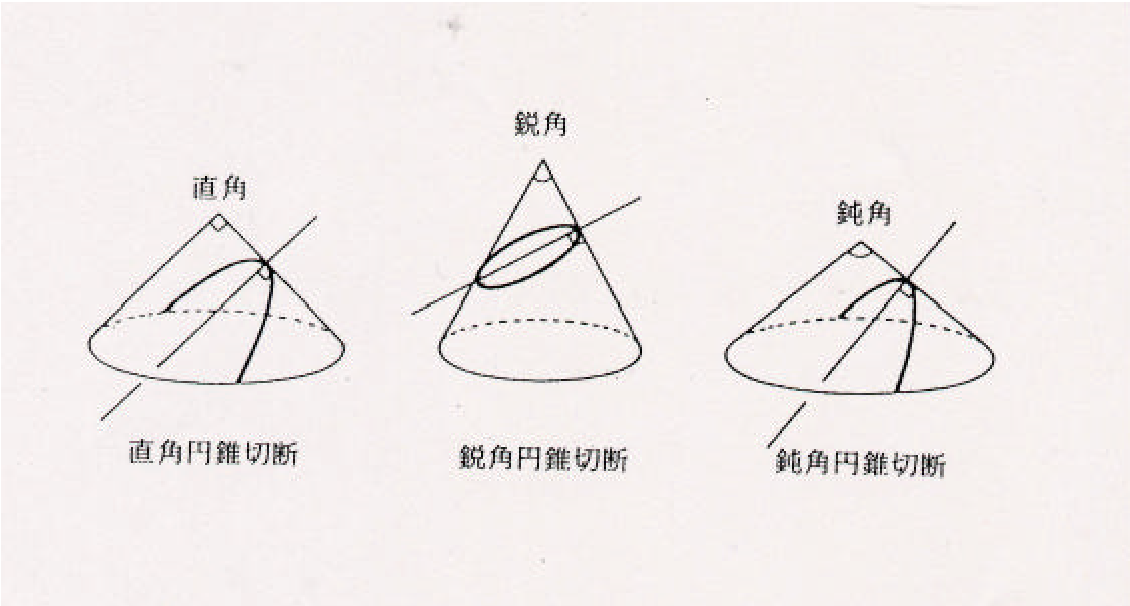
アポロニウスの研究で最も有名なものは「円錐曲線論」である。（彼は、それまでの研究を整理し、自分の研究を付け加えたわけである。）

パッポス（ＡＤ３００頃活躍）

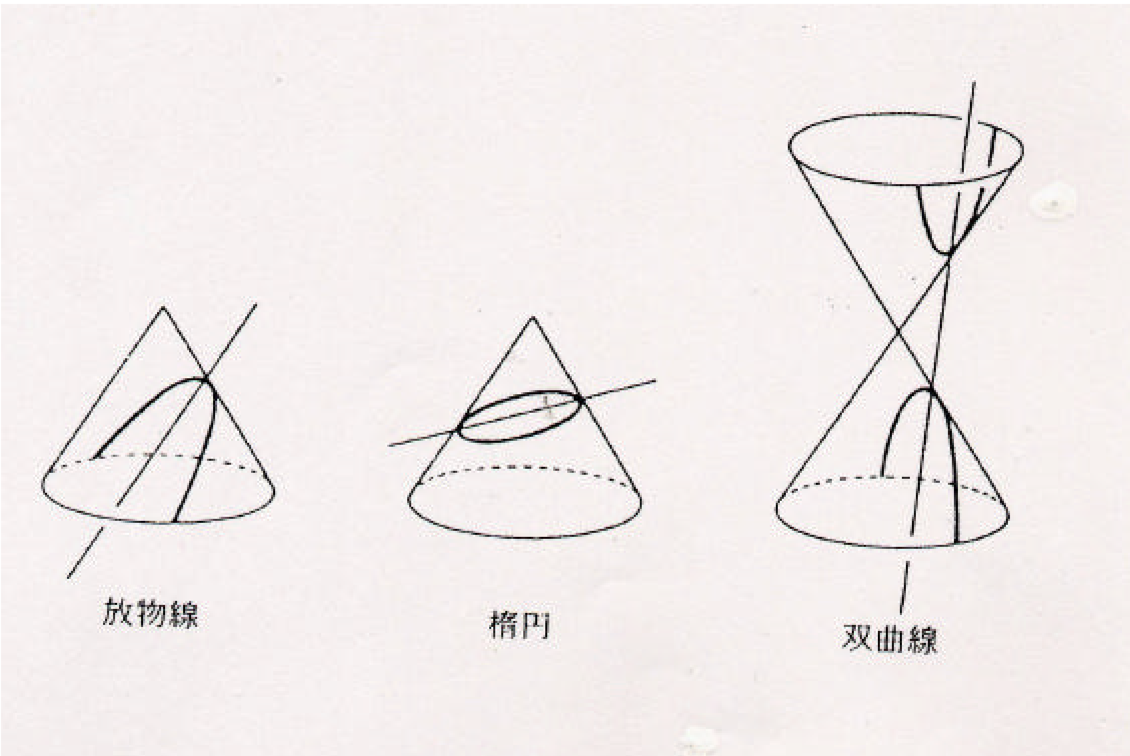
　ギリシャ最後の数学者といっても良い。業績は数多い。

【円錐曲線の図】

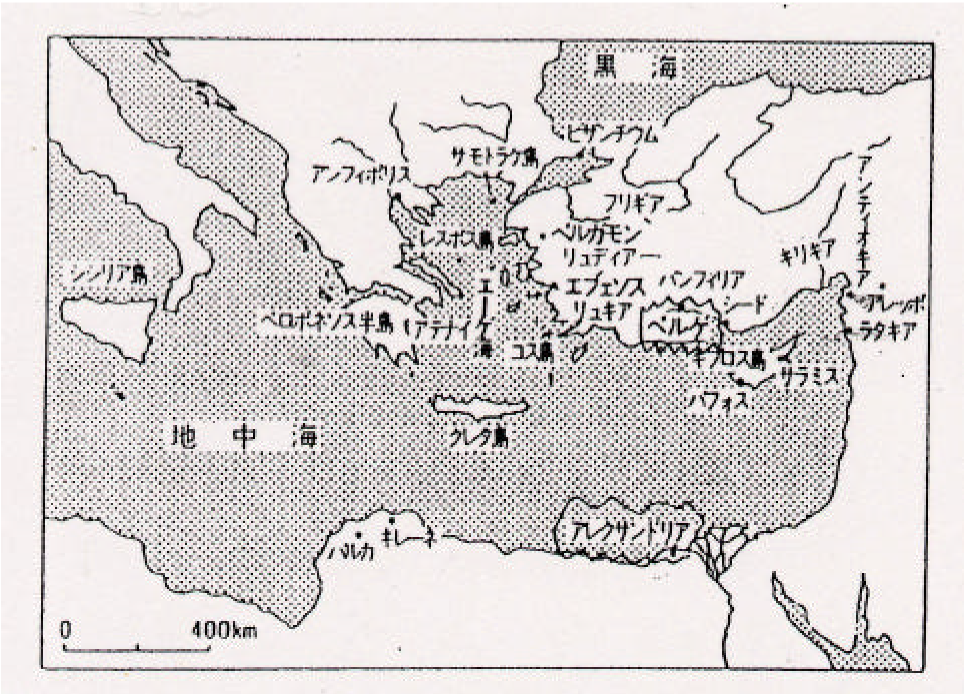
（メナイクモスの方法）



（アポロニウスの方法）



【ギリシャ数学の舞台】ベルゲ（ペルガ）、アレキサンドリアに注目



【ユークリッド原論】多くの定理、命題が含まれている。その内訳は、以下の通り。

	定義	公準	公理	命題	内容概略
第1巻	23個	5個	5個	48個	直線図形
第2巻	2	0	0	14	面積変形（図形代数）
第3巻	11	0	0	37	円論
第4巻	7	0	0	16	内接・外接多角形
第5巻	18	0	0	25	一般量の比例論
第6巻	4	0	0	33	比例論の応用
第7巻	22	0	0	39	数論（約数，倍数，整数の比例論）
第8巻	0	0	0	27	数論（等比数列，連比例，平方数，立方数）
第9巻	0	0	0	36	数論（連比例，素数定理，偶数・奇数の理論）
第10巻	第1群4 第2群6 第3群6	0	0	115	無理量論（無記号代数）
第11巻	29	0	0	39	立体図形
第12巻	0	0	0	18	求積論（取尽しの方法）
第13巻	0	0	0	18	正多面体

３　ギリシャ数学の特徴

「ギリシャ人特有の数学への貢献とは、いったいどこにあるのか」以下にあるように３つの要素が確認できる。

第１の要素は、あらゆる数学的な帰結は「演繹的」論理展開によって検証されなければならないと言う主張である。論証は誰もが納得する出発点から論理的なステップを踏んで進まなければならず、それによって誰もが結論を受け入れることが保証される。

第２の要素は、第１の要素に密接に関係しているが、ギリシャ人が数学を「抽象的なものにした」ことである。抽象的完全性の探究はギリシャ思想の支配的テーマであった。

ギリシャ数学の３番目の顕著な特質、すなわち幾何学の重視と、解法にあたっての幾何学的方法の使用が思い起こされる。そのためか、ギリシャ人は代数や算術を本当に発展させるために不可欠だった記号表記を作り出すことが出来なかったとも指摘されている。（「数学を気づいた天才たち」（上）スチュワート・ホリングデール、講談社、２０００年、ＰＰ３０－３１）

代数的な結果を幾何学的な表現し直した。（「面積のあてはめ」と呼ぶ。）例えば、原論には、「平行四辺形は、同高同底の三角形の２倍である。」という表現で記されており、「平行四辺形の面積＝底辺×高さ」という表し方でない。勿論、面積という言葉もない。

<参考資料>

アポロニウス（ＢＣ２３０頃活躍）について……生涯と著作

「偉大なる幾何学者」として知られるアポロニウスは、紀元前２６２年頃に南イタリアのペルガで生まれた。彼はおそらくアレクサンドリアのムセイオンで教育を受けたものと思われる。今、彼の人生についてはわずかなことしか知ることができず、彼のほとんどの著作も失われてしまった。しかし、後代の人々の言葉からそのいくつかの内容をある程度想像することができる。

『平面の軌跡について』では、アポロニウスは、ある条件に従う点Ｐの「軌跡」を特に論じている。たとえば、ＡとＢを固定された点とし、ＰＡとＰＢに対する比を一定に保つと、Ｐの軌跡は円となるが、これは今日「アポロニウスの円」として知られている。

彼の論考『接触について』は有名な「アポロニウスの問題」を扱っている。考察すべきケースは１０通りある。ユークリッドは『原論』において、その中の２つを扱った。アポロニウスはおそらく残りの８つの場合を扱っただろう。３つの円に接する円を描くという最も困難なケースは、１６世紀および１７世紀の数学者に魅惑的な挑戦のテーマを提供したといえよう。

アポロニウスの小品のいくつかはアラビア語の翻訳でしか残っていない。彼の主著『円錐曲線論』は８巻から構成され、４８７を越える命題を含んでおり、それらはすべてギリシャの天才たちの特徴でもある厳密に演繹的な方法で証明されている。最初の４巻は１２～１３世紀のギリシャ語手稿によって我々に伝えられている。つづく３巻はアラビア語でのみ残っている。第８巻は失われたが、１７世紀にハレーによってパッポスから部分的に復元された。（「数学を築いた天才たち」(上)スチュアート・ホリングデール、講談社、２０００年、ＰＰ９４－９７）

4　アポロニウスの＜円錐曲線論＞『接触』の（原文、英文）についての考察

(v.) *On Tangencies*

Ibid. vii. 11, ed. Hultsch 644. 23–646. 19

Ἑξῆς δὲ τούτοις τῶν Ἐπαφῶν ἐστιν βιβλία δύο. προτάσεις δὲ ἐν αὐτοῖς δοκοῦσιν εἶναι πλείονες, ἀλλὰ καὶ τούτων μίαν τίθεμεν οὕτως ἔχουσαν ἐξῆς· σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων τριῶν ὁποιωνοῦν θέσει δοθέντων κύκλον ἀγαγεῖν δι' ἑκάστου τῶν δοθέντων σημείων, εἰ δοθείη, ἢ ἐφαπτόμενον ἑκάστης τῶν δοθεισῶν γραμμῶν. ταύτης διὰ πλήθη τῶν ἐν ταῖς ὑποθέσεσι δεδομένων ὁμοίων ἢ ἀνομοίων κατὰ μέρος διαφόρους προτάσεις ἀναγκαῖον γίνεσθαι δέκα· ἐκ τῶν τριῶν γὰρ ἀνομοίων γενῶν τριάδες διάφοροι ἄτακτοι γίνονται ῑ. ἤτοι γὰρ τὰ διδόμενα τρία σημεῖα ἢ τρεῖς εὐθεῖαι ἢ δύο σημεῖα καὶ εὐθεῖα ἢ δύο εὐθεῖαι καὶ σημεῖον ἢ δύο σημεῖα καὶ κύκλος ἢ δύο κύκλοι καὶ σημεῖον ἢ δύο εὐθεῖαι καὶ κύκλος ἢ δύο κύκλοι καὶ εὐθεῖα ἢ σημεῖον καὶ εὐθεῖα καὶ κύκλος ἢ τρεῖς κύκλοι. τούτων δύο μὲν τὰ πρῶτα δέδεικται ἐν τῷ δʹ βιβλίῳ τῶν πρώτων Στοιχείων, διὸ παρίει μὴ γράφων· τὸ μὲν γὰρ τριῶν δοθέντων σημείων μὴ ἐπ' εὐθείας ὄντων τὸ αὐτό ἐστιν τῷ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι, τὸ δὲ γ̄ δοθεισῶν εὐθειῶν μὴ παραλλήλων οὐσῶν, ἀλλὰ τῶν τριῶν συμπιπτουσῶν, τὸ αὐτό ἐστιν τῷ εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι· τὸ δὲ δύο παραλλήλων οὐσῶν καὶ μιᾶς ἐμπιπτούσης ὡς μέρος ὂν τῆς βʹ ὑποδιαιρέσεως προγράφεται ἐν τούτοις πάντων. καὶ τὰ ἑξῆς ς̄ ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ τὰ δὲ λειπόμενα δύο, τὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ κύκλου ἢ τριῶν δοθέντων κύκλων μόνον ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ διὰ τὰς πρὸς ἀλλήλους θέσεις τῶν κύκλων τε καὶ εὐθειῶν πλείονας οὔσας καὶ πλειόνων διορισμῶν δεομένας.

(P343)

[a] As the Greeks never grasped the conception of one point being two *coincident* points, it was not possible to enunciate this problem so concisely as we can do: *Given four points A, B, C, D on a straight line, of which A may coincide with C and B with D, to find another point P on the same straight line such that AP . CP : BP . DP has a given value.* If AP . CP = λ . BP . DP, where A, B, C, D, λ are given, the determination of P is equivalent to the solution of a quadratic equation, which the Greeks could achieve by means of the application of areas. But the fact that limits of possibility, and maxima and minima were discussed leads Heath (*H.G.M.* ii. 180-181) to conjecture that Apollonius investigated the *series* of point-pairs determined by the equation for different values of λ, and that "the treatise contained what amounts to a complete *Theory of Involution*." The importance of the work is shewn by the large number of lemmas which Pappus collected.

[a] Eucl. iv. 5 and 4.

[b] The last problem, to describe a circle touching three given circles, has been investigated by many famous geometers, including Newton (*Arithmetica Universalis*, Prob. 47). The lemmas given by Pappus enable Heath (*H.G.M.* ii. 182-185) to restore Apollonius's solution—a "plane" solution depending only on the straight line and circle.

(v.) *On Tangencies*

Ibid. vii. 11, ed. Hultsch 644. 23–646. 19

Next in order are the two books *On Tangencies*. Their enunciations are more numerous, but we may bring these also under one enunciation thus stated: *Given three entities, of which any one may be a point or a straight line or a circle, to draw a circle which shall pass through each of the given points, so far as it is points which are given, or to touch each of the given lines.*[b] In this problem, according to the number of like or unlike entities in the hypotheses, there are bound to be, when the problem is subdivided, ten enunciations. For the number of different ways in which three entities can be taken out of the three unlike sets is ten. For the given entities must be (1) three points or (2) three straight lines or (3) two points and a straight line or (4) two straight lines and a point or (5) two points and a circle or (6) two circles and a point or (7) two straight lines and a circle or (8) two circles and a straight line or (9) a point and a straight line and a circle or (10) three circles. Of these, the first two cases are proved in the fourth book of the first *Elements*,[a] for which reason they will not be described; for to describe a circle through three points, not being in a straight line, is the same thing as to circumscribe a given triangle, and to describe a circle to touch three given straight lines, not being parallel but meeting each other, is the same thing as to inscribe a circle in a given triangle; the case where two of the lines are parallel and one meets them is a subdivision of the second problem but is here given first place. The next six problems in order are investigated in the first book, while the remaining two, the case of two given straight lines and a circle and the case of three circles, are the sole subjects of the second book on account of the manifold positions of the circles and straight lines with respect one to another and the need for numerous investigations of the limits of possibility.[b]

[b] The word "lines" here covers both the straight lines and the circles.

（ｖ）接触

これらの順番の次は、「*接触*」の２冊の本が出版されている。それらの表明は、より多くのものからなるが、次のように述べられており、一つの表明にまとめられるかもしれない。「*与えられた３つの存在物、その内のどれか一つが点か直線か円で、与えられた点のそれぞれを通る円を引く。与えられたものが点であるか、与えられた線のそれぞれに接する限りは。*」(b) この問題において、仮説におけるありそうな存在物、または、ありそうでない存在物の数によって、問題が再分割されるとき、１０の表明があるに違いない。というのは、与えられた存在物は、（1）3点（2）３本の直線（3）２点と１本の直線（4）２本の直線と１点（5）2点と1円（6）２つの円と１点（7）２本の直線と１円（8）２つの円と１本の直線（9）１点と１本の直線と１つの円（１０）３つの円のどれかでなければならない。これらの内、はじめの二つの場合、最初の「*原論*」の第４巻で、証明されている。(a) そんなわけで、それらについて説明しない。直線においてではなく、３点を通る円を説明することは、与えられた三角形に外接させるのと同じことである。（外接円）平行ではなく、互いに交わる３本の与えられた直線に接する円を求めることは、与えられた三角形の中に円を書くのと同じことである。（内接円）直線の内の２本が平行で、１本がそれに交わる場合は、２番目の問題の再分割であるが、ここでは最初の所に出されている。その次の６個の問題は、順番に最初の本で研究されている。一方残る二つ、２本の与えられた直線と円の場合と３つの円の場合は、１点から別の点へ円や直線の多面的な

位置や可能性の限界の多数からなる調査の必要性のために、第２巻のただ一つの主題である。[b]

ｐ３４３　ａ

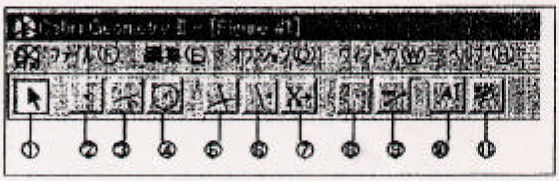
原論第４巻５と４を参照。

ｐ３４３　ｂ

最後の問題、つまり、３つの与えられた円に接する円を書くことは、ニュートンをふくむ多くの有名な幾何学者によって研究されてきた。パッポスによって与えられた系でハースはアポロニウスの解決方法―直線と円上でのみ適用できる平面上における解決方法―を復元できた。

カブリ（ＣＡＢＲＩ）の使い方について

※カブリ(CABRI)は、下の画面から始まります。



②を選ぶと点が書ける。③を選ぶと直線が書ける。④を選ぶと円が書ける。
⑤を選ぶと垂線が書ける。⑥を選ぶと線対称が書ける。････
※①～⑪までのボタンでは上で行った以外の機能があります。各自確認してください。

※作図したデータを保存したいときは、次の手順で行ってください。

①「ファイル」をクリック。「名前を付けて保存する」を選ぶ。
②保存する場所は、３．５インチＦＤ（Ａ：）を選ぶ。
③自分のクラスの場所にデータを保存する。ファイル名は自由に決めることができる。

5　参考資料：カブリの基本的な操作について

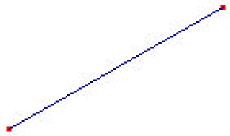
①点、直線、円の作図の仕方について

②垂線、平行線、垂直二等分線、角の二等分線の作図について

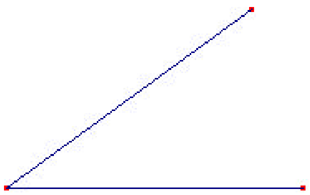
③その他

例　実際にカブリを使って、次の作図を行ってみよう。

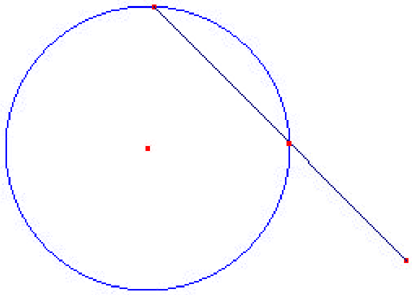
1　線分の垂直二等分線を作図する。



2　角の二等分線を作図する。



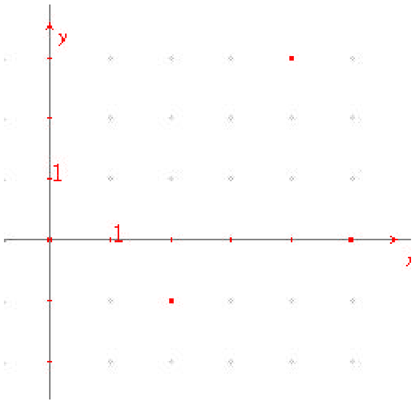
3　円の接線を作図する。



6　参考資料：演習問題１「外心、内心」を求める問題

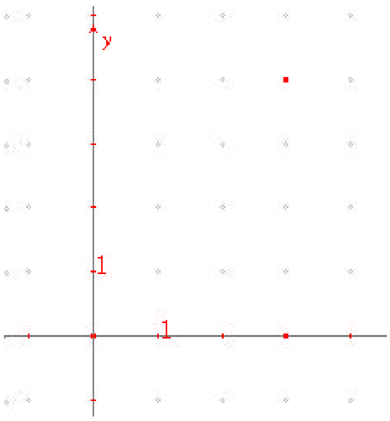
１　３点Ａ（２，－１）Ｂ（４，３）Ｃ（５，０）を通る円の方程式を求めよ。

（作図をして、外心を図に記入するのでも良い。）



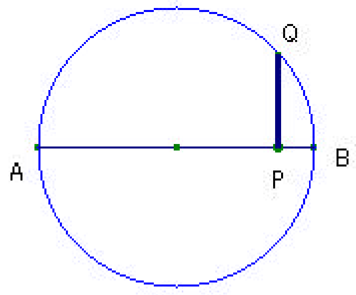
２　３点Ａ（０，０）Ｂ（３，０）Ｃ（３，４）を結んだ三角形に内接する円の方程式を求めよ。

（作図をして、内心を図に記入するのでも良い。）



３　右上の図において太線部分の長さを求めよ。

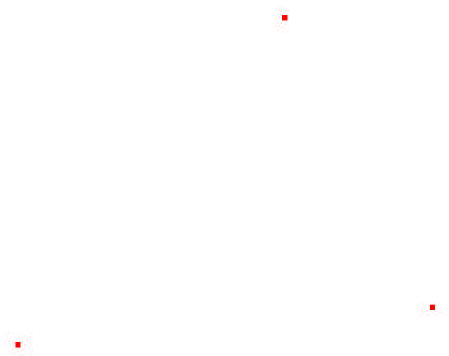
（ＡＰ＝ａ，ＢＰ＝ｂ，ＡＢ⊥ＰＱ）



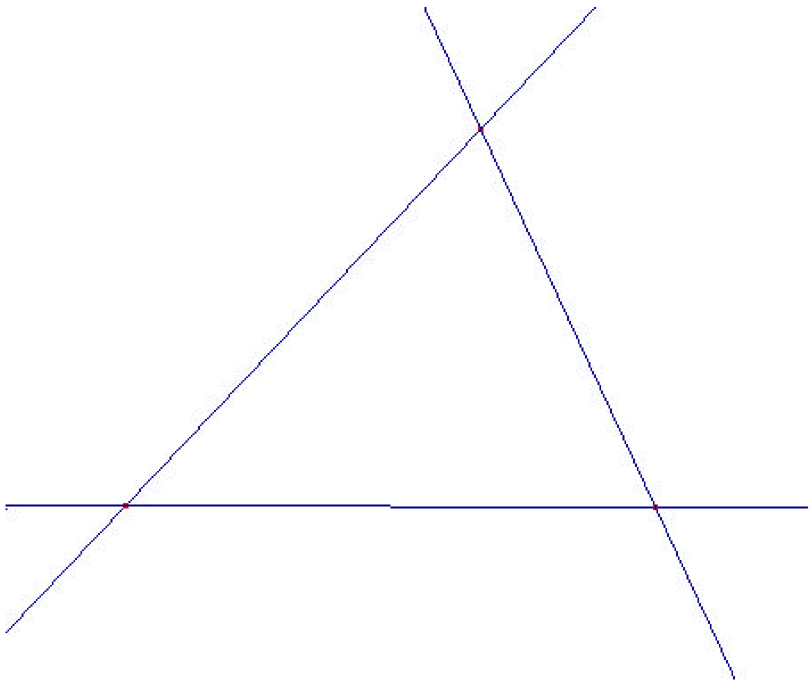
＜参考資料＞

「アポロニウスの問題の幾何学的な作図による解法」

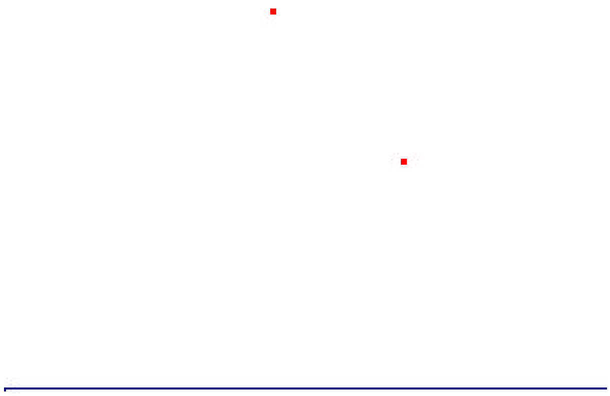
（１）３点を通る円の作図



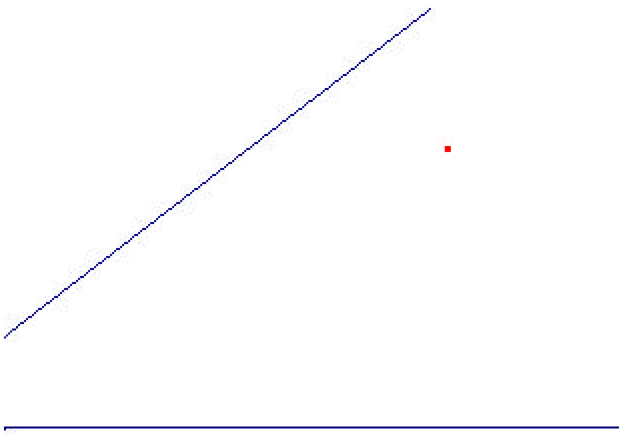
（２）３直線に接する円の作図



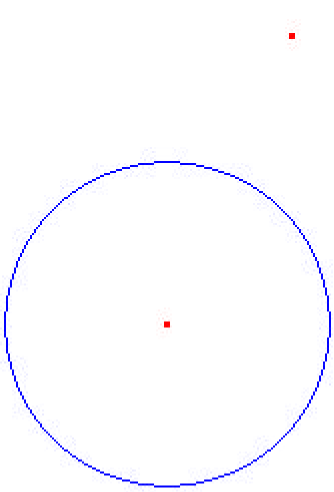
（３）２点を通り、１直線に接する円の作図



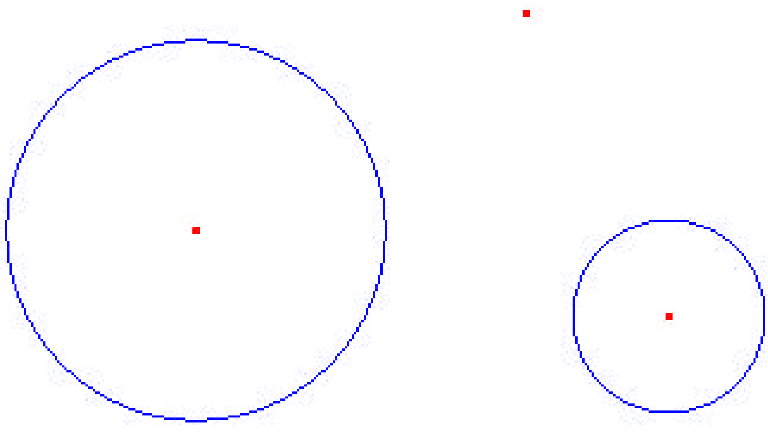
（４）２直線に接し、１点を通る円の作図



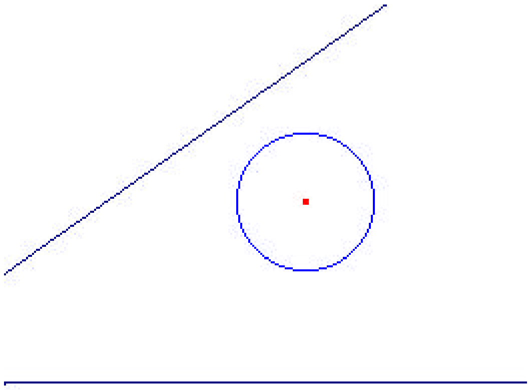
（５）２点を通り、１円に接する円の作図



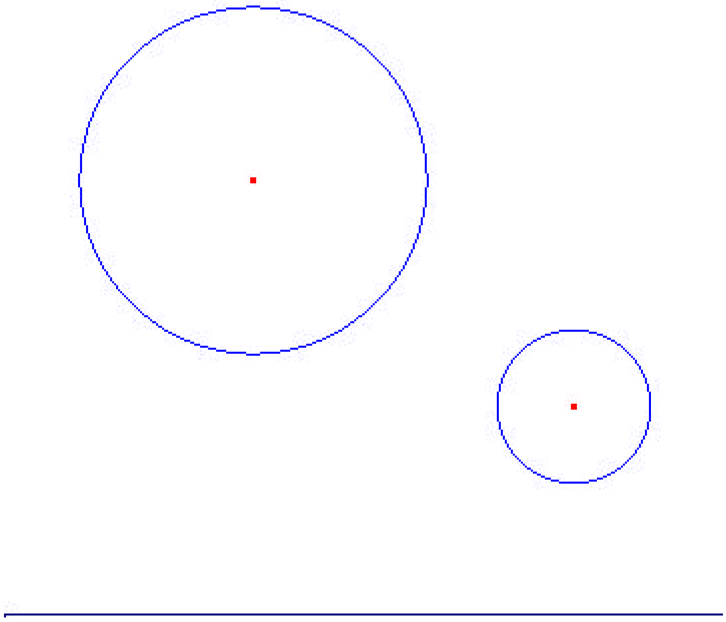
（６）２つの円に接し、１点を通る円の作図



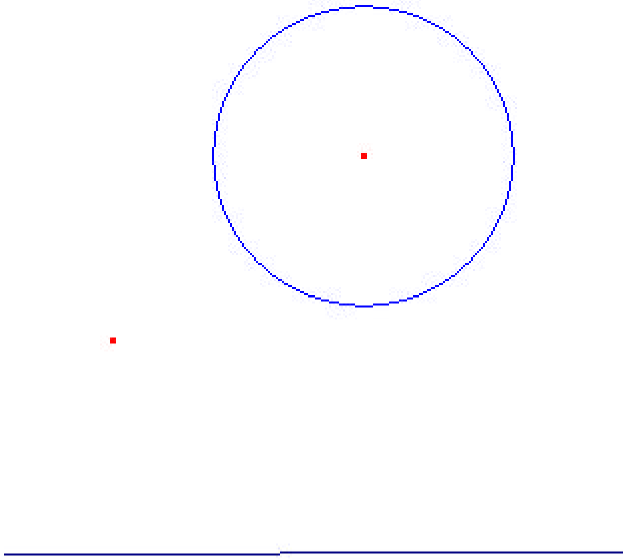
（７）２直線に接し、１円に接する円の作図



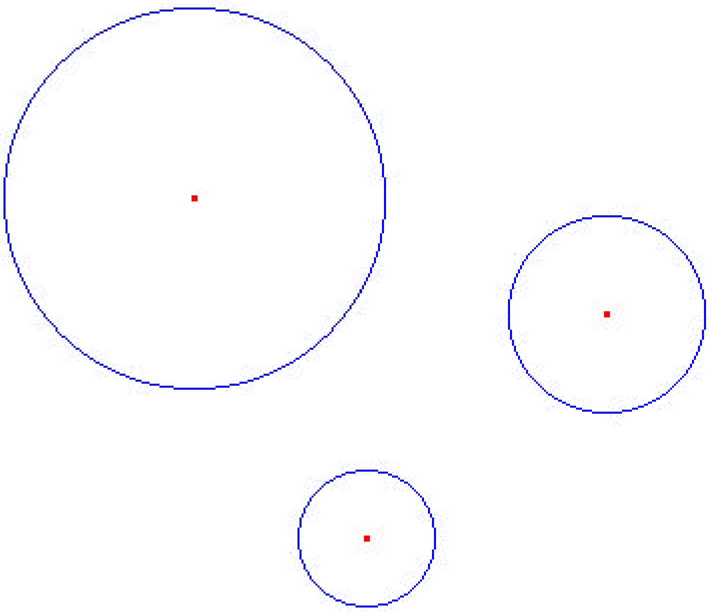
（８）２つの円と１直線に接する円の作図



（９）１点を通り、１直線と１円に接する円の作図



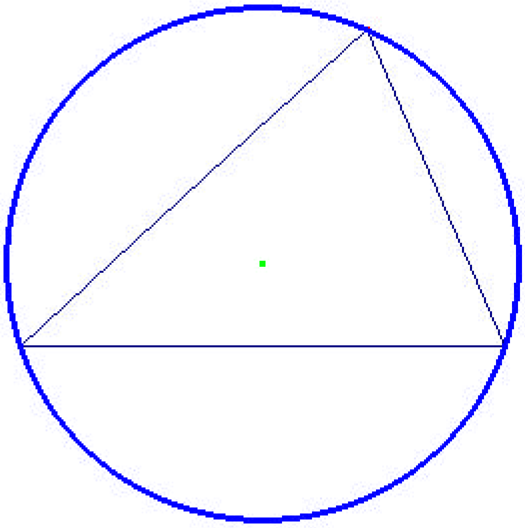
（10）３つの円に接する円の作図



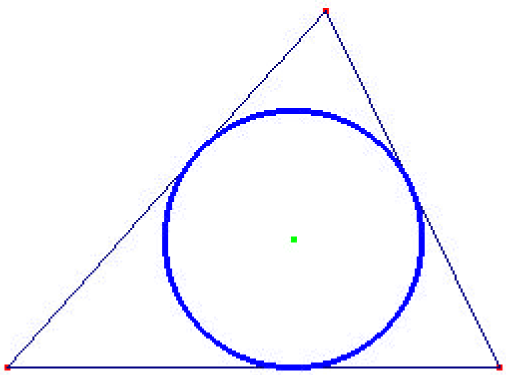
＜参考資料＞

「アポロニウスの問題の幾何学的な作図による解法」

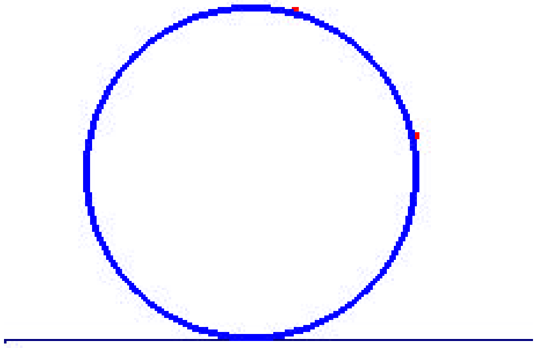
（１）３点を通る円の作図



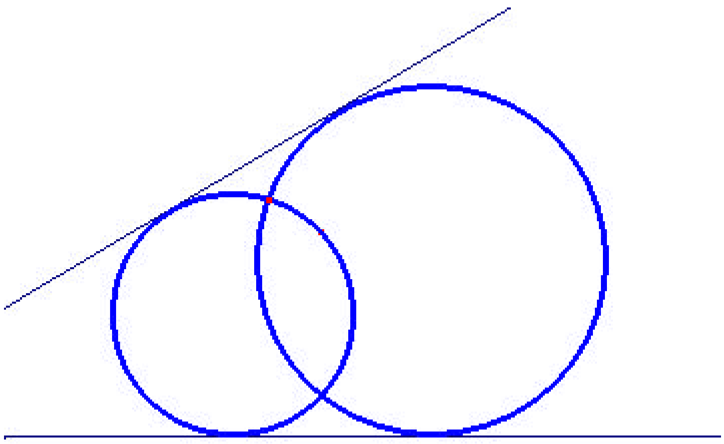
（２）３直線に接する円の作図



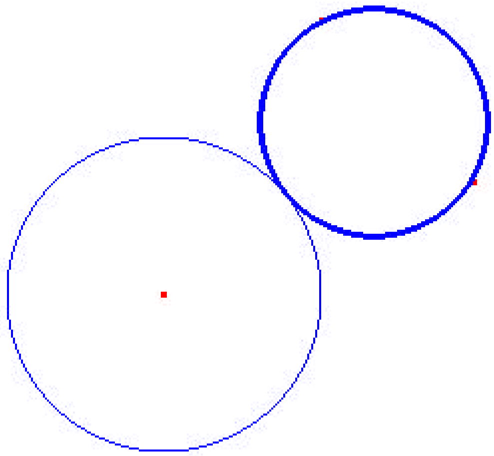
（３）２点を通り、１直線に接する円の作図



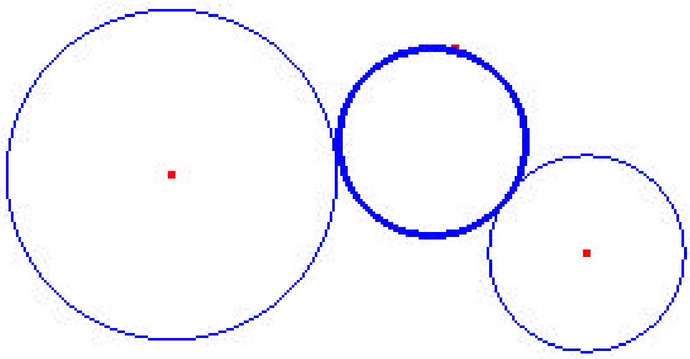
（４）２直線に接し、１点を通る円の作図



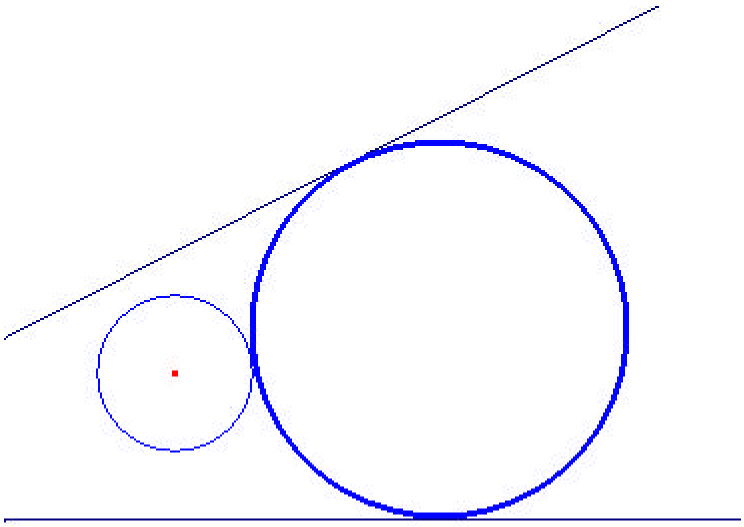
（５）２点を通り、１円に接する円の作図



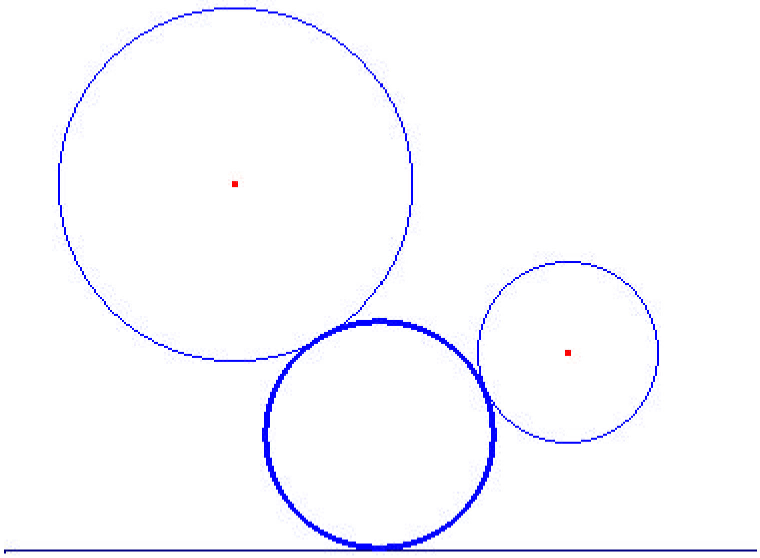
（６）２つの円に接し、１点を通る円の作図



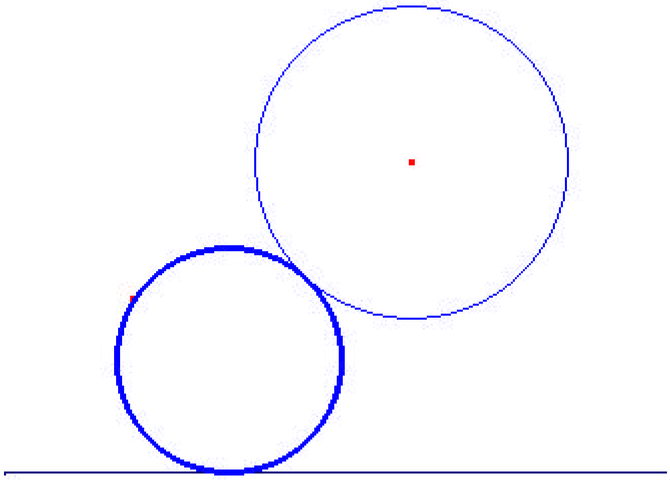
（７）２直線に接し、１円に接する円の作図



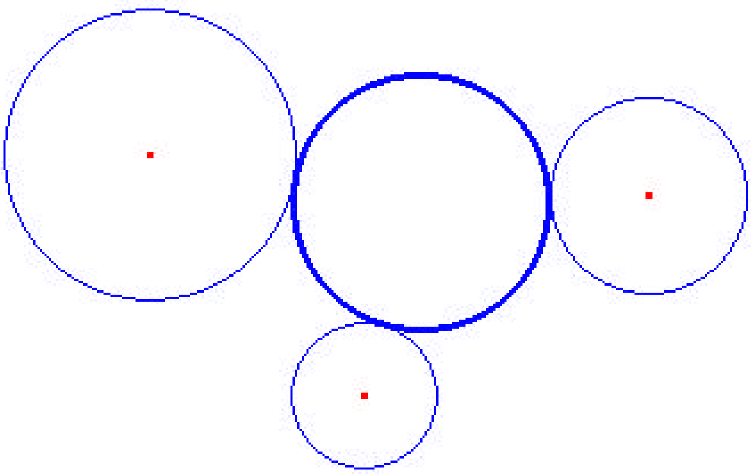
（８）２つの円と１直線に接する円の作図



（９）１点を通り、１直線と１円に接する円の作図



（10）３つの円に接する円の作図



＜参考資料＞

「アポロニウスの問題の代数的な作図による解法」

※次の条件を満たす円の方程式（「円の中心の座標、半径の大きさ」でも良い）を求めよ。

（３）Ａ（－３，２）Ｂ（４，１）を通り、直線ｙ＝０（ｘ軸）に接する円

（４）Ａ（６，２）を通り、直線ｙ＝０（ｘ軸）、４ｘ－３ｙ＝０に接する円

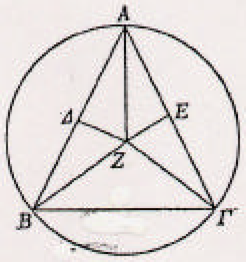
（５）以降の問題については、各自問題を作って検討してみてください。

その他の資料（ユークリッド原論第４巻５と４について）

5

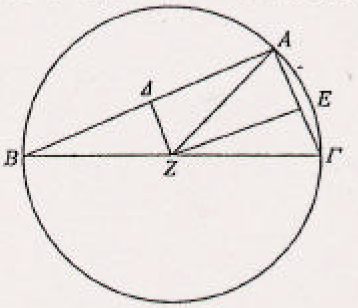
与えられた三角形に円を外接させること。

与えられた三角形を $AB\Gamma$ とせよ。与えられた三角形 $AB\Gamma$ に円を外接させねばならぬ。



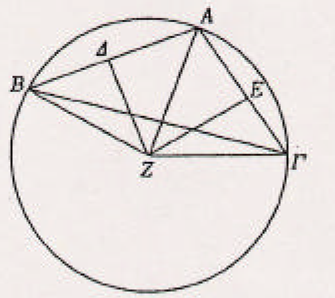
線分 AB, $A\Gamma$ が点 Δ, E において２等分され，点 Δ, E から AB, $A\Gamma$ に直角に ΔZ, EZ がひかれたとせよ。するとそれらは三角形 $AB\Gamma$ の内部か線分 $B\Gamma$ 上かまたは $B\Gamma$ の外部で相会するであろう。

まず内部で Z において相会するとし，ZB, $Z\Gamma$, ZA が結ばれたとせよ。そうすれば $A\Delta$ は ΔB に等しく，ΔZ は共通でかつ直角をなすから，底辺 AZ は底辺 ZB に等しい。同様にして ΓZ が AZ に等しいことも証明しうる。それゆえ ZB も $Z\Gamma$ に等しい。ゆえに３線分 ZA, ZB, $Z\Gamma$ は互いに等しい。したがって Z を中心とし，ZA, ZB, $Z\Gamma$ の一つを半径として円が描かれれば，残りの点をも通り，そしてこの円は三角形 $AB\Gamma$ に外接されるであろう。$AB\Gamma$ のように外接されたとせよ。



次に第２図のように ΔZ, EZ が線分 $B\Gamma$ 上で Z において相会するとし，AZ が結ばれたとせよ。同様にして点 Z は三角形 $AB\Gamma$ に外接される円の中心であることを証明しうる。

さらにまた第３図のように ΔZ, EZ が三角形 $AB\Gamma$ の外部で Z において相会するとし，AZ, BZ, ΓZ が結ばれたとせよ。そうすればまた $A\Delta$ は ΔB に等しく，ΔZ は共通でかつ直角をなすから，底辺 AZ は底辺 BZ に等しい。同様にして ΓZ が AZ に等しいことも証明しうる。それゆえ BZ も $Z\Gamma$ に等しい。ゆえに Z を中心とし，ZA, ZB, $Z\Gamma$ の一つを半径として円が描かれれば，残りの点をも通り，三角形 $AB\Gamma$ に外接されているであろう。



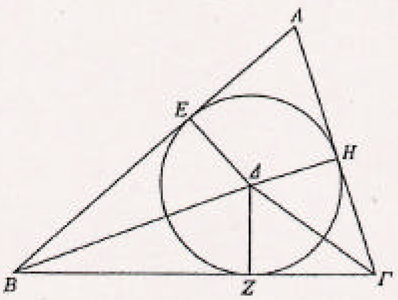
よって与えられた三角形に円が外接された。これが作図すべきものであった。

そして次のことは明らかである，すなわち円の中心が三角形の内部におちるときには，角 $BA\Gamma$ は半円より大きい切片内にあるから，直角より小さく，中心が線分 $B\Gamma$ 上におちるときには，角 $BA\Gamma$ は半円内にあるから，直角である。また円の中心が三角形の外部におちるときには，角 $BA\Gamma$ は半円より小さい切片内にあるから，直角より大きい。

4

与えられた三角形に円を内接させること。

与えられた三角形を ABΓ とせよ。このとき三角形 ABΓ に円を内接させねばならぬ。角 ABΓ, AΓB が線分 BΔ, ΓΔ によって2等分され，点 Δ において相会するとし，Δ から線分 AB, BΓ, ΓA に垂線 ΔE, ΔZ, ΔH がひかれたとせよ。



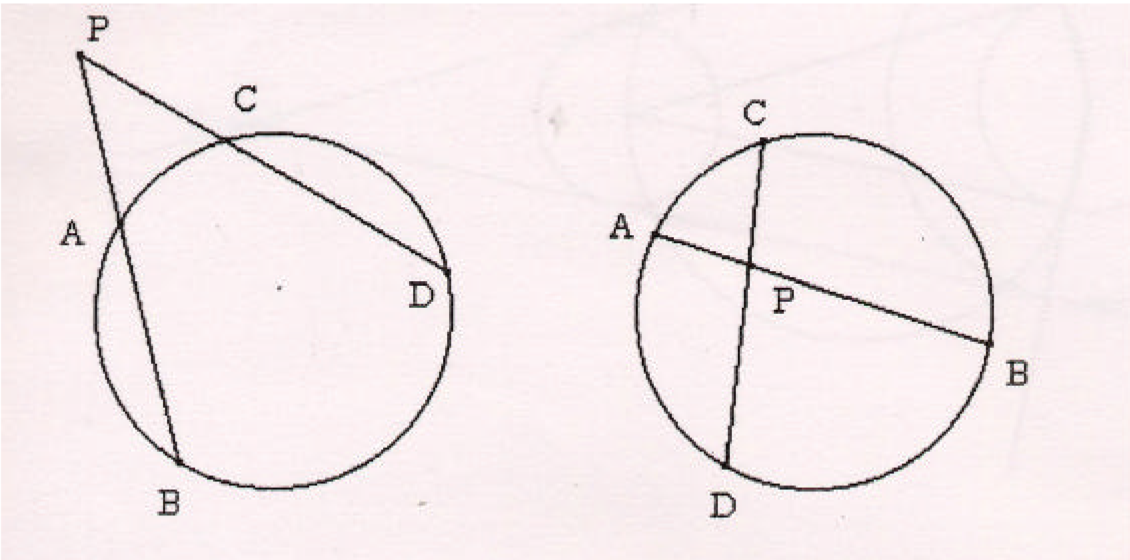
そうすれば角 ABΔ は角 ΓBΔ に等しく，直角 BEΔ は直角 BZΔ に等しいから，EBΔ, ZBΔ は2角が2角に等しく，1辺が1辺に等しい，すなわち等しい角の一つに対する辺 BΔ を共有する二つの三角形である。それゆえ残りの辺も残りの辺に等しいであろう。ゆえに ΔE は ΔZ に等しい。同じ理由で ΔH も ΔZ に等しい。したがって3線分 ΔE, ΔZ, ΔH は互いに等しい。それゆえ Δ を中心とし，ΔE, ΔZ, ΔH の一つを半径として円が描かれれば，残りの点をも通り，そして点 E, Z, H における角が直角であるから，線分 AB, BΓ, ΓA に接するであろう。なぜなら，もし交わるならば，円の直径にその端から直角にひかれた直線が円の内部におちることになるであろう。これは不合理であることが証明された。ゆえに Δ を中心とし，ΔE, ΔZ, ΔH の一つを半径として描かれた円は線分 AB, BΓ, ΓA と交わらないであろう。したがってそれらに接し，三角形 ABΓ に内接された円であろう。それが ZHE のように内接されたとせよ。

よって与えられた三角形 ABΓ に円 EZH が内接された。これが作図すべきものであった。

＜参考資料＞

(方べきの定理①) 円の２つの弦ＡＢ、ＣＤまたはそれらの延長が点Ｐで交わっているとき、

「ＰＡ・ＰＢ＝ＰＣ・ＰＤ」が成り立つ。



(方べきの定理②) 円の弦ＡＢの延長と円周上の１点Ｔにおける接線が点Ｐで交わっているとき、

「ＰＡ・ＰＢ＝ＰＴ^2」が成り立つ。